ÉLIE CARTAN

Sur une classe d'espaces de Weyl

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 60 (1943), p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1943_3_60__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR

UNE CLASSE D'ESPACES DE WEYL

PAR M. ÉLIE CARTAN.

Dans un Mémoire paru récemment dans la *Revista hispano-americana* (¹) et consacré à l'étude géométrique des équations différentielles du troisième ordre $y''' = F(x, y, y', y'')$, envisagées par rapport au groupe des transformations ponctuelles du plan, j'ai rencontré une classe particulière d'équations susceptibles d'être associées à des espaces de Weyl à trois dimensions. Mais ces espaces de Weyl ne sont pas quelconques; ils jouissent de la propriété caractéristique d'admettre ∞^2 plans isotropes (²). Ils constituent une classe intéressante d'espaces de Weyl. Nous nous proposons dans cet article de caractériser le tenseur de courbure des espaces de cette classe et de déterminer leur degré de généralité. Ce dernier problème fait partie d'une classe de problèmes qui ont été bien rarement abordés. Le principe de la méthode que nous appliquerons peut servir dans des cas plus généraux. Le résultat fondamental obtenu est que les espaces de Weyl de la classe considérée dépendent *essentiellement* de quatre fonctions arbitraires de deux arguments (³). Ce sont donc des espaces très

(¹) Série 4, t. 1, 1941, p. 1-31.
(²) Si la forme fondamentale de l'espace de Weyl est définie positive, cette propriété n'a de sens que si l'espace est *analytique;* en fait, dans le problème auquel il est fait allusion dans le texte, la forme fondamentale était indéfinie. Nous supposons ici l'espace réel analytique.
(³) Le mot *essentiellement* sera précisé en temps utile.

exceptionnels si l'on songe que l'espace de Weyl le plus général dépend essentiellement de cinq fonctions arbitraires de trois arguments. Un théorème d'existence et d'unicité d'un énoncé géométrique simple illustre intuitivement le résultat obtenu (n° 12).

I. — Généralités sur les espaces de Weyl.

1. Nous nous placerons, pour la simplicité et la symétrie des calculs, dans le cas d'un espace de Weyl *analytique* à forme fondamentale définie positive. Conformément à la nature même des espaces de Weyl, nous attacherons à chaque point M de l'espace un trièdre trirectangle $(M\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3)$ dont les trois vecteurs $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont assujettis à avoir la même longueur [4]. Ou plutôt nous attacherons au point M *tous* les trièdres d'origine M et dont les vecteurs sont rectangulaires entre eux et de même longueur. Ces trièdres dépendent de quatre paramètres, qu'il est inutile de préciser, et que nous appellerons *paramètres secondaires*, de sorte que lorsqu'on fait varier le point M, les trièdres attachés aux différents points de l'espace dépendent de 7 paramètres, dont les quatre paramètres secondaires et les trois coordonnées des points de l'espace (paramètres principaux).

Le passage d'un trièdre trirectangle $\mathfrak{T}$ à un trièdre infiniment voisin $\mathfrak{T}'$ se fait par une translation infinitésimale, dont nous désignerons les composantes rapportées à $\mathfrak{T}$ par $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, par une homothétie de centre M dont nous désignerons le rapport par $1+\varpi$, et par une rotation infinitésimale autour de M, dont nous désignerons les composantes covariantes par $\omega_{23}, \omega_{31}, \omega_{12}$. On aura donc les formules, où D est le symbole de différentiation covariante,

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
D\vec{M} &= \omega_1\vec{e}_1 + \omega_2\vec{e}_2 + \omega_3\vec{e}_3,\\
D\vec{e}_1 &= \varpi\vec{e}_1 + \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3,\\
D\vec{e}_2 &= \varpi\vec{e}_2 + \omega_{23}\vec{e}_3 - \omega_{12}\vec{e}_1,\\
D\vec{e}_3 &= \varpi\vec{e}_3 + \omega_{31}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2;
\end{aligned}
\right.
$$

les sept formes différentielles ω_i, ϖ, ω_{ij} sont linéaires par rapport aux différentielles des sept paramètres dont dépendent les trièdres de l'espace; les formes ω_1, ω_2, ω_3 ne font intervenir que les différentielles des paramètres principaux [5].

---

(4) Cela a un sens, tant qu'on reste en un même point de l'espace.

(5) En effet l'annulation de ω_1, ω_2, ω_3 exprime qu'on reste au même point M de l'espace, c'est-à-dire que les différentielles des coordonnées ponctuelles (paramètres principaux) sont nulles.

2. Les *équations de structure* de l'espace sont

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
\omega'_1 &= [\omega_1 \varpi] - [\omega_2 \omega_{12}] + [\omega_3 \omega_{31}],\\
\omega'_2 &= [\omega_2 \varpi] - [\omega_3 \omega_{23}] + [\omega_1 \omega_{12}],\\
\omega'_3 &= [\omega_3 \varpi] - [\omega_1 \omega_{31}] + [\omega_2 \omega_{23}],\\
\varpi' &= -\Pi,\\
\omega'_{23} &= [\omega_{12} \omega_{31}] - \Omega_{23},\\
\omega'_{31} &= [\omega_{23} \omega_{12}] - \Omega_{31},\\
\omega'_{12} &= [\omega_{31} \omega_{23}] - \Omega_{12};
\end{aligned}
\right.
$$

les formes Π, Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} définissent la courbure de l'espace : ce sont des formes quadratiques extérieures en ω_1, ω_2, ω_3. Elles représentent une similitude infinitésimale associée à un cycle ponctuel infinitésimal de l'espace; cette similitude se décompose en une homothétie de rapport $1 + \Pi$ et une rotation de composantes covariantes Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12}. Si le cycle a la forme d'un parallélogramme partant d'un point M et dont les deux côtés ont pour projections sur les axes d'un des trièdres $\mathfrak{T}$ attachés au point M respectivement

$$
\begin{aligned}
&a_1, \quad a_2, \quad a_3,\\
&b_1, \quad b_2, \quad b_3,
\end{aligned}
$$

on obtient les formes Π, Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12} associées à ce parallélogramme en remplaçant respectivement les produits extérieurs

$$[\omega_2 \omega_3], \quad [\omega_3 \omega_1], \quad [\omega_1 \omega_2]$$

par

$$a_2 b_3 - b_2 a_3, \quad a_3 b_1 - b_3 a_1, \quad a_1 b_2 - b_1 a_2.$$

II. — Le tenseur de courbure d'un espace de Weyl de la classe considérée.

3. Un *plan isotrope* est une variété à deux dimensions caractérisée par les propriétés suivantes :

a. En chacun de ses points l'élément plan tangent est isotrope;

b. Lorsqu'on se déplace d'un point à un autre de la variété, la différentielle covariante de tout vecteur situé dans l'élément plan tangent est contenue dans cet élément plan.

Cela posé, l'équation linéaire en ω_1, ω_2, ω_3 qui définit l'élément plan tangent est de la forme

$$(3)\qquad (1 - t^2)\omega_1 + i(1 + t^2)\omega_2 + 2t\omega_3 = 0;$$

cet élément plan contient les deux vecteurs

$$\vec{e}_1 + i\vec{e}_2 + t\vec{e}_3 \qquad \text{et} \qquad t(\vec{e}_1 - i\vec{e}_2) - \vec{e}_3.$$

Une seule et même équation exprime la condition b; elle s'écrit

$$dt + \frac{1}{2} i(1-t^2)\omega_{23} - \frac{1}{2}(1+t^2)\omega_{31} + it\omega_{12} = 0. \tag{4}$$

L'espace admettra ∞^2 plans isotropes, c'est-à-dire dépendant de 2 paramètres *complexes*, si le système formé des équations (3) et (4) est complètement intégrable, de manière que par tout point de l'espace et tangentiellement à tout élément plan isotrope mené par ce point il passe un plan isotrope. On vérifie d'abord que l'équation (3), différentiée extérieurement, est une conséquence de (3) et de (4). Quant à l'équation (4), sa différentiation extérieure donne, en tenant compte de (2),

$$\frac{1}{2} i(1-t^2)\Omega_{23} - \frac{1}{2}(1+t^2)\Omega_{31} + it\Omega_{12} = 0. \tag{5}$$

Le système sera complètement intégrable si l'équation (5) est une conséquence de (3), c'est-à-dire si la forme cubique extérieure

$$\left[\left\{(1-t^2)\omega_1 + i(1+t^2)\omega_2 + 2t\omega_3\right\}\left\{(1-t^2)\Omega_{23} + i(1+t^2)\Omega_{31} + 2t\Omega_{12}\right\}\right]$$

est identiquement nulle. Cela donne, en annulant les coefficients des différentes puissances de t, les cinq relations

$$\left\{\begin{aligned} &[\omega_1\Omega_{23}] = [\omega_2\Omega_{31}] = [\omega_3\Omega_{12}],\\ &[\omega_2\Omega_{12}] + [\omega_3\Omega_{31}] = 0,\\ &[\omega_3\Omega_{23}] + [\omega_1\Omega_{12}] = 0,\\ &[\omega_1\Omega_{31}] + [\omega_2\Omega_{23}] = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Elles expriment que dans le tableau des coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$ dans Ω_{23}, Ω_{31}, Ω_{12}, les éléments de la diagonale principale sont tous égaux entre eux et que les éléments symétriques par rapport à la diagonale principale sont égaux et opposés. Nous poserons

$$\left\{\begin{aligned} \Omega_{23} &= K[\omega_2\omega_3] - H_3[\omega_3\omega_1] + H_2[\omega_1\omega_2],\\ \Omega_{31} &= H_3[\omega_2\omega_3] + K[\omega_3\omega_1] - H_1[\omega_1\omega_2],\\ \Omega_{12} &= -H_2[\omega_2\omega_3] + H_1[\omega_3\omega_1] + K[\omega_1\omega_2]. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Quant à la forme Π, elle résulte de l'application des relations

$$\begin{aligned} &[\omega_1\Pi] - [\omega_2\Omega_{12}] + [\omega_3\Omega_{31}] = 0,\\ &[\omega_2\Pi] - [\omega_3\Omega_{23}] + [\omega_1\Omega_{12}] = 0,\\ &[\omega_3\Pi] - [\omega_1\Omega_{31}] + [\omega_2\Omega_{23}] = 0, \end{aligned}$$

résultant elles-mêmes de la différentiation extérieure des trois premières équations (2). On en déduit facilement [6]

$$\Pi = 2H_1[\omega_2\omega_3] + 2H_2[\omega_3\omega_1] + 2H_3[\omega_1\omega_2]. \tag{8}$$

---

[6] Si l'espace de Weyl considéré est riemannien, les coefficients H_1, H_2, H_3 sont nuls et les équations (7) montrent qu'il est à courbure constante. On sait alors que par tout point et tangentiellement à tout élément plan issu de ce point il passe une surface totalement géodésique (plan); l'existence, dans un espace riemannien, de ∞^2 plans *isotropes* entraîne donc l'existence de ∞^3 plans.

4. Les identités de Bianchi proprement dites résultent de la différentiation extérieure des quatre dernières équations (2); on a

$$
(9)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&H' = 0,\\
&\Omega'_{23} + [\Omega_{12}\omega_{31}] - [\Omega_{31}\omega_{12}] = 0,\\
&\Omega'_{31} + [\Omega_{23}\omega_{12}] - [\Omega_{12}\omega_{23}] = 0,\\
&\Omega'_{12} + [\Omega_{31}\omega_{23}] - [\Omega_{23}\omega_{31}] = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

elles s'expriment très simplement sous la forme

$$
(10)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0,\\
&K_1 - H_{32} + H_{23} = 0,\\
&K_2 - H_{13} + H_{31} = 0,\\
&K_3 - H_{21} + H_{12} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Les quantités K_1, K_2, K_3 sont les trois premières dérivées covariantes de K; quant à la quantité H_{ij}, elle désigne la $j^{\text{ième}}$ dérivée covariante de H_i. On a du reste, comme cela résulte du calcul effectif des trois dernières relations (9),

$$
(11)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&DK \equiv dK - 2K\varpi = K_1\omega_1 + K_2\omega_2 + K_3\omega_3,\\
&DH_1 \equiv dH_1 - 2H_1\varpi - H_2\omega_{12} + H_3\omega_{31} = H_{11}\omega_1 + H_{12}\omega_2 + H_{13}\omega_3,\\
&DH_2 \equiv dH_2 - 2H_2\varpi - H_3\omega_{23} + H_1\omega_{12} = H_{21}\omega_1 + H_{22}\omega_2 + H_{23}\omega_3,\\
&DH_3 \equiv dH_3 - 2H_3\varpi - H_1\omega_{31} + H_2\omega_{23} = H_{31}\omega_1 + H_{32}\omega_2 + H_{33}\omega_3.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous poserons

$$
\begin{gathered}
H_{23} + H_{32} = L_1,\\
H_{31} + H_{13} = L_2,\\
H_{12} + H_{21} = L_3,\\
H_{11} = M_1,\qquad H_{22} = M_2,\qquad H_{33} = M_3,
\end{gathered}
$$

de sorte que les équations (11) s'écrivent, en tenant compte de (10),

$$
(12)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&DH_1 \equiv dH_1 - 2H_1\varpi - H_2\omega_{12} + H_3\omega_{31} = M_1\omega_1 + \frac{1}{2}(L_3 - K_3)\omega_2 + \frac{1}{2}(L_2 + K_2)\omega_3,\\
&DH_2 \equiv dH_2 - 2H_2\varpi - H_3\omega_{23} + H_1\omega_{12} = \frac{1}{2}(L_3 + K_3)\omega_1 + M_2\omega_2 + \frac{1}{2}(L_1 - K_1)\omega_3,\\
&DH_3 \equiv dH_3 - 2H_3\varpi - H_1\omega_{31} + H_2\omega_{23} = \frac{1}{2}(L_2 - K_2)\omega_1 + \frac{1}{2}(L_1 + K_1)\omega_2 + M_3\omega_3,
\end{aligned}
\right.
$$

avec, comme conséquence de la première équation (10),

$$
(13)\qquad M_1 + M_2 + M_3 = 0.
$$

Si nous différentions enfin extérieurement la première équation (11), nous obtenons

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&DK_1 \equiv dK_1 - 3K_1\varpi - K_2\omega_{12} + K_3\omega_{31} = K_{11}\omega_1 + K_{12}\omega_2 + K_{13}\omega_3,\\
&DK_2 \equiv dK_2 - 3K_2\varpi - K_3\omega_{23} + K_1\omega_{12} = K_{21}\omega_1 + K_{22}\omega_2 + K_{23}\omega_3,\\
&DK_3 \equiv dK_3 - 3K_3\varpi - K_1\omega_{31} + K_2\omega_{23} = K_{31}\omega_1 + K_{32}\omega_2 + K_{33}\omega_3,
\end{aligned}
\right.
$$

avec les relations

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} K_{32}-K_{23}&=4KH_1,\\ K_{13}-K_{31}&=4KH_2,\\ K_{21}-K_{12}&=4KH_3.\end{aligned}\right.$$

Nous poserons

$$(16)\qquad \left\{\begin{array}{lll} K_{11}=P_1, & K_{22}=P_2, & K_{33}=P_3;\\ K_{23}=Q_1-2KH_1, & K_{31}=Q_2-2KH_2, & K_{12}=Q_3-2KH_3,\\ K_{32}=Q_1+2KH_1, & K_{13}=Q_2+2KH_2, & K_{21}=Q_3+2KH_3.\end{array}\right.$$

5. Les sept fonctions K, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 dépendent des sept paramètres, tant principaux que secondaires, des trièdres introduits dans l'espace; ce sont des *fonctions de trièdre*. En général elles sont indépendantes ([7]). Plaçons-nous dans ce cas. Il en sera ainsi si le déterminant des coefficients de ω_1, ω_2, ω_3, ϖ, ω_{23}, ω_{31}, ω_{12} dans les expressions des différentielles (ordinaires) de ces sept fonctions, est différent de zéro, déterminant qu'il est inutile de former.

Les quantités nouvelles qui s'introduisent dans ce tableau, et qui ne sont autres que les dérivées premières covariantes de ces sept fonctions, sont, d'après (12) et (14),

$$M_1,\quad M_2,\quad M_3,\quad L_1,\quad L_2,\quad L_3,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3;$$

ces quantités sont du reste liées par la relation (13); elles sont donc seulement au nombre de 11.

III. — Degré de généralité des espaces de Weyl de la classe considérée.

6. La première équation (11), les trois équations (12) et les trois équations (14) permettent de calculer les 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij} comme formes linéaires en dK, dH_i, dK_i, avec coefficients dépendant en outre des quantités M_i, L_i, P_i, Q_i. Il en résulte que si pour deux espaces de Weyl de la classe donnée, les quantités M_i, L_i, P_i, Q_i sont les *mêmes* fonctions des 7 quantités K, H_i, K_i, les deux espaces de Weyl sont géométriquement identiques, la correspondance trièdre à trièdre étant donnée par l'égalité chacune à chacune des quantités K, H_i, K_i, du premier espace aux quantités de même nom du second.

Il résulte de là en particulier que l'espace de Weyl le plus général de la classe considérée s'obtiendra en choisissant de la manière la plus générale possible les fonctions M_i, L_i, P_i, Q_i des 7 arguments K, H_i, K_i. *Ces fonctions doivent satisfaire à l'unique condition que les différentielles extérieures des formes* ω_i, ϖ, ω_{ij}, *supposées exprimées avec les sept variables* K, H_i, K_i, *satisfassent aux équations* (2), (7) *et* (8).

([7]) Cette hypothèse exclut *en particulier* les espaces qui admettent un groupe continu de transformations en eux-mêmes.

Pour exprimer cette condition, il est beaucoup plus simple d'exprimer que les différentielles extérieures des sept équations qui donnent les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, c'est-à-dire de la première équation (11), des équations (12) et des équations (14), sont vérifiées quand on y remplace les différentielles extérieures ω'_i, ϖ', ω'_{ij} par leurs valeurs tirées de (2), (7) et (8). Il est évident que ce second procédé donne un résultat équivalent au premier. *Nous sommes donc en mesure de former le système différentiel auquel doivent satisfaire les fonctions* M_i, L_i, K_{ij} *des sept arguments* K, H_i, K_i; nous n'aurons qu'à rechercher ensuite le degré de généralité de la solution générale de ce système ([8]). *Ce sera le degré de généralité* ESSENTIEL *des espaces de Weyl de la classe considérée* ([9]).

7. Cela posé, le système différentiel cherché sera formé des équations quadratiques extérieures qui se déduisent par différentiation extérieure des équations (12) et (14), où l'on suppose les K_{ij} remplacées par leurs valeurs (16), et où l'on remplacera les ω'_i, ϖ', ω'_{ij} par leurs valeurs tirées de (2), (7) et (8).

Le calcul donne pour le système cherché les 6 équations

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned}
&[\omega_1 DM_1] + \frac{1}{2}[\omega_2 DL_3] + \frac{1}{2}[\omega_3 DL_2] + \left(4H_1^2 - H_2^2 - H_3^2 - \frac{1}{2}P_2 - \frac{1}{2}P_3\right)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + \left(5H_1H_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)[\omega_3\omega_1] + \left(5H_1H_3 + \frac{1}{2}Q_2\right)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&\frac{1}{2}[\omega_1 DL_3] + [\omega_2 DM_2] + \frac{1}{2}[\omega_3 DL_1] + \left(5H_1H_2 + \frac{1}{2}Q_3\right)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + \left(4H_2^2 - H_3^2 - H_1^2 - \frac{1}{2}P_3 - \frac{1}{2}P_1\right)[\omega_3\omega_1] + \left(5H_2H_3 + \frac{1}{2}Q_1\right)[\omega_1\omega_2] = 0, \\
&\frac{1}{2}[\omega_1 DL_2] + \frac{1}{2}[\omega_2 DL_1] + [\omega_3 DM_3] + \left(5H_3H_1 + \frac{1}{2}Q_2\right)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + \left(5H_2H_3 + \frac{1}{2}Q_1\right)[\omega_3\omega_1] + \left(4H_3^2 - H_1^2 - H_2^2 - \frac{1}{2}P_1 - \frac{1}{2}P_2\right)[\omega_1\omega_2] = 0;
\end{aligned}\right.$$

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
&[\omega_1 DP_1] + [\omega_2 DQ_3] + [\omega_3 DQ_2] + (6K_1H_1 - 3K_2H_2 - 3K_3H_3 + 2KM_1)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + (8K_1H_2 + K_2H_1 + KL_3)[\omega_3\omega_1] + (8K_1H_3 + K_3H_1 + KL_2)[\omega_1\omega_2] = . \\
&[\omega_1 DQ_3] + [\omega_2 DP_2] + [\omega_3 DQ_1] + (8K_2H_1 + K_1H_2 + KL_3)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + (6K_2H_2 - 3K_3H_3 - 3K_1H_1 + 2KM_2)[\omega_3\omega_1] + (8K_2H_3 + K_3H_2 + KL_1)[\omega_1\omega_2] = 00 \\
&[\omega_1 DQ_2] + [\omega_2 DQ_1] + [\omega_3 DP_3] + (8K_3H_1 + K_1H_3 + KL_2)[\omega_2\omega_3] \\
&\qquad + (8K_3H_2 + K_2H_3 + KL_1)[\omega_1\omega_2] + (6K_3H_3 - 3K_1H_1 - 3K_2H_2 + 2KM_3)[\omega_1\omega_2] = 0.
\end{aligned}\right.$$

([8]) Il importe de remarquer que si les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} tirées de la première équation (11) et des équations (12) et (14) satisfont aux relations (2), (7) et (8), les différentielles extérieures des ω'_i, ϖ', et ω'_{ij} sont identiquement nulles, car les relations (9) expriment précisément qu'il en est ainsi et les équations (12) et (14) sont des conséquences des équations (9). Cette remarque sera utilisée au nº 8.

([9]) Il est essentiel parce qu'à deux solutions distinctes du système correspondent deux espaces de Weyl non géométriquement identiques, tandis que si l'on cherchait le degré de généralité des coefficients des formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, *quand on part d'un système de coordonnées arbitrairement donné*, il n'en serait plus de même.

On a posé, pour abréger,

$$(19)\quad \begin{cases} DM_1 = dM_1 - 3M_1\varpi + L_2\omega_{31} - L_3\omega_{12}, \\ DL_1 = dL_1 - 3L_1\varpi + L_2\omega_{12} - L_3\omega_{31} + 2(M_2 - M_3)\omega_{23}, \\ DP_1 = dP_1 - 4P_1\varpi + 2Q_2\omega_{31} - 2Q_3\omega_{12}, \\ DQ_1 = dQ_1 - 4Q_1\varpi + Q_2\omega_{12} - Q_3\omega_{31} + (P_2 - P_3)\omega_{23}, \end{cases}$$

relations auxquelles il faudrait ajouter celles qui s'en déduisent par permutations circulaires des indices 1, 2, 3, et qu'il est inutile d'écrire.

Il y aurait lieu ensuite de remplacer, au moins par la pensée, dans les équations (17) et (18), et dans les relations (19), les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} par leurs valeurs tirées de la première équation (11) et des équations (12) et (14). Les équations (17) et (18) constitueraient alors le système différentiel cherché aux fonctions inconnues L_i, M_i, P_i, Q_i des 7 variables indépendantes K, H_i, K_i.

8. Conformément à la théorie des systèmes en involution, telle qu'elle a été généralisée par E. Kähler [10], il y aurait lieu d'ajouter aux équations (16) et (18) du système ces équations différentiées extérieurement. Mais comme ces équations proviennent d'une première différentiation extérieure des équations (12) et (14), une seconde différentiation extérieure ne donnerait rien de nouveau attendu que, comme on l'a fait remarquer plus haut [note [8]], la différentiation extérieure des formes ω'_i, ϖ', ω'_{ij} donne zéro. Le système (17), (18) est un système *fermé* par rapport à l'opération de la différentiation extérieure.

Cela posé nous allons maintenan chercher l'expression la plus générale des éléments intégraux à 7 dimensions du système (17), (18). On les obtiendra en exprimant les différentielles des 11 fonctions inconnues M_i, L_i, P_i, Q_i comme combinaisons linéaires des différentielles des 7 variables indépendantes K, H_i, K_i, ou, ce qui revient au même, des 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, et en écrivant que les expressions obtenues annulent identiquement les premiers membres des équations (17) et (18). Or on voit immédiatement que les formes DM_i, DL_i, DP_i, DQ_i, qui ne sont autres que les différentielles *absolues* ou *covariantes* des fonctions inconnues, ne dépendent linéairement que de ω_1, ω_2, ω_3. La multiplication extérieure par $[\omega_2\omega_3]$ de la première équation (17), par exemple, donne

$$[\omega_1\omega_2\omega_3 DM_1] = 0,$$

ce qui exprime la propriété de DM_1 de ne dépendre que de ω_1, ω_2, ω_3. Nous poserons

$$\begin{aligned} DM_i &= M_{i1}\omega_1 + M_{i2}\omega_2 + M_{i3}\omega_3, \\ DL_i &= L_{i1}\omega_1 + L_{i2}\omega_2 + L_{i3}\omega_3, \\ DP_i &= P_{i1}\omega_1 + P_{i2}\omega_2 + P_{i3}\omega_3, \\ DQ_i &= Q_{i1}\omega_1 + Q_{i2}\omega_2 + Q_{i3}\omega_3. \end{aligned}$$

[10] E. Kälher, *Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen* (*Hamburger Math. Einzelschriften*, 16, 1934).

En exprimant que les coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$ dans les premiers membres des équations (17) et (18) sont nuls, on trouve 18 équations donnant respectivement, au moyen des M_i, L_i, P_i, Q_i, K, K_i, H_i, les quantités

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{2}(L_{33}-L_{22}), & \frac{1}{2}L_{21}-M_{13}, & M_{12}-\frac{1}{2}L_{31}; \\
M_{23}-\frac{1}{2}L_{12}, & \frac{1}{2}(L_{11}-L_{33}), & \frac{1}{2}L_{32}-M_{21}, \\
\frac{1}{2}L_{13}-M_{32}, & M_{31}-\frac{1}{2}L_{23}, & \frac{1}{2}(L_{22}-L_{11}); \\
Q_{33}-Q_{22}, & Q_{21}-P_{13}, & P_{12}-Q_{31}; \\
P_{23}-Q_{12}, & Q_{11}-Q_{33}, & Q_{32}-P_{21}; \\
Q_{13}-P_{32}, & P_{31}-Q_{23}, & Q_{22}-Q_{11}.
\end{array}$$

Ces 18 expressions se réduisent à 16 indépendantes. La somme des coefficients de $[\omega_2\omega_3]$, $[\omega_3\omega_1]$, $[\omega_1\omega_2]$, pris respectivement dans la première, la seconde et la troisième équation (17), donne la relation

$$P_1+P_2+P_3=2(H_1^2+H_2^2+H_3^2); \tag{20}$$

l'opération analogue, effectuée sur l'équation (18), donne la relation (13).

Il ne reste donc en réalité que 10 fonctions inconnues, par exemple

$$M_1,\quad M_2;\quad L_1,\quad L_2,\quad L_3;\quad P_1,\quad P_2;\quad Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3; \tag{21}$$

on remplacera partout, dans les équations du système, M_3 par sa valeur tirée de (13) et P_3 par sa valeur tirée de (20).

Les 10 fonctions inconnues (21) admettent $10\times 3=30$ dérivées covariantes liées par 16 relations indépendantes, respectivement résolubles par rapport à

$$\begin{array}{llllllll}
L_{11}-L_{33}, & L_{22}-L_{33}, & L_{12}, & L_{23}, & L_{31}, & L_{21}, & L_{32}, & L_{13}; \\
Q_{11}-Q_{33}, & Q_{22}-Q_{33}, & Q_{12}, & Q_{23}, & Q_{31}, & Q_{21}, & Q_{32}, & Q_{13}.
\end{array}$$

On en conclut que *l'élément intégral à 7 dimensions le plus général dépend de* $30-16=14$ *paramètres arbitraires.*

9. Appliquons maintenant les principes de la théorie des systèmes en involution ([11]). Rangeons les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, combinaisons linéaires indépendantes des différentielles dK, dH_i, dK_i, dans l'ordre

$$\omega_1,\quad \omega_2,\quad \omega_3,\quad \varpi,\quad \omega_{23},\quad \omega_{31},\quad \omega_{12}. \tag{22}$$

Considérons un élément intégral linéaire E_1 annulant les 6 dernières formes de la suite (22) sans annuler la première, et formons les équations de *l'élément polaire* de E_1 (système polaire de E_1), qui expriment que l'élément linéaire

([11]) *Voir* en particulier, en dehors de l'ouvrage de E. Kähler ([10]), E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Chap. I (*Ann. Éc. Norm.*, 21, 1904, pp. 154-175).

$(\omega_i, \varpi, \omega_{ij}, dL_i, dM_i, dP_i, dQ_i)$ forme avec E_1 un élément intégral à 2 dimensions. Ces équations, abstraction faite des termes en ω_i, ϖ, ω_{ij} (équations réduites) sont au nombre de 6, à savoir

$$dM_1 = 0, \qquad dL_3 = 0, \qquad dL_2 = 0, \qquad dP_1 = 0, \qquad dQ_3 = 0, \qquad dQ_2 = 0;$$

nous désignons par σ_1 ce premier nombre.

Considérons maintenant un élément intégral à 2 dimensions E_2 contenant l'élément E_1, annulant les 5 dernières formes de la suite (22), mais sans établir de relation linéaire entre ω_1, ω_2; son système polaire réduit contiendra, outre les 6 équations précédentes du système polaire réduit de E_1, 4 équations (qui abstraction faite des termes en ω_i, ϖ, ω_{ij}) sont

$$dM_2 = 0, \qquad dL_1 = 0, \qquad dP_2 = 0, \qquad dQ_1 = 0;$$

nous désignerons par σ_2 le nombre 4 des équations nouvelles obtenues.

On peut continuer en considérant le système polaire réduit d'un élément intégral E_3 annulant les 4 dernières formes de la suite (22), sans établir de relation entre ω_1, ω_2, ω_3. Son système polaire réduit ne contiendra aucune équation nouvelle, et ainsi de suite. Nous poserons donc

$$\sigma_1 = 6, \qquad \sigma_2 = 4; \qquad \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_5 = \sigma_6 = \sigma_7 = 0.$$

D'après la théorie des systèmes en involution, il *suffit*, pour que le système différentiel soit en involution, que le nombre des paramètres arbitraires dont dépend l'élément intégral le plus général à 7 dimensions soit égal à

$$\sigma_1 + 2\sigma_2 + 3\sigma_3 + 4\sigma_4 + 5\sigma_5 + 6\sigma_6 + 7\sigma_7 = 6 + 2.4 = 14;$$

or c'est précisément ce que nous avons constaté; le système est donc en involution. De plus comme σ_2 est le dernier nombre σ_i qui ne soit pas nul et que sa valeur est 2, la solution générale du système dépend de $\sigma_2 = 4$ fonctions arbitraires de *deux* arguments. Les entiers σ_i sont les *caractères* du système.

Théorème. — *Les espaces de Weyl à trois dimensions qui admettent ∞^2 plans isotropes dépendent essentiellement de quatre fonctions arbitraires de deux arguments.*

IV. — Variétés régulières et variétés caractéristiques.

10. Si nous avions rangé dans un autre ordre les 7 formes ω_i, ϖ, ω_{ij}, nous aurions trouvé en général des entiers σ_i différents et le critère *suffisant* d'involution n'aurait pas pu être utilisé. D'une manière générale considérons un élément intégral à p dimensions, entraînant $7-p$ relations linéaires entre les formes ω_i, ϖ, ω_{ij}; cet élément sera dit régulier si le rang de son système polaire est égal à $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_p$, où les σ_i sont les caractères obtenus au numéro

précédent : c'est le cas général. Il sera dit *singulier* dans le cas contraire, le rang étant alors *inférieur* à $\sigma_1+\sigma_2+\ldots+\sigma_p$.

Comme dans aucun terme des premiers membres des équations (17) et (18) les différentielles dM_i, dL_i, dP_i, dQ_i ne figurent multipliées par ϖ, ω_{23}, ω_{31} ou ω_{12}, nous voyons que le rang du système polaire d'un élément intégral annulant ω_1, ω_2, ω_3 est toujours nul. On en déduit qu'*un élément intégral régulier ne peut jamais annuler les trois formes* ω_1, ω_2, ω_3, et cela quelle que soit la dimension de cet élément.

Un élément intégral à une dimension pour lequel les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} sont proportionnelles à des nombres donnés a_i, a, a_{ij} ne peut donc être régulier que si a_1, a_2, a_3 ne sont pas nuls tous les trois. Cette condition nécessaire est aussi suffisante pour que les équations réduites de son élément polaire, à savoir

$$(23)\qquad \left\{\begin{array}{l} 2a_1\,dM_1+a_2\,dL_3+a_3\,dL_2=0,\\ a_1\,dL_3+2a_2\,dM_2+a_3\,dL_1=0,\\ a_1\,dL_2+a_2\,dL_1-2a_3(dM_1+dM_2)=0,\\ a_1\,dP_1+a_2\,dQ_3+a_3\,dQ_2=0,\\ a_1\,dQ_3+a_2\,dP_2+a_3\,dQ_1=0,\\ a_1\,dQ_2+a_2\,dQ_1-a_3(dP_1+dP_2)=0,\end{array}\right.$$

soient de rang $\sigma_1=6$.

Un élément intégral qui n'entraîne aucune relation linéaire entre ω_1, ω_2, ω_3, quelle que soit sa dimension supérieure ou égale à 3, est toujours régulier, car il est évident que le rang de son système polaire est 10.

Considérons enfin un élément intégral entraînant une relation linéaire et une seule entre ω_1, ω_2, ω_3, soit $c_1\omega_1+c_2\omega_2+c_3\omega_3=0$. Il contiendra au moins deux éléments linéaires distincts, l'un pour lequel les ω_i sont proportionnels à des constantes a_i, l'autre pour lequel les ω_i sont proportionnels à des constantes b_i, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{a_2b_3-b_2a_3}{c_1}=\frac{a_3b_1-b_3a_1}{c_2}=\frac{a_1b_2-b_1a_2}{c_3}.$$

Le système polaire de l'élément sera formé par les équations (23) et 6 équations analogues où les a_i sont remplacés par les b_i. On démontre facilement que ces 12 équations entraînent

$$\frac{2\,dM_1}{c_1^2}=\frac{2\,dM_2}{c_2^2}=\frac{-2(dM_1+dM_2)}{c_3^2}=\frac{dL_1}{c_2c_3}=\frac{dL_2}{c_3c_1}=\frac{dL_3}{c_1c_2};$$
$$\frac{dP_1}{c_1^2}=\frac{dP_2}{c_2^2}=\frac{-(dP_1+dP_2)}{c_3^2}=\frac{dQ_1}{c_2c_3}=\frac{dQ_2}{c_3c_1}+\frac{dQ_3}{c_1c_2}.$$

Il en résulte l'annulation des dM_i, dL_i, dP_i, dQ_i si l'on n'a pas $c_1^2+c_2^2+c_3^2=0$; dans ce cas général le rang du système polaire est 10 et l'élément intégral est régulier. Il y a exception si l'on a $c_1^2+c_2^2+c_3^2=0$, car alors le rang du système polaire se réduit à 8. Dans ce dernier cas l'élément intégral considéré, envisagé du point de vue ponctuel dans l'espace de Weyl, est isotrope.

11. Étant donné un espace de Weyl $\mathcal{E}$ de la classe envisagée dans ce Mémoire, considérons l'espace des ∞^7 trièdres trirectangles attachés aux différents points de $\mathcal{E}$. Dans cet espace à 7 dimensions, une variété à $p < 7$ dimensions sera dite *régulière* si ses éléments tangents à p dimensions sont réguliers. D'après les résultats du numéro précédent les variétés régulières sont :

1° Les variétés à une dimension obtenue en prenant dans l'espace $\mathcal{E}$ une courbe analytique quelconque (C) et en attachant à chaque point de (C) un trièdre trirectangle suivant une loi analytique déterminée;

2° Les variétés à $p \geqq 2$ dimensions obtenues en prenant dans l'espace $\mathcal{E}$ une surface analytique (S) dont les plans tangents ne sont pas isotropes et en attachant à chaque point de S un trièdre trirectangle ou une famille de trièdres trirectangles suivant une loi analytique déterminée;

3° Les variétés à $p \geqq 3$ dimensions obtenues en prenant tous les points de l'espace $\mathcal{E}$ et en attachant à chacun d'eux un trièdre trirectangle ou une famille de trièdres trirectangles suivant une loi déterminée.

Une variété non régulière sera dite caractéristique.

Nous pouvons dire, en nous plaçant au seul point de vue ponctuel, que *dans l'espace de Weyl toutes les courbes et toutes les surfaces à plans tangents non isotropes sont des variétés régulières; les surfaces à plans tangents isotropes sont les seules variétés caractéristiques* ([12]).

V. — Le problème de Cauchy. Un théorème d'existence et d'unicité.

12. D'après la théorie des systèmes en involution, le fait que le dernier caractère non nul du système différentiel (17), (18) est σ_2 entraîne comme conséquence que *par toute variété intégrale régulière à deux dimensions de ce système il passe une variété intégrale à 7 dimensions et une seule*. Il en résulte que la connaissance d'une surface (S) à plans tangents non isotropes tracée dans un espace de Weyl de la classe que nous étudions entraîne la détermination de tout l'espace. Mais cela demande à être précisé.

Rappelons auparavant que toute surface plongée dans un espace de Weyl à trois dimensions possède trois formes fondamentales :

1° Une forme différentielle quadratique F qui représente le ds^2 de la surface quand on a fait choix en chacun de ses points d'une certaine unité de longueur;

([12]) Comme nous nous plaçons en principe dans le domaine réel, si la forme fondamentale de l'espace est définie, il n'existe en fait aucune variété caractéristique.

2° Une seconde forme différentielle quadratique Φ (seconde forme fondamentale) égale au produit scalaire $-d\vec{e_3}.d\vec{M}$, où $\vec{e_3}$ désigne en chaque point de (S) le vecteur normal à (S) et dont la longueur est l'unité de longueur attachée à ce point;

3° Une forme différentielle linéaire Ψ égale à la variation élémentaire relative de l'unité de longueur quand on passe d'un point à un point infiniment voisin.

Ces trois formes différentielles ne sont pas définies sans ambiguïté; si l'on change les unités de longueur, le rapport de la nouvelle unité de longueur à l'ancienne en chaque point étant une fonction de point λ, la forme F est multipliée par $\frac{1}{\lambda^2}$, la forme Φ par $\frac{1}{\lambda}$, et la forme Ψ s'augmente de la différentielle logarithmique $\frac{d\lambda}{\lambda}$.

Cela posé nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Étant données trois formes différentielles à deux variables u, v, les deux premières* F *et* Φ *quadratiques, la troisième* Ψ *linéaire, il existe un espace de Weyl et un seul appartenant à la classe des espaces de Weyl à* ∞^2 *plans isotropes, tel qu'on puisse plonger dans cet espace une surface admettant les trois formes fondamentales* F, Φ, Ψ.

13. Avant de démontrer le théorème qui présente sous une forme géométrique intuitive le problème de Cauchy relatif à la détermination des espaces de Weyl de la classe que nous étudions, faisons quelques remarques. D'abord la forme F, étant analytique, peut toujours, par un choix convenable des coordonnées curvilignes sur la surface, être mise sous la forme d'un multiple de du^2+dv^2, et comme F peut, par un choix convenable des unités de longueur aux différents points de l'espace, être divisée par un facteur positif arbitraire, nous pourrons supposer

$$F = du^2 + dv^2. \tag{24}$$

Nous poserons alors

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= A\,du^2 + 2B\,du\,dv + C\,dv^2,\\ \Psi &= p\,du + \quad q\,dv, \end{aligned}\right. \tag{25}$$

A, B, C, p, q étant cinq fonctions analytiques de u, v.

La forme de F montre que si la surface (S) appartient à un espace de Weyl $\mathcal{E}$ de la classe considérée, on pourra attacher à chaque point de (S) un trièdre trirectangle et un seul de telle manière qu'on ait

$$\omega_1 = du, \qquad \omega_2 = dv, \qquad \omega_3 = 0. \tag{26}$$

On aura ensuite

$$\varpi = p\,du + q\,dv. \tag{27}$$

La forme Φ de son côté va nous permettre de calculer ω_{13} et ω_{23}. En effet l'équation $\omega_3 = 0$ entraîne, d'après (2),

$$[du\,\omega_{13}] + [dv\,\omega_{23}] = 0,$$

et, d'autre part, on a

$$\Phi = -\,D\vec{e}_3\,D\vec{M} = du\,\omega_{13} + dv\,\omega_{23},$$

d'où résulte immédiatement

$$\omega_{13} = A\,du + B\,dv, \qquad \omega_{23} = B\,du + C\,dv. \tag{28}$$

Reste enfin à calculer ω_{12}. Les deux premières équations (2) nous donnent

$$\begin{aligned} q[du\,dv] - [dv\,\omega_{12}] &= 0,\\ -\,p[du\,dv] + [du\,\omega_{12}] &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\omega_{12} = -\,q\,du + p\,dv. \tag{29}$$

Les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} sont donc connues en tout point de (S) et quand on se déplace le long de (S). Nous allons voir que les quantités K, H_i, K_i, M_i, L_i, P_i, Q_i sont également déterminées sur la surface (S).

14. Les relations (2), (7) et (8) nous donnent facilement

$$\left\{\begin{aligned} K &= -(p_u + q_v) + B^2 - AC,\\ H_1 &= A_v - B_u - pB - qC,\\ H_2 &= B_v - C_u + pA + qB,\\ H_3 &= \frac{1}{2}(p_v - q_u). \end{aligned}\right. \tag{30}$$

La première équation (11) et les équations (12) donnent ensuite

$$\left\{\begin{aligned} K_1 &= K_u - 2pK,\\ K_2 &= K_v - 2qK,\\ K_3 &= (H_2)_u - (H_1)_v - pH_2 + qH_1,\\ L_1 &= 2(H_3)_v - K_u + 2pK + 2BH_1 + 2CH_2 - 4qH_3,\\ L_2 &= 2(H_3)_u + K_v - 2qK + 2AH_1 + 2BH_2 - 4pH_3,\\ L_3 &= (H_2)_u + (H_1)_v - 3pH_2 - 3qH_1 - 2BH_3,\\ M_1 &= (H_1)_u - 2pH_1 + qH_2 - AH_3,\\ M_2 &= (H_2)_v - 2qH_2 + pH_1 - CH_3. \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Enfin les équations (14) donnent

$$
(32)\quad \left\{
\begin{aligned}
P_1 &= (K_1)_u - 3pK_1 + qK_2 - AK_3,\\
P_2 &= (K_2)_v - 3qK_2 + pK_1 - CK_3,\\
Q_1 &= (K_3)_v - 3qK_3 + BK_1 + CK_2 - 2KH_1,\\
Q_2 &= (K_3)_u - 3pK_3 + AK_1 + BK_2 + 2KH_2,\\
Q_3 &= \frac{1}{2}(K_1)_v + \frac{1}{2}(K_2)_u - 2qK_1 - 2pK_2 - BK_3.
\end{aligned}
\right.
$$

On a donc effectivement obtenu les valeurs sur la surface (S) des 17 fonctions

$$
\begin{gathered}
K;\quad H_1,\quad H_2,\quad H_3;\quad K_1,\quad K_2,\quad K_3;\\
M_1,\quad M_2;\quad L_1,\quad L_2,\quad L_3;\quad P_1,\quad P_2;\quad Q_1,\quad Q_2,\quad Q_3.
\end{gathered}
$$

Les quatre premières font intervenir les fonctions A, B, C, p, q, et leurs dérivées partielles du premier ordre, les huit suivantes font en outre intervenir leurs dérivées du second ordre et les cinq dernières leurs dérivées du troisième ordre.

Les équations (12), (14) étant vérifiées quand on y fait $\omega_3 = 0$, les différentielles extérieures de ces équations seront encore vérifiées dans les mêmes conditions. Autrement dit les relations qui existent entre les 17 fonctions K, H_i, K_i, M_i, L_i, P_i, Q_i constituent une solution à deux dimensions *régulière* du système différentiel (17), (18), et par suite il existe bien un espace de Weyl de la classe étudiée, contenant une surface dont les formes fondamentales sont les formes données F, Φ, Ψ.

Il y a cependant une restriction. Nous avons supposé que dans l'espace de Weyl les 7 fonctions K, H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 étaient indépendantes, autrement dit que le déterminant Δ des coefficients des ω_i, ϖ, ω_{ij} dans leurs 7 différentielles était différent de zéro. Il est donc nécessaire de supposer que ce déterminant, construit d'une manière connue avec les fonctions A, B, C, p, q de u et de v et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres, est différent de zéro. Ce n'est qu'à cette condition que l'on pourra tirer sans ambiguïté de la première relation (13) et des 6 relations (12) et (14) les formes ω_i, ϖ, ω_{ij} exprimées en fonction linéaire des dK, dH_i, dK_i. Nous sommes sûrs d'avance, il est vrai, que ces équations sont vérifiées pour les valeurs (24), (27), (28) et (29) de ces formes, mais il ne faut pas qu'il y ait d'autres solutions.

Le théorème énoncé au n° 12 est donc démontré, sous la réserve qu'un certain déterminant construit avec les coefficients A, B, C, p, q *des formes fondamentales données et leurs dérivées partielles des trois premiers ordres ne soit pas nul.*

15. Les formes différentielles données F, Φ, Ψ introduisent *cinq* fonctions analytiques arbitraires de deux variables u, v, à savoir A, B, C, p, q. Il semble donc à première vue que les espaces de Weyl de la classe étudiée dépendent de cinq fonctions arbitraires de deux arguments. Mais il ne faut pas oublier que

chacun de ces espaces peut être déterminé par une infinité de surfaces distinctes, infinité dépendant d'une fonction arbitraire de deux variables, de sorte qu'il est vraisemblable que les espaces dépendent essentiellement de quatre fonctions arbitraires seulement, conformément aux résultats trouvés *a priori* au n° 9. On peut du reste choisir les formes fondamentales F et Φ de manière à correspondre à une *surface minima* par exemple. Dans tout espace de Weyl il existe en effet une infinité de surfaces minima, c'est-à-dire dont les courbures principales en chaque point (définies chacune à un facteur près suivant l'unité de longueur choisie en ce point) sont égales et opposées; ces surfaces, comme dans l'espace ordinaire, dépendent de deux fonctions arbitraires d'une variable. Elles correspondent, avec le choix fait plus haut des formes fondamentales, à $C = -A$; les données correspondantes ne dépendent plus que de quatre fonctions arbitraires de deux variables. Le même espace est encore obtenu, il est vrai, une infinité de fois, mais cette infinité ne dépend que de fonctions arbitraires d'un seul argument.

16. Il ne sera pas mauvais de préciser enfin le caractère d'*unicité* de la solution de Cauchy qui fait l'objet du théorème du n° 12. La donnée des trois formes fondamentales F, Φ, Ψ, d'après ce théorème, détermine un espace de Weyl de la classe étudiée et un seul. Cela veut dire que si l'on considère deux espaces de Weyl dans chacun desquels on peut trouver une surface admettant les trois formes fondamentales données, les mêmes relations existent, dans ces deux espaces, entre les variables indépendantes K, H_i, K_i et les fonctions inconnues M_i, L_i, P_i, Q_i. Autrement dit on peut établir entre les trièdres trirectangles attachés aux deux espaces une correspondance biunivoque entraînant l'égalité chacune à chacune des formes ω_i, ϖ, ω_{ij} des deux espaces, qui ont ainsi les mêmes propriétés géométriques, ou, comme on dit, sont applicables l'un sur l'autre. Remarquons que ce caractère d'unicité est lié à la propriété du système différentiel (17), (18) que son dernier caractère différent de zéro soit σ_2 et non σ_3. Cette particularité ne se présenterait plus si l'on cherchait par exemple les espaces riemanniens susceptibles de contenir une surface dont les deux formes fondamentales soient données à l'avance, car les espaces riemanniens les plus généraux à trois dimensions dépendent de trois fonctions arbitraires de trois arguments ($\sigma_3 = 3$).