ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUELINE FERRAND

Étude de la représentation conforme au voisinage de la frontière (suite et fin)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 75-106

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__75_0>

ÉTUDE

DE

LA REPRÉSENTATION CONFORME

AU VOISINAGE DE LA FRONTIÈRE

PAR M^lle^ JACQUELINE FERRAND

(*suite et fin.*)

CHAPITRE III.

ÉTUDE LOCALE DIRECTE DE LA REPRÉSENTATION.

28. Nous allons passer à l'étude locale directe et géométrique de la représentation conforme au voisinage d'un point accessible α de la frontière Γ du domaine Δ. Par deux transformations homographiques sur les variables z et ζ respectivement, nous pouvons nous ramener au cas où le point α et son correspondant a sur la frontière $y'y$ de D sont à l'infini. Soit $\zeta = f(z)$ la fonction représentant D sur Δ et $z = \varphi(\zeta)$ la fonction inverse. Le bout premier $E(\infty)$ contient, en général, outre le point accessible α à l'infini, un continu de points accessoires inaccessibles. Remarquons que le point $\zeta = \infty$ peut être multiple et appartenir à d'autres bouts premiers : le point α est déterminé par ses voisinages topologiques, images des voisinages de a.

La méthode que nous employons suppose connus les principaux résultats relatifs à la mesure conforme.

DÉFINITION. — *Soit ζ_0 un point intérieur au domaine Δ, γ un ensemble de points, ou, plus exactement, de bouts premiers de la frontière Γ de Δ. Si, dans la représentation conforme de Δ sur le cercle $C(|w| \leqq 1)$ effectuée de manière qu'à ζ_0 corresponde le point $w = 0$, l'ensemble γ a pour correspondant un ensemble k de* *la circonférence* $K(|w|=1)$ *mesurable et de mesure* μ, *nous dirons que* μ *est la* mesure conforme [1] *de* γ *vu de* ζ_0 *dans* Δ, *soit* $\mu = m(\zeta_0, \gamma, \Delta)$.

La mesure conforme est un invariant dans toute représentation conforme. Il est évident, par une transformation homographique sur la variable w, que, si γ est mesurable par rapport à un point ζ_0 de Δ, il est mesurable par rapport à tout point intérieur à Δ.

Si $\bar{\gamma}$ est le complémentaire par rapport à Γ de l'ensemble γ,

$$m(\zeta_0, \bar{\gamma}, \Delta) = 2\pi - m(\zeta_0, \gamma, \Delta).$$

Si l'on représente Δ sur le demi-plan droit $D(x>0)$ et si l'on prend pour γ l'ensemble de bouts de Γ qui correspond à un segment $a'a$ de l'axe $y'y$, γ est mesurable dans Δ et l'on a

$$m(\zeta, \gamma, \Delta) = 2\left|\operatorname{Arg}\frac{z-a}{z-a'}\right|,$$

z et ζ étant deux points correspondants dans D et Δ.

Première inégalité. — *Principe de l'agrandissement du domaine* [2]. *Si* Δ' *est un domaine contenant* Δ *dont la frontière* Γ' *a en commun avec* Γ *un ensemble* γ *mesurable dans* Δ', *alors l'ensemble* γ *est mesurable dans* Δ *et l'on a*

$$m(\zeta, \gamma, \Delta) \leqq m(\zeta, \gamma, \Delta') \qquad (\zeta \text{ intérieur à } \Delta). \tag{26}$$

Deuxième inégalité [3]. — *Si* Δ *est un domaine simplement connexe ne contenant pas à son intérieur le point* $\zeta=\infty$, γ *un ensemble mesurable dans* Δ *de points frontières de* Δ *contenus dans le cercle* $\Omega(|\zeta|\leqq\delta)$, *et* ζ_0 *un point quelconque de* Δ *tel que* $|\zeta|=\rho>\delta$, *on a*

$$m(\zeta_0, \gamma, \Delta) \leqq 8 \operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\delta}{\rho}} < 8\sqrt{\frac{\delta}{\rho}} < 4\pi\sqrt{\frac{\delta}{\rho}}, \tag{27}$$

l'égalité n'ayant lieu que si Δ *est constitué par la portion de plan extérieure au cercle* Ω, *coupée suivant la demi-droite* $\operatorname{Arg}\zeta = \operatorname{Arg}\zeta_0 + \pi$, γ *étant identique, à un ensemble de mesure nulle près, à la circonférence limitant* Ω.

29. Donnons tout d'abord une application du premier principe.

Lemme I. — *Si le domaine* Δ *contient au point* $\alpha=\infty$ *un secteur d'accessibilité* S_0 *d'ouverture* $2\omega>0$, *défini par* $|\zeta|>R_0$, $|\operatorname{Arg}\zeta|<\omega$ *et si* ζ *s'éloigne à l'infini à*

---

[1] La mesure harmonique (R. Nevanlinna *[1], p. 37) est le quotient par 2π de la mesure conforme, appelée aussi angle conforme.

[2] Le premier énoncé de ce principe (dans le cas où γ est un arc de frontière) se trouve dans le Mémoire de M. P. Montel *[1], en note, p. 31. Pour des références plus détaillées, *voir* R. Nevanlinna *[1], p. 63.

[3] M. Ostrowski *[1], p. 430, déduit cette inégalité d'un théorème de Milloux-Schmidt-Nevanlinna, donnant la solution du problème de Carleman-Milloux. (*Voir* R. Nevanlinna *[1], p. 96.)

l'intérieur d'un angle $|\operatorname{Arg}\zeta| < \omega - \varepsilon$, *on a*

$$\overline{\lim}\,|\operatorname{Arg}\varphi(\zeta)| < \frac{\pi - \varepsilon}{2}. \tag{28}$$

Démonstration. — On peut supposer, ce que nous ferons souvent, que $\zeta = 0$ est un point accessible de la frontière Γ de Δ qui a pour correspondant $z = 0$, sinon on s'y ramènerait par des translations.

Soit ζ un point intérieur au secteur S_0, et $z = \varphi(\zeta)$ son correspondant dans D (*fig.* 4). Désignons par β le premier point de rencontre de la demi-droite Ou ($\operatorname{Arg}\zeta = \omega$) avec Γ lorsqu'on va du point $\beta_0 = R_0 e^{i\omega}$ intérieur à Δ vers le point frontière $\zeta = 0$; β est un point frontière accessible de Δ, soit b son correspondant sur $y'y$, et inversement soient γ^+ et γ^- les branches complémentaires de frontières de Δ, déterminées par leur voisinage, correspondant respectivement aux demi-droites by, by',

$$m(\zeta, \gamma^+, \Delta) = 2\left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(z - b)\right].$$

Considérons la fonction harmonique $m_1(\zeta)$ définie dans le domaine Δ_0 constitué par le plan de ζ coupé suivant la demi-droite indéfinie βu (d'argument ω), par ses valeurs :

$m_1 = 2\pi$, si ζ est sur le côté δ^- de la coupure tourné vers l'intérieur de S_0 (d'argument $\omega - 0$);

$m_1 = 0$, si ζ est sur le côté δ^+ de la coupure tourné vers l'extérieur de S_0 (d'argument $\omega + 0$);

$m_1(\zeta)$ est la mesure conforme de δ^- vu du point ζ dans Δ_0. Sur δ^- on a $m_1 \geqq m$, car $m \leqq 2\pi$; sur $\overline{\gamma}$ on a $m_1 \geqq m$, car $m = 0$. Donc en tout point ζ du domaine Δ_1

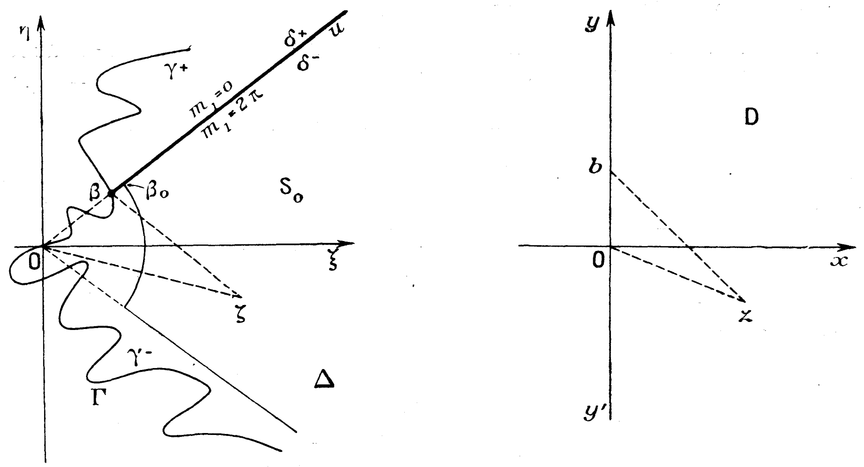

Fig. 4.

simplement connexe intérieur à la fois à Δ et Δ_0, limité par $\overline{\gamma}$ et βu, et par conséquent en tout point du secteur S_0,

$$m_1(\zeta) \geqq m(\zeta, \gamma^+, \Delta),$$

$m_1(\zeta)$ s'évalue facilement, si l'on représente Δ_0 sur un demi-plan au moyen de la fonction $Z = \sqrt{\zeta - \beta}$,

$$m_1(\zeta) = 2\pi - \omega + \operatorname{Arg}(\zeta - \beta).$$

Si ζ tend vers $\alpha = \infty$, $z = \varphi(\zeta)$ tend vers l'infini. b et β restant fixes,

$$\operatorname{Arg}(z - b) - \operatorname{Arg} z \to 0, \qquad \operatorname{Arg}(\zeta - \beta) - \operatorname{Arg}\zeta \to 0.$$

De l'inégalité

$$\operatorname{Arg}(\zeta - \beta) + 2\pi - \omega \geqq 2 \operatorname{Arg}(z - b) + \pi,$$

on déduit à la limite

$$\overline{\lim}\left(\operatorname{Arg} z - \frac{1}{2}\operatorname{Arg}\zeta\right) < \frac{\pi - \omega}{2},$$

et si $\operatorname{Arg}\zeta < \omega - \varepsilon$,

$$\overline{\lim}\operatorname{Arg} z < \frac{\pi - \varepsilon}{2}.$$

On démontrerait de même que si $\zeta \to \infty$ dans le domaine

$$\operatorname{Arg}\zeta > -\omega + \varepsilon,$$

on a

$$\underline{\lim}\operatorname{Arg} z > \frac{\varepsilon - \pi}{2},$$

d'où, au total, l'inégalité annoncée.

Remarquons, puisqu'il s'agit d'une limitation asymptotique, qu'il suffirait de supposer que Δ contient le secteur S_η

$$|\zeta| > R_\eta, \quad |\operatorname{Arg}\zeta| < \omega - \eta,$$

η étant aussi petit que l'on veut pourvu que R_η soit assez grand; on dit alors que $\alpha = \infty$ est accessible par un angle d'ouverture 2ω.

Ce lemme nous a servi [1] à montrer que si α est angulairement accessible dans Δ, la fonction $\zeta = f(z)$ a pour limite angulaire unique $\alpha = \infty$; en effet, à un chemin Λ aboutissant en α dans un angle $|\operatorname{Arg}\zeta| < \omega - \varepsilon$, correspond dans D un chemin L allant à l'infini dans l'angle $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi - \varepsilon}{2}$ sur lequel $f(z)$ a pour limite $\alpha = \infty$. La proposition résulte alors d'un théorème de M. Montel *[1, p. 19]. Mais nous avons vu (Chap. II, § 20) qu'il n'était pas nécessaire que L soit contenu dans un angle d'approximation et qu'il suffisait que α soit accessible pour être la limite angulaire unique de $f(z)$.

La conservation des angles.

30. *Définitions.* — Nous dirons que la représentation $\zeta = f(z)$ de D sur Δ est *semi-conforme* au point α à l'infini si le long de tout arc de Jordan s'éloignant

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 977.

à l'infini dans une direction d'argument déterminé ψ, $\operatorname{Arg} f(z)$ a une limite θ satisfaisant à

$$\theta = \lambda\psi + \mu \qquad (\lambda, \mu \text{ const.}).$$

Si $\lambda = 1$, la transformation conserve l'angle de deux courbes à l'infini. Si $\lambda \neq 1$, elle le multiplie par le facteur λ.

Nous réserverons le mot de *conforme* pour le cas où il existe une limite c finie et non nulle du rapport $\frac{f(z)}{z}$ lorsque z tend vers l'infini dans un angle $|\operatorname{Arg} z| < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ Cette limite est la *dérivée angulaire* de $f(z)$. Le domaine Δ est alors dit *valable* au point $\alpha = \infty$. Plus généralement nous dirons que Δ est *valable sur un angle d'ouverture* $\lambda\pi$ si le rapport $\frac{f(z)}{z^\lambda}$ a une limite c $(0 < c < \infty)$ lorsque z tend vers l'infini angulairement : il en résulte que $\operatorname{Arg} f(z) - \lambda \operatorname{Arg} z$ a une limite, donc que la représentation est semi-conforme. La réciproque n'est pas vraie.

Théorème. — Il revient à M. Ostrowski *[1, p. 447], d'avoir trouvé la condition nécessaire et suffisante que doit remplir le domaine Δ pour que sa représentation soit semi-conforme à l'infini, à savoir que :

1° *Il existe un intervalle* θ_1, θ_2 *tel que* Δ *contienne les secteurs* S_ε

$$\theta_1 + \varepsilon < \operatorname{Arg} \zeta < \theta_2 - \varepsilon, \qquad |\zeta| > R_\varepsilon,$$

ε *étant aussi petit que l'on veut pourvu que* R_ε *soit assez grand.*

2° *Il existe sur la frontière de* Δ *deux suites de points telles que*

$$(29) \qquad \begin{cases} \zeta_\nu \to \infty, & \operatorname{Arg} \zeta_\nu \to \theta_1, & \dfrac{\zeta_{\nu+1}}{\zeta_\nu} \to 1\,; \\ \zeta'_\nu \to \infty, & \operatorname{Arg} \zeta'_\nu \to \theta_2, & \dfrac{\zeta'_{\nu+1}}{\zeta'_\nu} \to 1. \end{cases}$$

Alors on a semi-conformité avec

$$\theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} + \frac{\theta_2 - \theta_1}{\pi}\psi.$$

La démonstration de M. Ostrowski ([1]) est une très belle application de la mesure conforme. Le principe, au moins, en est simple et nous a servi de point de départ pour l'étude de cas plus complexes. Nous allons cependant essayer d'en donner ici une démonstration plus intuitive fondée sur une méthode de M. Montel *[1, p. 6].

([1]) Une autre démonstration de ce théorème, basée sur l'intégrale de Dirichl et et, à notre avis, moins directe, a été donnée par M. Caleb Gattegno dans le *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 1938, Ire Partie, p. 12.

31. *Démonstration.* — S'il y a semi-conformité de la représentation au point α avec $\theta = \lambda\psi + \mu$, nous pouvons toujours nous ramener par la transformation $\zeta' = (\zeta e^{-i\mu})^{\frac{\pi}{\lambda}}$ au cas $\lambda = 1$, $\mu = 0$. Alors le domaine (que nous désignerons encore par Δ) doit contenir les secteurs S_ε

$$|\operatorname{Arg}\zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon, \qquad |\zeta| > R_\varepsilon.$$

Nous supposerons aussi que $\zeta = 0$ est un point frontière accessible de Δ et correspond à $z = 0$ (ou s'y ramène par des translations). Soit $\zeta = f(z)$, $z = \varphi(\zeta)$ la représentation de D sur Δ et de Δ sur D.

Posons

$$\varphi_R(\zeta) = \frac{\varphi(R\zeta)}{|\varphi(R)|} \qquad (R = \text{const. positive}).$$

C'est une fonction univalente qui représente sur D le domaine Δ_R homothétique de Δ par rapport à l'origine dans le rapport $\frac{1}{R}$; si $\zeta \to 0$, $\varphi_R(\zeta) \to 0$; si $\zeta \to \infty$, $\varphi_R(\zeta) \to \infty$; enfin $|\varphi_R(1)| = 1$.

Montrons d'abord que *la condition nécessaire et suffisante pour que la représentation soit semi-conforme à l'infini est que, quel que soit ζ fixé tel que* $|\operatorname{Arg}\zeta| < \frac{\pi}{2}$,

$$\varphi_R(\zeta) \to \zeta, \qquad \text{lorsque} \quad R \to \infty.$$

La condition est suffisante, car en prenant $\zeta = e^{i\theta}$, on voit que

$$\operatorname{Arg}\varphi(Re^{i\theta}) \to \theta, \qquad \text{si } |\theta| < \frac{\pi}{2};$$

l'angle de deux rayons est conservé, donc aussi l'angle de deux courbes.

La condition est nécessaire, car si $\operatorname{Arg}\varphi(Re^{i\theta}) \to \theta$ quel que soit $\theta \left(|\theta| < \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\operatorname{Arg}\varphi_R(\zeta) \to \operatorname{Arg}\zeta, \qquad \text{donc} \quad \varphi_R(\zeta) \to \zeta$$

($\operatorname{Arg}\zeta$ est une fonction harmonique uniforme dans Δ).

32. La famille des fonctions $\varphi_R(\zeta)$ est définie, pour R assez grand, dans tout domaine strictement intérieur à l'*ensemble limite intérieur restreint* des domaines Δ_R, et elle est normale dans ce domaine, puisque les valeurs de $\varphi_R(\zeta)$ tombent dans le demi-plan D. Montrons que les fonctions inverses $f_R(z)$ définies dans D forment aussi une famille normale. Nous savons que $z_R = \varphi_R(1)$ a pour module 1, et d'après notre lemme $\left(\text{où l'on fait } \omega = \frac{\pi}{2}\right)$, on a

$$\overline{\lim}\,|\operatorname{Arg} z_R| \leqq \frac{\pi}{4}.$$

Représentons D sur le cercle C ($|w| \leqq 1$) par $w = \frac{z-1}{z+1}$. Au point z_R correspond w_R

tel que

$$\overline{\lim}\,|w_R| \leq \operatorname{tang}\frac{\pi}{8} < \frac{1}{2}.$$

Donc, pour R assez grand,

$$|w_R| < \frac{1}{2}.$$

Posons $f_R[z(w)] = g_R(w)$. La fonction $g_R(w)$ est univalente dans C, prend au point w_R la valeur $\zeta = 1$ et recouvre pour R assez grand le cercle de centre $\zeta = 1$ de rayon $\cos\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ quelconque donné), puisque Δ_R contient les secteurs homothétiques des secteurs S_ε. Elle ne recouvre aucun cercle concentrique de rayon supérieur à 1, puisque $\zeta = 0$ appartient à la frontière de tous les domaines Δ_R. Donc (*voir* P. Montel, *[2], p. 50) $|g'_R(w_R)|$ reste compris entre deux nombres positifs indépendants de R, et, d'après le théorème de Kœbe, on aura dans tout cercle C_1 ($|w| < r_1 < 1$) une double limitation

$$0 < k(r_1) < |g'_R(w)| < k'(r_1).$$

De plus, comme $g_R(w_R) = 1$, $|g_R(w)|$ est borné uniformément et les familles $g_R(w)$ et $f_R(z)$ sont normales.

Soit z_0 un point fixe quelconque intérieur à D, on peut enfermer son correspondant w_0, ainsi que w_R, dans un cercle C_1 fixe. On joint w_0 à w_R par un chemin L complètement intérieur à C_1 sur lequel $|g'_R(w)|$ reste supérieur à $k(r_1) = k_1$. Quel que soit le point $\overline{w}$ sur L, $g_R(w)$ est univalente dans le cercle de centre $\overline{w}$, de rayon $1 - r_1$; donc $g_R(w)$ recouvre le cercle de centre $\overline{\zeta} = g_R(\overline{w})$, de rayon $d = \frac{k_1(1-r_1)}{4}$. Au chemin L correspond un chemin Λ_R intérieur à Δ_R, joignant les points $\zeta = 1$ et $\zeta_0 = f_R(z_0)$, et restant à une distance de la frontière de Δ_R supérieure à d, d étant indépendant de R. Donc les points $f_R(z_0)$ ne peuvent s'accumuler que dans *un domaine connexe contenu dans l'ensemble limite intérieur complet des Δ_R et contenant $\zeta = 1$*.

Si nous considérons une suite partielle convergente $f_{R_n}(z)$, sa limite est, comme l'a montré M. Montel, une fonction univalente $f_0(z)$ qui représente conformément D sur le plus grand domaine connexe δ_0 contenant le point $\zeta = 1$ et contenu dans l'ensemble limite intérieur restreint δ_r des domaines Δ_{R_n} de la suite : car la suite $f_{R_n}(z_0)$ tend, d'après le raisonnement précédent, vers un point ζ_0 de δ_0 quel que soit z_0. Et réciproquement, si l'on considère la suite des fonctions inverses $\varphi_{R_n}(\zeta)$, elles sont définies, pour n assez grand, dans un domaine donné quelconque strictement intérieur à δ_r (connexe ou non). Dans δ_0 la limite de $\varphi_{R_n}(\zeta)$ est la fonction $\varphi_0(\zeta)$ inverse de $f_0(z)$; dans un autre domaine connexe δ_1 distinct de δ_0 et intérieur à δ_r (s'il en existe), $\varphi_{R_n}(\zeta)$ tend vers une constante imaginaire pure.

Le cas qui nous occupe ici est particulièrement simple : nous voulons, quelle que soit la suite R_n, que

$$\varphi_{R_n}(\zeta) \to \zeta, \qquad f_{R_n}(z) \to z.$$

L'ensemble δ_0 doit se réduire au demi-plan $\zeta > 0$. Or, si les suites de points de M. Ostrowski n'existaient pas, on pourrait trouver une suite infinie de secteurs S_ν intérieurs à Δ définis par

$$r_\nu < |\zeta| < r_\nu e^\varepsilon, \qquad r_{\nu+1} > r_\nu e^\varepsilon \qquad (\varepsilon \text{ fixé})$$

et l'une des inégalités

$$\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg}\zeta < \frac{\pi}{2} + \theta_0, \qquad -\frac{\pi}{2} > \operatorname{Arg}\zeta > -\frac{\pi}{2} - \theta_0,$$

les domaines Δ_{r_ν} contiendraient un secteur fixe s homothétique des S_ν, et pour la suite Δ_{r_ν} le domaine δ_0 défini précédemment contiendrait, outre le demi-plan ($\xi > 0$), le secteur s. Réciproquement, si les deux suites ζ_ν, ζ'_ν de M. Ostrowski existent, Δ_R admet dans sa frontière les suites homothétiques dans le rapport $\frac{1}{R}$, lesquelles ont pour ensemble limite, lorsque $R \to \infty$, l'axe imaginaire tout entier $\left(\text{à cause des conditions } \frac{\zeta_{\nu+1}}{\zeta_\nu} \to 1,\ \frac{\zeta'_{\nu+1}}{\zeta'_\nu} \to 1\right)$: donc δ_0 est le même pour toutes les suites R_n et coïncide avec le demi-plan $\xi > 0$.

$\varphi_0(\zeta)$ doit alors représenter δ_0 sur D. Or $\varphi(0) = 0$, $\varphi_0(\infty) = \infty$, $|\varphi_0(1)| = 1$. Donc $\varphi_0(\zeta) \equiv \zeta$ et $\varphi_0(\zeta)$ ne dépend pas non plus de la suite considérée.

C. Q. F. D.

33. A cette étude se rattachent les *théorèmes sur les plis* de M. Ostrowski *[1, p. 449-471]. Le domaine Δ satisfaisant aux conditions du théorème précédent, M. Ostrowski définit le *noyau* Δ^* et les *plis* F_ν du domaine.

Pour $a_0 > 0$ assez grand, la demi-droite $\xi > a_0$ portée par l'axe réel est contenue dans Δ. Pour tout $\rho > a_0$, on désigne par β_ρ le plus grand arc de la circonférence $|\zeta| = \rho$ contenu dans Δ et contenant le point $\zeta = \rho$. Le *noyau* Δ^* de Δ est l'ensemble de tous les points de tous les arcs β_ρ. C'est un domaine simplement connexe dont la frontière est formée de points de Γ et d'un ensemble fini ou dénombrable d'arcs γ_ν de certaines circonférences $|\zeta| = \rho_\nu$. Chacun de ces arcs γ_ν est une coupure de Δ qui isole un domaine simplement connexe F_ν contigu à Δ^* appelé *pli* du domaine.

Si ζ est un point intérieur ou frontière de Δ^*, on pose $\rho(\zeta) = |\zeta|$.

Si ζ est un point intérieur ou frontière d'un pli F_ν, on pose $\rho(\zeta) = \rho_\nu$.

Par la méthode de la mesure conforme, M. Ostrowski démontre le théorème fondamental suivant.

Premier théorème sur les plis. — *Si* $\rho(\zeta) \to \infty$, $|\varphi(\zeta)| \sim \varphi[\rho(\zeta)]$.

La définition des plis fait jouer un rôle particulier à l'origine. Mais M. Ostrowski montre que si l'on change d'origine, la nouvelle fonction $\rho'(\zeta)$ est équivalente à $\rho(\zeta)$ lorsque $\rho(\zeta) \to \infty$.

34. En rapprochant ce théorème d'une extension du lemme de Schwarz

donnée par M. Julia [1], nous obtenons un lemme dont nous ferons usage dans la suite.

LEMME II. — *Si le domaine Δ contient un domaine Δ_1 admettant aussi $\alpha = \infty$ comme point frontière accessible et valable en ce point sur un angle d'ouverture $m\pi$, et si l'on représente Δ sur D par la fonction $z = \varphi(\zeta)$ avec correspondance des points à l'infini, le rapport $\frac{|\varphi(\zeta)|^m}{\rho(\zeta)}$ reste borné lorsque $\rho(\zeta) \to \infty$.*

Démonstration. — Nous pouvons supposer les axes choisis de telle sorte que Δ_1 contienne les secteurs S_ε : $|\mathrm{Arg}\,\zeta| < \frac{m\pi}{2} - \varepsilon$, $|\zeta| > R_\varepsilon$. D'après le théorème sur les plis, il suffit de démontrer la propriété pour les points $\zeta = \rho$ de l'axe réel. Soit $\zeta = f_1(z)$ une fonction qui représente conformément D sur Δ_1 avec correspondance des points à l'infini, et $z = \varphi_1(\zeta)$ la fonction inverse; Δ_1 étant valable sur un angle d'ouverture $m\pi$, $\frac{f_1(z)}{z^m} \to \frac{1}{\lambda}\,(0 < \lambda < \infty)$ lorsque $z \to \infty \left(|\mathrm{Arg}\,z| < \theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$.

La fonction $\varphi(\zeta)$ représente Δ_1 sur un domaine D_1 intérieur à D. La fonction $\varphi[f_1(z)] = \psi(z)$ représente donc D sur le domaine intérieur D_1. D'après le théorème de M. Julia

$$\lim_{x \to \infty} \frac{R[\psi(z)]}{x} = c \qquad (0 \leqq c < \infty),$$

si

$$\zeta = \rho \to \infty, \qquad z = \varphi_1(\rho) \to \infty, \qquad \mathrm{Arg}\,z \to 0, \qquad \frac{\varphi(\rho)}{\varphi_1(\rho)} \to c,$$

et, comme

$$\frac{\varphi_1^m(\rho)}{\rho} \to \lambda, \qquad \frac{|\varphi^m(\rho)|}{\rho} \to \lambda c^m.$$

C. Q. F. D.

Application à l'étude des limites de $f(z)$.

35. Nous allons appliquer les considérations précédentes à un problème qui nous a déjà occupés (Chap. II, § 22), mais cette fois d'un point de vue local : préciser, selon la configuration géométrique de la frontière Γ de Δ, l'ordre de contact avec $y'y$ des courbes Γ s'éloignant à l'infini dans D sur lesquelles la fonction $\zeta = f(z)$ a pour limite unique $\alpha = \infty$ $\left(\text{l'ordre maximum de contact d'une telle courbe avec l'axe } y'y \text{ à l'infini est } k = -\varliminf \frac{\log x}{\log r} + 1\right)$. En supposant que la représentation de Δ sur D est semi-conforme à l'infini et que Δ contient à son intérieur un domaine Δ' valable au point $\alpha = \infty$, nous avons obtenu le résultat suivant.

---

[1] G. JULIA, *Acta Math.*, t. 42, 1920, p. 349-355; pour l'application à la représentation conforme, *voir* les Mémoires de MM. G. Valiron et C. Carathéodory cités dans l'Introduction, p. 2.

THÉORÈME. — *Si l'on peut former un domaine Δ^* contenu dans Δ admettant dans sa frontière le point $\alpha = \infty$, mais aucun point accessoire du bout* E(∞), *en enlevant de Δ une suite de domaines périphériques (poches) Δ_n, séparées de Δ^* par des coupures ρ_n d'extrémités $\alpha_n \beta_n$ sur Γ, la coupure ρ_n étant contenue dans le cercle de centre α_n, de rayon δ_n, et satisfaisant à*

$$(30) \qquad \rho_n \to \infty, \qquad \frac{\delta_n}{\rho_n} \to 0, \qquad \delta_n \sqrt{\frac{\rho_n}{R_n}} < \mu \rho_n^{-k} \qquad (k > -1)$$

[μ étant une constante > 0, $R_n = |\alpha_n|$, $\rho_n = \rho(\alpha_n)$].

Alors $\zeta = f(z) \to \infty$ lorsque $z = x + iy \to \infty$ dans le domaine $x \geqq a y^{-k}$ quel que soit $a > 0$.

Plus généralement, si Δ contient un domaine Δ' valable au point $\alpha = \infty$ sur un angle d'ouverture $m\pi$ (par exemple un secteur angulaire d'accessibilité) la dernière condition (30) *doit être remplacée par*

$$(31) \qquad \delta_n < \mu \sqrt{\rho_n R_n}\, \rho_n^{-\frac{k+1}{m}} \qquad (k > -1).$$

36. *Démonstration.* — Soient (*fig.* 5) Δ_n la poche séparée de Δ par la

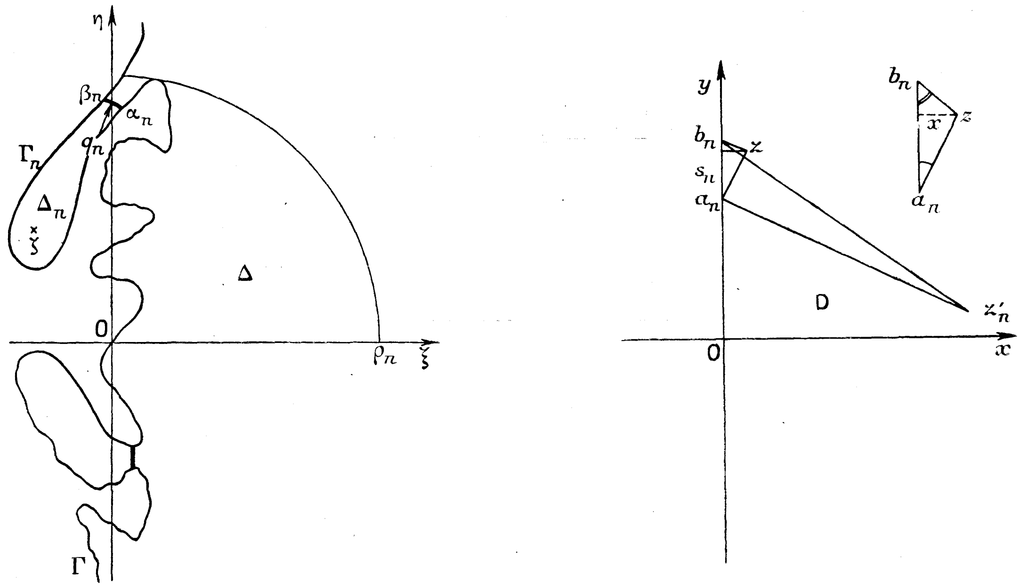

Fig. 5.

coupure ρ_n, et $\Delta'_n = \Delta - \Delta_n$ le domaine simplement connexe restant; Γ_n la portion de la frontière Γ, définie par son voisinage, qui, avec la coupure ρ_n, limite Δ_n, et correspond à un segment s_n de $y'y$ limité aux points a_n, b_n, correspondant respectivement à α_n, β_n; z'_n l'image dans D du point $\zeta = \rho_n$ de l'axe réel $O\xi$, point qui est contenu dans Δ et Δ'_n dès que ρ_n est assez grand.

D'après les propriétés de la mesure conforme

$$m(\rho_n, \Gamma_n, \Delta) = m(z'_n, s_n, D) = 2\left|\operatorname{Arg}\frac{z'_n - a_n}{z'_n - b_n}\right| \leqq 8\sqrt{\frac{\delta_n}{|\rho_n - \alpha_n|}},$$

α_n étant sur la frontière de Δ, on a

$$\varliminf \operatorname{Arg} \alpha_n \geqq \frac{\pi}{2}, \qquad \varliminf \frac{|\rho_n - \alpha_n|}{\rho_n} \geqq 1.$$

Puisque

$$\frac{\delta_n}{\rho_n} \to 0, \qquad \frac{b_n}{a_n} \to 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Arg} \frac{z'_n - a_n}{z'_n - b_n} \to 0.$$

D'après le premier théorème sur les plis, si l'on pose $r'_n = |z_n|$, $r_n = |a_n|$, on voit que $\frac{r'_n}{r_n} \to 1$. D'autre part, la représentation étant semi-conforme, $\operatorname{Arg} z'_n \to 0$. Donc

$$|\operatorname{Arg}(z'_n - a_n)| \to \frac{\pi}{4}, \qquad |\operatorname{Arg}(z'_n - b_n)| \to \frac{\pi}{4}.$$

Dans le triangle $a_n b_n z'_n$ la longueur l_n du segment s_n est équivalente à $2r'_n \left| \operatorname{Arg} \frac{z'_n - b_n}{z'_n - a_n} \right|$, donc

$$(32) \qquad \frac{l_n}{r'_n} < 8(1 + \varepsilon_n) \sqrt{\frac{\delta_n}{\rho_n}} \qquad (\varepsilon_n \to 0 \text{ lorsque } n \to \infty).$$

Soit une suite ζ_p de points de Δ tendant vers un point accessoire ω du bout premier $E(\infty)$ à distance finie, $\rho(\zeta_p) \to \infty$. Dès que p est assez grand, ζ_p ne peut plus tomber dans $\Delta^\star$, puisque ce domaine n'admet plus ω dans sa frontière. Donc ζ_p tombe dans une poche Δ_{n_p}. Il est impossible que l'indice n_p reste borné lorsque $p \to \infty$, car l'image d'une poche Δ_n est un domaine D_n, contenu dans D, tout entier à distance finie. Or si $\zeta_p \to \omega$, $z_p \to \infty$, le point z_p ne peut rester dans un domaine D_{n_p} d'indice borné.

Évaluons la mesure conforme de Γ_n vu d'un point $\zeta = f(z)$ intérieur à Δ_n, dans Δ; si $|\zeta - \alpha_n| > \delta_n$, on a

$$m(\zeta, \Gamma_n, \Delta) > m(\zeta, \Gamma_n, \Delta_n) = 2\pi - m(\zeta, q_n, \Delta_n) \geqq 2\pi - 8\sqrt{\frac{\delta_n}{|\zeta - \alpha_n|}}.$$

D'autre part,

$$m(\zeta, \Gamma_n, \Delta) = m(z, s_n, D) = 2\left|\operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n}\right|.$$

Donc $|\zeta - \alpha_n| > \frac{64}{\pi^2}\delta_n$ entraîne $\left|\operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n}\right| > \frac{\pi}{2}$, l'angle $\widehat{a_n z b_n}$ est alors le plus grand du triangle $a_n b_n z$; supposons, pour fixer les idées, que $\widehat{a_n}$ soit le plus petit angle de ce triangle

$$\widehat{a_n} \leqq \frac{\widehat{a_n} + \widehat{b_n}}{2} \leqq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left|\operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - b_n}\right| < 2\sqrt{\frac{\delta_n}{|\zeta - \alpha_n|}} < \frac{\pi}{4}.$$

Puisque l'angle en z du triangle est obtus, l'ordonnée y de z est comprise entre les ordonnées de a_n et b_n et son abscisse x vérifie

$$x \leqq l_n \operatorname{tang} \widehat{a_n} < l_n \frac{4\widehat{a_n}}{\pi}.$$

Appliquons cette inégalité à ζ_p et à la poche Δ_{n_p}; lorsque $p \to \infty$, $\zeta_p \to \omega$

et $\dfrac{|\zeta_p - \alpha_{n_p}|}{R_{n_p}} \to 1$

$$x_p < \frac{8}{\pi} l_{n_p} \sqrt{\frac{\delta_{n_p}}{R_{n_p}}} (1 + \varepsilon'_p) \qquad (\varepsilon'_p \to 0);$$

en comparant à (32) on obtient

$$x_p < \frac{64}{\pi} (1 + \varepsilon''_p) r_{n_p} \frac{\delta_{n_p}}{\sqrt{\rho_{n_p} R_{n_p}}} \qquad (\varepsilon''_p \to 0).$$

D'après le lemme II il existe une constante K telle que $r_{n_p} < K\rho_{n_p}$, puisque Δ contient un domaine valable. D'autre part,

$$\left|\frac{y_p}{a_{n_p}}\right| \to 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \left|\frac{y_p}{r_{n_p}}\right| \to 1,$$

puisque $|y_p|$ est compris entre $|a_{n_p}|$ et $|b_{n_p}|$.

Ces inégalités, jointes à l'hypothèse (30), montrent que $x_p |y_p|^k$ reste borné par un nombre H fini indépendant du point ω lorsque $p \to \infty$. Donc si z tend vers l'infini dans le domaine $x > H|y|^{-k}$, le point $\zeta = f(z)$ ne peut avoir pour limite aucun point accessoire ω du bout $E(\infty)$ à distance finie et $f(z) \to \infty$. Mais il résulte alors d'un théorème de M. Montel *[1, p. 36], que $f(z)$ a même limite $\alpha = \infty$ lorsque $z \to \infty$ dans un domaine $x > a|y|^{-k}$ quel que soit $a > 0$.

Si, plus généralement, Δ contient un domaine Δ' valable sur un angle d'ouverture $m\pi$, le raisonnement n'est pas modifié, mais on a $r^m_{n_p} < K\rho_{n_p}$ et, pour arriver à la même conclusion, il faut modifier légèrement l'hypothèse.

Le cas limite $k = -1$ correspond à la convergence angulaire déjà étudiée. La condition (31) n'impose alors rien de plus que la semi-conformité de la représentation; mais, comme nous l'avons vu, cette condition n'est nullement nécessaire. Il semble difficile d'obtenir pour $h > -1$ des conditions à la fois nécessaires et suffisantes.

37. *Exemples.* — Pour $k = 0$ nous obtenons une condition suffisante pour que $f(z)$ ait pour limite unique $\alpha = \infty$ lorsque $z \to \infty$ dans un demi-plan quelconque ($x > a > 0$), ou, si l'on représente D sur le cercle $C(|w| \leq 1)$ et posant $f[z(w)] = g(w)$, une condition suffisante pour que $g(w)$ ait une limite unique lorsque w tend vers un point de la circonférence $K(|w| = 1)$ en restant dans un cercle tangent intérieurement à K en ce point.

La condition est toujours satisfaite si la frontière de Δ est toute entière comprise entre deux droites, par exemple entre $\xi = 0$ et $\xi = -1$, ce qui n'exclut pas l'existence d'un bout premier admettant pour seul point accessible $\alpha = \infty$ et possédant un continu de points accessoires, comme le montrent les deux exemples suivants (*fig.* 6 et 7).

Dans ces exemples, le domaine Δ est formé par le demi-plan $\xi > -1$ dont on a ôté soit (*fig.* 6), les segments

$$\eta = m(\xi + 1), \qquad -1 < \xi \leq 0 \qquad (m \text{ entier quelconque});$$

soit (*fig.* 7), le continu

$$\eta = \frac{1}{\xi+1}\sin\frac{\pi}{\xi+1}, \qquad -1 < \xi \leqq 0.$$

Dans les deux cas, le bout E est constitué par la droite $\xi = -1$ en entier. Il suffit de prendre pour coupures ρ_n des segments parallèles à l'axe réel; leur longueur est toujours inférieure à 1. On pourrait aussi prendre pour coupures ρ_n les arcs de cercle centrés à l'origine qui limitent les plis : alors $\Delta^\star$ serait le noyau de Δ. Dans tous les cas, on peut choisir les points α_n de manière que $\rho_n = R_n$ et la condition (30) est satisfaite.

La propriété peut d'ailleurs se démontrer directement comme application d'un théorème de M. Julia étendu par MM. Valiron et Carathéodory : on sait en

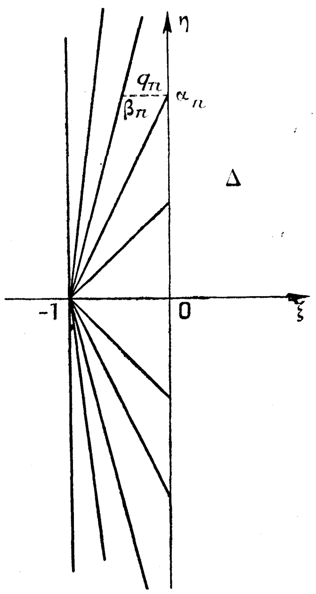

Fig. 6.

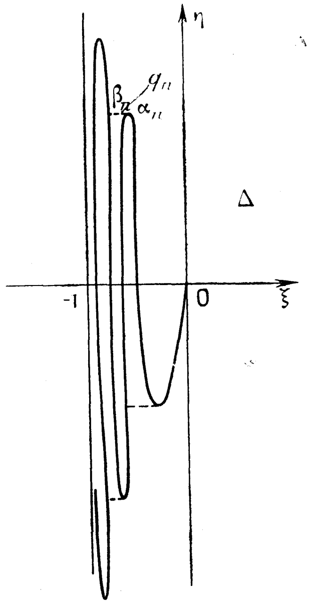

Fig. 7.

effet que, dans ce cas, il existe une constante c $(0 < c < \infty)$ telle que

$$c(\xi+1) \geqq x \geqq c\xi \qquad [\zeta = \xi + i\eta = f(x+iy)].$$

Donc, si $z = x + iy \to \infty$ dans le demi-plan $x > c$, nécessairement, $\zeta \to \infty$. Le résultat se déduit alors du théorème de M. Montel.

Plus généralement, si la frontière de Δ est comprise entre les deux courbes

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{C}) & \xi = A|\eta|^{-k} & \\ (\mathrm{C}') & \xi = B|\eta|^{-k} & (A > B,\ k > -1), \end{array}$$

les conditions du théorème sont satisfaites. Remarquons que c'était la condition suffisante trouvée par MM. Bessonoff et Lavrentieff [1] pour que le domaine Δ soit valable.

Il suffit d'ailleurs que Δ contienne le domaine Δ_1 valable défini par $\xi \geqq A\,|\eta|^{-k}$ et possède une double infinité de points frontières α_n, α'_n (*fig.* 8), compris entre les courbes CC′, tels que

$$\left.\begin{array}{llll} \operatorname{Arg}\alpha_n \to \dfrac{\pi}{2}, & \alpha_n \to \infty, & R_{n+1} - R_n < \mu R_n^{-k} & (R_n = |\alpha_n|) \\ \operatorname{Arg}\alpha'_n \to -\dfrac{\pi}{2}, & \alpha'_n \to \infty, & R'_{n+1} - R'_n < \mu R'^{-k}_n & (R'_n = |\alpha'_n|) \end{array}\right\} \quad (\mu > 0).$$

En effet, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que le point α_n est une extrémité de l'arc du cercle $|\zeta| = |\alpha_n|$ qui appartient au noyau de Δ, sinon on le remplacerait par une extrémité convenable de cet arc. Alors $\rho_n = |\alpha_n| = R_n$. On prendra $\beta_n = \alpha_{n+1}$ et ρ_n sera la coupure constituée par deux segments parallèles à l'axe réel limités à leurs points de rencontre $\alpha_n^{(1)}\alpha_{n+1}^{(1)}$ avec C, et par l'arc de C qui joint $\alpha_n^{(1)}$ à $\alpha_{n+1}^{(1)}$. La longueur de cette coupure est de l'ordre de $R_{n+1} - R_n$, donc elle satisfait à (30). On opère de même sur les points α'_n.

Remarquons que les suites α_n, α'_n satisfont aux conditions de M. Ostrowski, et que leur existence entraîne la semi-conformité de la représentation; on verra au Chapitre IV qu'elle entraîne même l'existence d'une dérivée angulaire.

Pour terminer donnons un exemple distinct des précédents (*fig.* 9). Étant

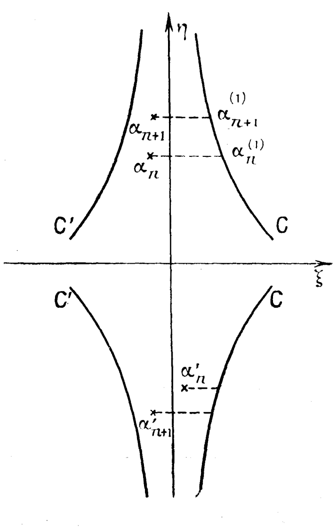

Fig. 8.

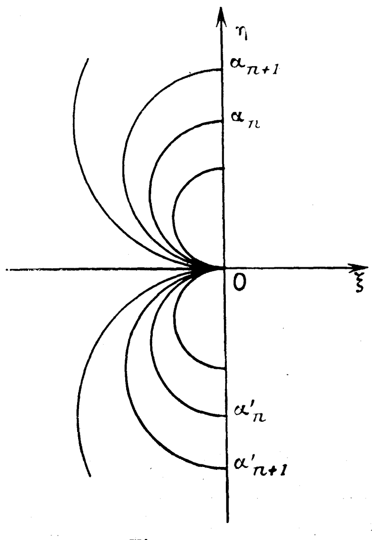

Fig. 9.

données deux suites de points α_n, α'_n sur l'axe imaginaire ($\alpha_n = iR_n$, $\alpha'_n = -iR'_n$)

[1] *Bull. Soc. Math. France*, t. 58, 1930, p. 175-198.

s'éloignant à l'infini et satisfaisant à

$$R_{n+1} - R_n < \mu R_n^{-k}, \qquad R'_{n+1} - R'_n < \mu R'^{-k}_n \qquad (\mu > 0),$$

le domaine Δ est constitué par le plan de ζ dont on a ôté les coupures formées par les demi-cercles

$$\left|\zeta - \frac{x_n}{2}\right| = \frac{R_n}{2} \quad (\xi < 0), \qquad \left|\zeta - \frac{x'_n}{2}\right| = \frac{R'_n}{2} \quad (\xi < 0),$$

le bout E est formé par l'ensemble des points de l'axe réel négatif $O\xi'$. Les conditions (30) sont satisfaites.

CHAPITRE IV.

CONDITIONS D'EXISTENCE D'UNE DÉRIVÉE ANGULAIRE.

38. Nous rappellerons tout d'abord les résultats de M. Ahlfors.

Nous supposerons toujours, dans ce qui suit, que Δ admet le point $\alpha = \infty$ comme point frontière accessible correspondant à $a = \infty$ et le point $\beta = 0$ correspondant à $b = 0$.

On pose

$$\sigma = \log\zeta = X + iY, \qquad s = \log z = u + iv,$$

$\sigma(\zeta)$ et $s(z)$ sont deux fonctions uniformes respectivement dans Δ et D qui représentent Δ et D sur deux domaines Ω et B. Soit β_ρ le plus grand arc du cercle $|\zeta| = \rho$, contenu dans Δ et coupant un arc de Jordan donné joignant $\beta = 0$ à $\alpha = \infty$. [Dans le cas où Δ contient les secteurs $S_\varepsilon\left(|\operatorname{Arg}\zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon,\ |\zeta| > R_\varepsilon\right)$, donc pour ρ_0 assez grand la demi-droite $\eta = 0$, $\xi > \rho_0$, l'axe β_ρ sera choisi de manière à couper cette demi-droite pour $\rho > \rho_0$; lorsque ρ varie cet arc engendre le noyau Δ^* de Δ.] Soit b_ρ la coupure du domaine D image de β_ρ dans la transformation $z = \varphi(\zeta)$. Θ_ρ et Γ_ρ seront les coupures correspondantes des domaines Ω et B. On désigne par $\Theta(\rho)$ la longueur de la coupure Θ_ρ; par $u_2(\rho)$ et $u_1(\rho)$ respectivement le maximum et le minimum de $u = \log r$ sur la coupure Θ_ρ.

Alors si

$$\rho_2 > \rho_1 \quad \text{et} \quad \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho\,\Theta(\rho)} > 2,$$

on a la *première inégalité*

$$(33) \qquad u_1(\rho_2) - u_2(\rho_1) \geqq \pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho\,\Theta(\rho)} - 4\pi.$$

Cette formule se démontre à l'aide de l'inégalité de Schwarz. Jointe à une deuxième inégalité qui donne une limitation en sens inverse, mais, dans des cas plus restreints, et dont nous ne nous servirons pas ici, elle a permis à M. Ahlfors d'établir le théorème suivant.

Théorème. — *Pour qu'il existe une dérivée angulaire*

$$c = \lim_{r \to \infty} \frac{\rho}{r} \qquad (0 < c < \infty).$$

A. *Il est nécessaire que l'intégrale*

$$\int_1^\rho \frac{\pi - \Theta(\rho)}{\Theta(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} \tag{34}$$

soit bornée supérieurement et que pour tout domaine $\overline{\Delta}$ contenu dans Δ, symétrique par rapport à l'axe réel, pour lequel la fonction associée $\overline{\Theta}(\rho)$ est à variation totale bornée, l'intégrale

$$\int_1^\rho \frac{\pi - \overline{\Theta}(\rho)}{\overline{\Theta}(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} \tag{35}$$

soit bornée inférieurement.

B. *Il suffit que si l'on désigne par μ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - |\mathrm{Arg}\,\zeta|$ sur la frontière de Δ pour $K^\nu \leqq |\zeta| \leqq K^{\nu+1}$, K étant une constante positive quelconque supérieure à 1, et si l'on pose*

$$\begin{aligned} \lambda_\nu &= \mu_\nu \qquad \text{si} \quad \mu_\nu \geqq 0, \\ \lambda_\nu &= 0 \qquad \text{si} \quad \mu_\nu < 0, \end{aligned}$$

la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu$ converge (¹) *ainsi que l'intégrale*

$$\int_1^\infty [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho} \tag{36}$$

39. Citons, comme application de la première inégalité, l'interprétation géométrique des résultats du Chapitre II. Nous avons vu que, pour une plénitude de points a de $y'y$, lorsque $z \to a$ dans un angle d'approximation $f(z)$ a une limite $\alpha(a)$ et

$$f'(z)\sqrt{z-a} \to 0, \qquad \frac{f(z)-\alpha}{\sqrt{z-a}} \to 0.$$

Par les transformations homographiques $z_1 = \frac{1}{z-a}$, $\zeta_1 = \frac{1}{\zeta - \alpha}$ on se ramène

---

(¹) M. Grootenbœr a montré qu'on pouvait remplacer cette condition par la suivante, un peu plus générale : λ_ν étant défini dans l'intervalle $\rho_\nu \leqq |\zeta| \leqq \rho_{\nu+1}$ il suffit que les séries $\sum_1^\infty \lambda_\nu$ et $\sum_1^\infty \lambda_\nu \log \frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu}$ convergent.

au cas où $\zeta = f(z) \to \infty$, lorsque $z \to \infty$ $\left(|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$. Alors

$$\frac{f(z)}{\sqrt{z}} \to \infty, \qquad \log\rho - \frac{1}{2}\log r \to \infty,$$

d'après l'inégalité d'Ahlfors

$$\int_1^R \frac{2\,\Theta(\rho) - \pi}{\Theta(\rho)} \frac{d\rho}{\rho} \to +\infty, \qquad \text{lorsque} \quad R \to \infty.$$

Donc, quel que soit R_0, on ne peut avoir constamment pour $R > R_0$: $\Theta < \frac{\pi}{2}$. Autrement dit, il existe une infinité de valeurs de ρ pour lesquelles Δ contient un arc β_ρ du cercle $|\zeta| = \rho$ de mesure supérieure à $\frac{\pi}{2}$. Et plus précisément, la valeur moyenne de $\Theta(\rho)$ calculée en prenant $\log\rho$ pour variable, dans l'intervalle $1 \leqq \rho \leqq R$, a une limite inférieure au moins égale à $\frac{\pi}{2}$ lorsque $R \to \infty$.

40. *Propriétés de l'intégrale de Poisson.* — Soit

$$F(z) = G(x, y) + iH(x, y)$$

une fonction holomorphe dans le demi-plan droit D et sur sa frontière $y'y$ $(x \geqq 0)$ dont la partie réelle $G(x, y)$ prend sur l'axe $y'y$ une suite continue de valeurs, soit $g(y)$. L'intégrale de Poisson (¹) transformée donne

$$F(z_0) - F(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{z_0 - iy} - \frac{1}{1 - iy} \right) g(y)\, dy.$$

Supposons maintenant que $F(z)$ soit holomorphe seulement dans l'intérieur de D et pas nécessairement sur $y'y$. On considère alors la fonction continue $g_\varepsilon(y) = G(\varepsilon, y)$ et l'intégrale

$$(37) \qquad F(z_0) - F(1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{z_0 - iy} - \frac{1}{1 - iy} \right] g_\varepsilon(y)\, dy,$$

indépendante de ε dès que $\varepsilon < x_0$.

Supposons que $G(x, y)$ soit bornée et tende vers une limite $g(y)$ lorsque, y restant fixe, x tend vers zéro, pour toute valeur de y, excepté au plus pour un ensemble E de points $a = iy$ de l'axe $y'y$ tel que

$$\int_E \frac{y\, dy}{1 + y^2} = 0$$

Si l'on fait tendre ε vers zéro, l'intégrale (37) existe à la limite comme intégrale de Lebesgue, car la limite de $g_\varepsilon(y)$ est une fonction $g(y)$ bornée, de

(¹) *Voir* FATOU, *Acta Mathematica*, t. 30, 1906, p. 360.

première catégorie, donc mesurable, et définie en tout point de $y'y$ étranger à E. Bornons-nous à considérer

$$(38)\qquad H(x_0, 0) - H(1, 0) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{1}{x_0^2+y^2} - \frac{1}{1+y^2}\right][g(y) - g(-y)]y\,dy.$$

Pour que $H(x_0, 0)$ ait une limite finie lorsque x_0 tend vers l'infini, il faut et il suffit que l'intégrale de Lebesgue

$$\int_0^\infty [g(y) - g(-y)]\frac{y\,dy}{1+y^2} \quad \text{soit convergente.}$$

On voit que dans cette intégrale on peut négliger l'ensemble E.

41. Appliquons ces considérations à la fonction

$$F(z) = i\log\frac{f(z)}{z} = i\log\frac{\rho}{r} - (\operatorname{Arg}\zeta - \operatorname{Arg} z),$$

$f(z)$ étant toujours la fonction qui représente conformément D sur Δ; on a

$$|\operatorname{Arg}\zeta - \operatorname{Arg} z| < 3\pi.$$

D'après les résultats du Chapitre II (§ 21)(¹), si z tend vers un point $a = it$ de l'axe $y'y$ sur une parallèle à Ox, le point $\zeta = f(z)$ tend vers un point accessible de la frontière de Δ à distance finie ou infinie, excepté au plus pour un ensemble E de points de $y'y$ tel que

$$\int_E \frac{dy}{y} = 0, \qquad \text{donc à fortiori} \qquad \int_E \frac{dy}{1+y^2} = 0.$$

Si $f(z)$ a une dérivée angulaire $c = \lim\limits_{x_0 \to \infty} \frac{|f(x_0)|}{x_0}$, $\log\frac{|f(x_0)|}{x_0}$ tend vers la limite finie $\log c$ lorsque x_0 tend vers l'infini. Pour cela il faut et il suffit que si l'on pose

$$\lim_{x \to 0} \operatorname{Arg}\frac{f(x+it)}{it} = -g(t),$$

l'intégrale (39) $\int_1^\infty [g(y) - g(-y)]\frac{dy}{y}$ converge.

[$g(t)$ existe si le point $a = it$ n'appartient pas à E].

Si le domaine Δ est symétrique par rapport à l'axe réel,

$$g(y) = -g(-y) = \frac{1}{2}[\pi - \Theta(y)]$$

(notations de M. Ahlfors).

(¹) On applique le résultat ici au voisinage de $a = \infty$, ce qui est possible, parce que $f(z)$ est définie dans le demi-plan D entier et qu'on étudie les limites de $f(z)$ sur la sphère de Riemann.

D'après une remarque de M. Ahlfors il est suffisant, pour l'existence d'une dérivée angulaire, que le rapport $\frac{|f(z)|}{|z|}$ reste borné inférieurement et supérieurement lorsque z tend vers l'infini sur un chemin L contenu dans un angle $|\operatorname{Arg} z| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, par exemple sur l'axe réel; donc il suffit que l'intégrale (39) soit bornée en module.

Conditions suffisantes.

42. Pour qu'un domaine Δ soit valable, il suffit qu'il contienne un domaine valable Δ_1 et soit contenu dans un domaine valable Δ_2 : car si Δ contient un domaine valable Δ_1, nous avons vu (lemme II, Chap. III) que le rapport $\frac{|\varphi(\zeta)|}{|\rho(\zeta)|}$ est borné angulairement, et l'on montrerait de même que si Δ est contenu dans un domaine valable Δ_2, le rapport $\frac{\rho(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$ est borné. La condition cherchée se décompose ainsi en deux parties.

Comme domaine Δ_1 nous prendrons un domaine simplement connexe, symétrique par rapport à l'axe réel, contenu dans le demi-plan droit $\xi > 0$ et limité par un arc de Jordan. Pour qu'un tel domaine soit valable, il faut et il suffit que l'intégrale, toujours positive,

$$(39') \qquad \int_1^\infty \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} f(iy)\right] \frac{dy}{y} = \int_1^\infty g(y) \frac{dy}{y}$$

soit bornée.

Pour former Δ_1 (*fig.* 10), nous nous donnons une suite positive croissante

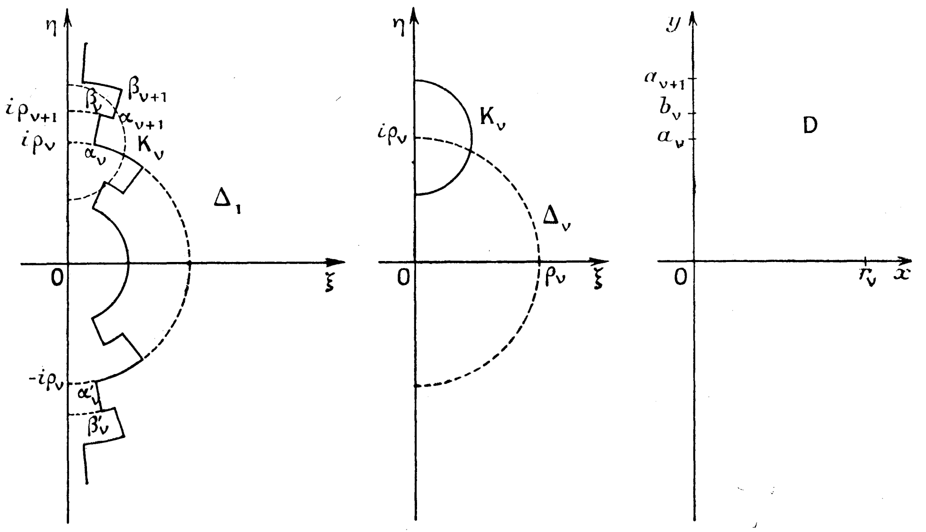

Fig. 10.

quelconque $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\nu, \ldots (\rho_\nu \to \infty)$ et nous désignons comme précédemment par μ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - |\operatorname{Arg}\zeta|$ sur la frontière de Δ pour $\rho_\nu \leq |\zeta| \leq \rho_{\nu+1}$, par λ_ν

le plus grand des nombres o et μ_ν. Δ_1 sera l'intérieur de la région formée par la réunion des secteurs $\rho_\nu \leqq |\zeta| \leqq \rho_{\nu+1}$, $|\operatorname{Arg}\zeta| \leqq \frac{\pi}{2} - \lambda_\nu$. La frontière de Δ_1 est une ligne brisée formée d'arcs des cercles $|\zeta| = \rho_\nu$ et de segments des demi-droites $|\operatorname{Arg}\zeta| = \frac{\pi}{2} - \lambda_\nu$. Dans la représentation conforme de Δ_1 sur D $[\zeta = f_1(z);\ z = \varphi_1(\zeta)]$ réalisée de manière que les points à l'infini et les axes réels se correspondent, il y a correspondance continue entre les frontières. Posons

$$\alpha_\nu = \rho_\nu e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_\nu\right)}, \qquad \beta_\nu = \rho_{\nu+1} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\lambda_\nu\right)}, \qquad u_\nu = \lambda_\nu + \frac{\rho_{\nu+1} - \rho_\nu}{\rho_\nu}.$$

Considérons le segment $\alpha_\nu \beta_\nu$ de la frontière de Δ_1. Il est dans le cercle $\Gamma_\nu : |\zeta - i\mathrm{R}_\nu| \leqq \rho_\nu u_\nu$, d'autre part l'arc $\beta_\nu \alpha_{\nu+1}$ de la frontière de Δ_1 est intérieur au moins

$$\text{à} \quad \Gamma_\nu \quad \text{si } \lambda_\nu \geqq \lambda_{\nu+1},$$
$$\text{à} \quad \Gamma_{\nu+1} \quad \text{si } \lambda_\nu \leqq \lambda_{\nu+1}.$$

Donc, tout point frontière de Δ_1 tombe au moins dans un cercle Γ_ν ou dans son symétrique par rapport à l'axe réel. Soit Δ_ν le domaine formé des points du demi-plan droit ($\xi > 0$) extérieurs à Γ_ν.

D'après les propriétés de la mesure conforme, si σ_ν est un arc de frontière de Δ_1 contenu dans Γ_ν, K_ν la demi-circonférence ($|\zeta - i\rho_\nu| = \rho_\nu u_\nu$, $\xi > 0$) qui limite Δ_ν, et ζ un point intérieur à la fois à Δ_ν et Δ_1, on a

$$m(\zeta, \sigma_\nu, \Delta_1) \leqq m(\zeta, \mathrm{K}_\nu, \Delta_\nu).$$

Appliquons cette inégalité au point $\zeta = \rho_\nu$ de l'axe réel, intérieur à Δ_1 et Δ_ν si ν est assez grand,

$$m(\rho_\nu, \mathrm{K}_\nu, \Delta_\nu) = 4 \operatorname{Arg} \frac{1 - i(1 - u_\nu)}{1 - i(1 + u_\nu)} = 4 \operatorname{Arc tang} \frac{2u_\nu}{2 - u_\nu^2}.$$

Dès que u_ν est inférieur à 1 on a

$$m(\rho_\nu, \sigma_\nu, \Delta_1) < 8u_\nu.$$

Le domaine Δ_1 est un domaine « sans plis » dont la représentation sur D est semi-conforme à l'infini si $\lambda_\nu \to 0$. Alors, d'après le théorème sur les plis de M. Ostrowski (§ 33), si l'on pose

$$r_\nu = \varphi_1(\rho_\nu), \qquad a_\nu = \varphi_1(\alpha_\nu), \qquad b_\nu = \varphi_1(\beta_\nu),$$

on voit que

$$\frac{|a_\nu|}{r_\nu} \to 1, \qquad \frac{|b_\nu|}{r_\nu} \to 1,$$

en outre, si $u_\nu \to 0$,

$$\frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu} \to 1, \qquad \frac{r_{\nu+1}}{r_\nu} \to 1.$$

Soit s_ν le segment de l'axe $y'y$ correspondant à l'arc σ_ν. Il est vu du point $\zeta = r_\nu$ de l'axe réel sous un angle φ_ν

$$\varphi_\nu = \frac{1}{2} m(r_\nu, s_\nu, \mathrm{D}) = \frac{1}{2} m(\rho_\nu, \sigma_\nu, \Delta_1) < 4 u_\nu.$$

Donc $\varphi_\nu \to 0$ et la longueur l_ν de s_ν est équivalente à $\sqrt{2} r_\nu \varphi_\nu$, d'où

$$l_\nu < 4\sqrt{2}\, r_\nu u_\nu (1 + \varepsilon_\nu) \qquad (\varepsilon_\nu \to 0).$$

Sa longueur logarithmique, soit $d_\nu = \int_{s_\nu} \frac{dy}{y}$, est limitée par

$$d_\nu < 4\sqrt{2}\, u_\nu (1 + \varepsilon'_\nu) \qquad (\varepsilon'_\nu \to 0),$$

donc $d_\nu < 6 u_\nu$ pour ν assez grand (soit $\nu > \nu_0$). D'autre part, sur σ_ν le maximum de $\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arg} \zeta$ est λ_ν

$$\int_{\sigma_\nu} g(y) \frac{dy}{y} < 6 u_\nu \lambda_\nu.$$

Tout point de la frontière de Δ_1 appartient au moins à un arc σ_ν ou à son symétrique σ'_ν par rapport à l'axe réel, donc les segments s_ν recouvrent le demi-axe positif Oy

$$\int_{\rho_{\nu_0}}^{\infty} g(y) \frac{dy}{y} < 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu u_\nu = 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu^2 + 6 \sum_{\nu=\nu_0}^{\infty} \lambda_\nu \frac{\rho_{\nu+1} - \rho_\nu}{\rho_\nu}.$$

Posons $\log \frac{\rho_{\nu+1}}{\rho_\nu} = \delta_\nu$. La convergence de l'intégrale (39′) est assurée si les deux séries $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2$ et $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \delta_\nu$ sont convergentes.

Théorème I. — *Si les deux séries* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2$ *et* $\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \delta_\nu$ *sont convergentes, le domaine* Δ_1 *est valable.*

Exemple. — Soit Δ le domaine obtenu en enlevant du demi-plan $\xi > 0$ les arcs de cercle

$$|\zeta| = \mathrm{R}_\nu, \qquad |\operatorname{Arg} \zeta| \geqq \frac{\pi}{2} - \theta_\nu \qquad \left(\mathrm{R}_\nu \to \infty,\ \theta_\nu \to 0,\ \frac{\mathrm{R}_{\nu+1}}{\mathrm{R}_\nu} > \mathrm{K} > 1\right).$$

M. Wolff [1] a démontré, dans ce cas particulier, que la condition nécessaire trouvée par M. Ahlfors, à savoir la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu^2$, était aussi suffisante. Ce résultat nous apparaît comme une application du théorème I : donnons-nous en effet une suite ε_ν décroissant assez vite pour que la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu \varepsilon_\nu$

(1) *C. R. Acad. Sc.*, t. 200, 1935, p. 630. M. Ahlfors avait trouvé comme condition suffisante la convergence de la série $\sum_{\nu=1}^{\infty} \theta_\nu$.

soit convergente, et satisfaisant en outre à $\varepsilon_\nu < \frac{1}{2}\log\frac{R_{\nu+1}}{R_\nu}$. On prendra

$$\rho_{2\nu} = R_\nu e^{-\varepsilon_\nu}, \qquad \rho_{2\nu+1} = R_\nu e^{+\varepsilon_\nu}, \qquad \text{d'où} \quad \delta_{2\nu} = 2\varepsilon_\nu, \qquad \lambda_{2\nu} = \theta_\nu, \qquad \lambda_{2\nu+1} = 0.$$

43. Nous prendrons pour domaine Δ_2 la réunion de Δ et du demi-plan droit $\xi > 0$. Supposons que le domaine Δ satisfasse aux conditions (29) de semi-conformité de M. Ostrowski $\left(\text{avec } \theta_2 = -\theta_1 = +\frac{\pi}{2}\right)$. On peut donc trouver sur sa frontière deux suites infinies de points ζ_n, ζ'_p telles que

$$|\zeta_n| = R_n \to \infty, \quad \operatorname{Arg}\zeta_n \to +\frac{\pi}{2}, \qquad |\zeta'_p| = R'_p \to \infty, \quad \operatorname{Arg}\zeta'_p \to -\frac{\pi}{2};$$
$$\log\frac{R_{n+1}}{R_n} = \delta_n \to 0, \qquad \log\frac{R'_{p+1}}{R'_p} = \delta'_p \to 0.$$

Les deux suites peuvent être ordonnées de manière que

$$R_{n+1} > R_n, \qquad R'_{p+1} > R'_p, \qquad \text{donc} \quad \delta_n > 0, \qquad \delta'_p > 0.$$

Cherchons à quelles conditions supplémentaires doivent satisfaire ces suites pour que le domaine Δ_2 soit valable. Posons

$$\theta_n = \begin{cases} \operatorname{Arg}\zeta_n - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad \operatorname{Arg}\zeta_n > \frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad \operatorname{Arg}\zeta_n < \frac{\pi}{2}; \end{cases}$$

$$\theta'_p = \begin{cases} -\operatorname{Arg}\zeta'_p - \frac{\pi}{2} & \text{si} \quad \operatorname{Arg}\zeta'_p < -\frac{\pi}{2}, \\ 0 & \text{si} \quad \operatorname{Arg}\zeta'_p > -\frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Considérons le plus grand arc (supérieur à π) du cercle $|\zeta| = R_n$ contenu dans Δ_2. Soit α_n l'extrémité de cet arc qui a un argument positif; c'est un point accessible de la frontière du noyau de Δ_2. On définirait de même le point α'_p d'argument négatif

$$|\alpha_n| = R_n, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Arg}\alpha_n \leqq \frac{\pi}{2} + \theta_n; \qquad |\alpha'_p| = R'_p, \qquad -\frac{\pi}{2} \geqq \operatorname{Arg}\alpha'_p \geqq -\frac{\pi}{2} - \theta'_p.$$

Nous désignerons par q_n (*fig.* 11) la coupure du domaine Δ_2 formée par les deux arcs de cercle

$$|\zeta| = R_n, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Arg}\zeta \leqq \operatorname{Arg}\alpha_n; \qquad |\zeta| = R_{n+1}, \qquad \frac{\pi}{2} \leqq \operatorname{Arg}\zeta \leqq \operatorname{Arg}\alpha_{n+1},$$

et du segment de l'axe imaginaire joignant les points iR_n, iR_{n+1}. Cette coupure isole une poche Ω_n du domaine Δ_2 située dans le demi-plan $\xi < 0$. Le cercle $|\zeta - iR_n| \leqq R_n v_n$ contiendra la coupure ρ_n si l'on prend

$$v_n = \theta_n + \theta_{n+1} + \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n}.$$

S'il existe un point ζ intérieur à Ω_n et extérieur au cercle $\Gamma_n : |\zeta - i\mathrm{R}_n| \leqq 16\mathrm{R}_n\rho_n$, on aura, en désignant par γ_n la portion de frontière de Δ qui, avec q_n, limite Ω_n [par application des inégalités (26) et (27)],

$$m(\zeta, \gamma_n, \Delta_2) > m(\zeta, \gamma_n, \Omega_n) = 1 - m(\zeta, q_n, \Omega_n) > 2\pi - 4\pi\sqrt{\frac{\mathrm{R}_n\rho_n}{16\,\mathrm{R}_n\rho_n}} = \pi.$$

Donc si z, a_n, a_{n+1} sont les points correspondant respectivement à ζ, α_n, α_{n+1} dans la représentation conforme de Δ_2 sur D [réalisée par $\zeta = f_2(z)$, $z = \varphi_2(\zeta)$,

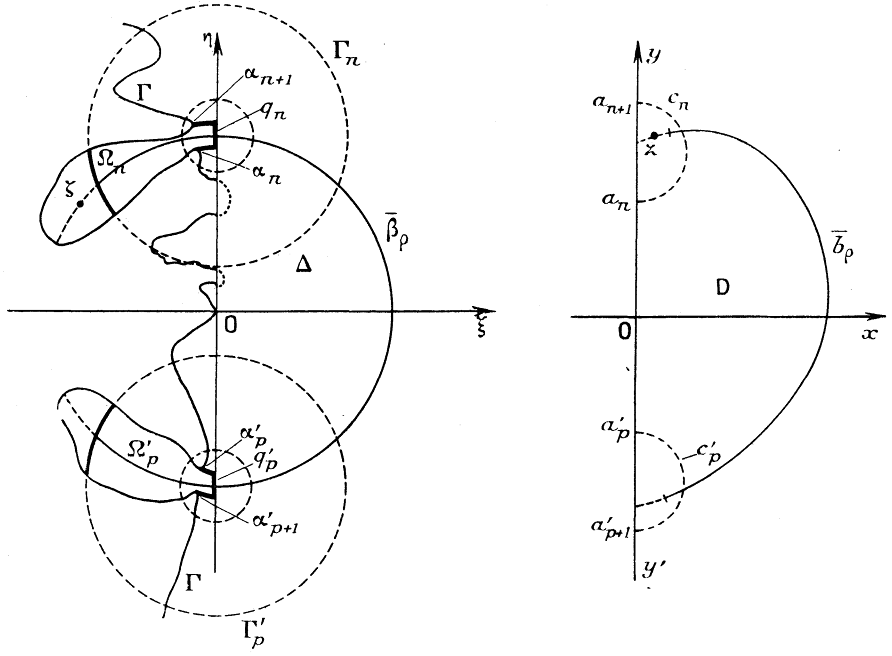

Fig. 11.

avec correspondance des points à l'infini], on verra du point z le segment s_n de l'axe $y'y$ joignant les points a_n, a_{n+1} sous un angle φ_n

$$\varphi_n = \frac{1}{2} m(z, s_n, \mathrm{D}) = \frac{1}{2} m(\zeta, \gamma_n, \Delta_2) > \frac{\pi}{2}.$$

Donc z est intérieur au demi-cercle c_n tracé sur s_n comme diamètre et contenu dans D.

On opère de même avec les points α'_p, α'_{p+1} et pour toutes les valeurs de n et p, on ôte du domaine Δ_2 tous les points, s'il en existe, intérieurs à une poche $\Omega_n(\Omega'_p)$ et extérieurs au cercle correspondant $\Gamma_n(\Gamma'_p)$; soit $\overline{\Delta_2}$ le domaine restant, limité par des arcs $\overline{\gamma^i_n}$, $\overline{\gamma'^i_p}$ des circonférences Γ_n, Γ'_p et des portions de frontière de Δ_2; soit $\overline{\mathrm{D}}$ le domaine intérieur à D qui correspond à $\overline{\Delta_2}$ dans la transformation $z = \varphi_2(\zeta)$. Les arcs de la frontière de $\overline{\mathrm{D}}$ correspondant aux arcs $\overline{\gamma^i_n}$ sont intérieurs au demi-cercle c_n.

Reprenons pour le domaine $\overline{\Delta_2}$ la démonstration de la première inégalité de M. Ahlfors *[1, p. 8]. La coupure $\overline{\beta_\rho}$ sera le plus grand arc (supérieur à π) du cercle $|\zeta| = \rho$ contenu dans $\overline{\Delta_2}$ et $\overline{\Theta}(\rho)$ sa mesure en radians. L'image de $\overline{\beta_\rho}$ dans la transformation $z = \varphi_2(\zeta)$ est une coupure $\overline{b_\rho}$ du domaine $\overline{\mathrm{D}}$ portée par la coupure b_ρ image de β_ρ et n'en différant que par deux petits arcs contenus respectivement dans deux demi-cercles c_n, c'_p, les indices n et p étant déterminés par $\mathrm{R}_n \leqq \rho < \mathrm{R}_{n+1}$, $\mathrm{R}'_p \leqq \rho < \mathrm{R}'_{p+1}$.

La coupure $\overline{b_\rho}$ sépare l'origine du point à l'infini dans D. Donc a_{n+1} est sur Oy, a'_{p+1} sur Oy'.

Posons

$$a_n = i r_n \quad (r_n > 0), \qquad a'_p = -i r'_p \quad (r'_p > 0),$$

$$d_n = \log \frac{r_{n+1}}{r_n}, \qquad d'_p = \log \frac{r'_{p+1}}{r'_p}.$$

Lorsque $\rho \to \infty$,

$$r_n \to \infty, \qquad r'_p \to \infty, \qquad \frac{r'_p}{r_n} \to 1.$$

Faisons les transformations $\sigma = \log \zeta = \mathrm{X} + i\mathrm{Y}$, $s = \log z = u + iv$ (*fig.* 12); la coupure $\overline{b_\rho}$ a pour image une coupure $\overline{\mathrm{T}_\rho}$ du domaine $\overline{\mathrm{B}}$ transformé de $\overline{\mathrm{D}}$, de longueur $\overline{l}(\rho)$, et portée par la coupure T_ρ de la bande $\mathrm{B}\left(|v| < \frac{\pi}{2}\right)$, transformée de b_ρ, de longueur $l(\rho)\left[l(\rho) \geqq \overline{l}(\rho)\right]$.

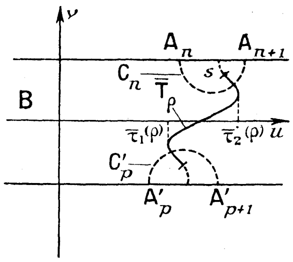

Fig. 12.

Soit $\mathrm{A}_n = \log a_n$, $\mathrm{A}'_p = \log a'_p$. Nous allons montrer que les extrémités de la coupure $\overline{\mathrm{T}_\rho}$ sont contenues respectivement dans les demi-cercles C_n, C'_p tracés sur les segments S_n (joignant A_n, A_{n+1}) et S'_p (joignant A'_p, A'_{p+1}) comme diamètres, de rayons respectifs $\frac{d_n}{2}$, $\frac{d'_p}{2}$ et contenus dans B. Soit en effet P le demi-plan $v < \frac{\pi}{2}$, z un point intérieur au demi-cercle c_n, et $s = \log z$,

$$m(s, \mathrm{S}_n, \mathrm{P}) \geqq m(s, \mathrm{S}_n, \mathrm{B}) = m(z, s_n, \mathrm{D}),$$

or

$$m(s, \mathrm{S}_n, \mathrm{P}) = 2 \operatorname{Arg} \frac{s - \mathrm{A}_n}{s - \mathrm{A}_{n+1}}, \qquad m(z, s_n, \mathrm{D}) = 2 \operatorname{Arg} \frac{z - a_n}{z - a_{n+1}} > \pi.$$

Donc s est intérieur au demi-cercle C_n.

De même si z' est intérieur au demi-cercle c'_p, $s' = \log z'$ est intérieur à C'_p. On applique ceci aux extrémités de $\overline{b_\rho}$. C. Q. F. D.

Désignons par

$$\omega(\rho) \text{ l'oscillation de } u = \log|\varphi_2(\zeta)| \text{ sur } T_\rho,$$

$$\overline{\omega}(\rho) \text{ l'oscillation de } u = \log|\varphi_2(\zeta)| \text{ sur } \overline{T}_\rho,$$

$$l^2(\rho) \geqq \pi^2 + \omega^2(\rho), \qquad \overline{l}^2(\rho) \geqq \left[\pi - \frac{d_n + d'_p}{2}\right]^2 + \overline{\omega}^2(\rho) \geqq \pi^2 - \pi(d_n + d'_p) + \overline{\omega}^2(\rho),$$

d'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwarz,

$$\overline{l}^2(\rho) = \left[\int_{\overline{\Theta}_\rho} \left|\frac{ds}{d\sigma}\right| dY\right]^2 \leqq \overline{\Theta}(\rho) \times \int_{\overline{\Theta}_\rho} \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 dY,$$

d'où l'inégalité

$$\frac{\pi^2 + \overline{\omega}^2(\rho)}{\overline{\Theta}(\rho)} \leqq \frac{\pi(d_n + d'_p)}{\overline{\Theta}(\rho)} + \int_{\overline{\Theta}_\rho} \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 dY,$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\pi^2 + \overline{\omega}^2(\rho)}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)}\,d\rho \leqq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \pi(d_n + d'_p)\frac{d\rho}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)} + \int_{X_1}^{X_2}\int_{\overline{\Theta}_\rho} \left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 dX\,dY,$$

en posant

$$X_1 = \log\rho_1, \qquad X_2 = \log\rho_2.$$

Soient $r_1(\rho)$ et $r_2(\rho)$ respectivement le minimum et le maximum de $r = |\varphi_2(\zeta)|$ sur $\overline{b_\rho}$, de même $r_1(\rho)$ et $r_2(\rho)$ le minimum et le maximum de r sur b_ρ

$$r_1(\rho) \leqq \overline{r_1}(\rho) \leqq \overline{r_2}(\rho) \leqq r_2(\rho),$$

$$\overline{\omega}(\rho) = \log\overline{r_2}(\rho) - \log\overline{r_1}(\rho); \qquad \omega(\rho) = \log r_2(\rho) - \log r_1(\rho); \qquad \omega(\rho) \geqq \overline{\omega}(\rho);$$

$$\left.\begin{aligned} \log\overline{r_1}(\rho) - \log r_1(\rho) &< d_n + d'_p \\ \log r_2(\rho) - \log\overline{r_2}(\rho) &< d_n + d'_p \end{aligned}\right\} \to 0, \qquad \text{lorsque } \rho \to \infty.$$

En reprenant le calcul d'Ahlfors *[1, p. 9], on a, si $\rho_2 > \rho_1 e^{4\pi}$,

$$\log\overline{r_1}(\rho_2) - \log\overline{r_2}(\rho_1) - \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\pi\,d\rho}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)} > -4\pi - \int_{\rho_1}^{\rho_2} (d_n + d'_p)\frac{d\rho}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)},$$

or, d'après la construction de Δ_2, on voit facilement que

$$0 \leqq \overline{\Theta}(\rho) - \pi \leqq 16(v_n + v'_p),$$

$$0 \leqq \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{\overline{\Theta}(\rho) - \pi}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)}\,d\rho \leqq \frac{16}{\pi}\int_{\rho_1}^{\rho_2} (v_n + v'_p)\frac{d\rho}{\rho} \leqq \frac{16}{\pi}\sum_{n_1}^{n_2} v_n\,\delta_n + \frac{16}{\pi}\sum_{p_1}^{p_2} v'_p\,\delta'_p,$$

les indices n_1 et n_2, p_1 et p_2 dépendant de ρ_1 et ρ_2. Or

$$v_n = \theta_n + \theta_{n+1} + \frac{R_{n+1} - R_n}{R_n};$$

dès que $\delta_n = \log\dfrac{R_{n+1}}{R_n}$ est assez petit, on a $v_n \leqq \theta_n + \theta_{n+1} + 2\delta_n$.

Si les séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2,$$
$$\sum_{p=1}^{\infty} \theta'_p \delta'_p, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \theta'_{p+1} \delta'_p, \quad \sum_{p=1}^{\infty} \delta'^2_p$$

convergent, il en est de même de l'intégrale

$$\int_1^{\infty} \frac{\overline{\Theta}(\rho) - \pi}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)} d\rho \quad \text{et} \quad \log\rho - \int_1^{\rho} \frac{\pi\, d\rho}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)}$$

est borné lorsque $\rho \to \infty$. Alors

$$\log r_1(\rho) - \log\rho > -\int_1^{\rho} \frac{d_n + d'_p}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)} d\rho + \mathrm{K} \qquad (\mathrm{K} = \text{const.}).$$

Pour montrer que $\log \dfrac{r_1(\rho)}{\rho}$ reste borné inférieurement lorsque $\rho \to \infty$, il suffit de montrer la convergence de

$$\int_1^{\infty} (d_n + d'_p) \frac{d\rho}{\rho\,\overline{\Theta}(\rho)} < \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} (d_n + d'_p) \frac{d\rho}{\rho}.$$

Alors le domaine Δ_2 sera valable, car on sait déjà, puisqu'il contient le demi-plan $\xi > 0$ (lemme II, § 34), que $\log \dfrac{|\varphi_2(\zeta)|}{\rho(\zeta)}$ reste borné supérieurement. Il suffit donc que les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n$ et $\sum\limits_{p=1}^{\infty} d'_p \delta'_p$ convergent.

Nous ne savons pas limiter d_n comme pour le domaine Δ_1. Mais $\log \dfrac{|\varphi_2(\zeta)|}{\rho(\zeta)}$ est borné,

$$\log \frac{\rho_{\mathrm{N}}}{\rho_1} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \delta_n, \qquad \log \left| \frac{\varphi_2(\alpha_{\mathrm{N}})}{\varphi_2(\alpha_1)} \right| = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} d_n.$$

Posons

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (d_n - \delta_n) = \mathrm{S}_{\mathrm{N}};$$

S_{N} est borné, $\mathrm{S}_{\mathrm{N}} < \mathrm{A}$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} d_n \delta_n = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \delta_n^2 + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (d_n - \delta_n)\delta_n,$$

la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ est supposée converger. Soit B sa somme

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} d_n \delta_n < \mathrm{B} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1})\delta_n = \mathrm{B} + \mathrm{S}_{\mathrm{N}} \delta_{\mathrm{N}} + \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} \mathrm{S}_n (\delta_n - \delta_{n+1}),$$

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} d_n \delta_n < \mathrm{B} + \mathrm{A}\left[\delta_{\mathrm{N}} + \sum_{n=1}^{n-1} |\delta_n - \delta_{n+1}| \right].$$

Pour que la série $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \delta_n$ converge, il suffit donc que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$ convergent.

Mais la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1}\delta_n$ est conséquence de la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$.

THÉORÈME II. — *Pour que le domaine Δ_2 soit valable, il suffit que les six séries suivantes soient convergentes*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|,$$

$$\sum_{p=1}^{\infty} \theta'_p \delta'_p, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} \delta'^2_p, \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |\delta'_p - \delta'_{p+1}|.$$

Remarquons que les suites ζ_n, ζ'_p dont nous sommes partis sont arbitraires; l'existence d'*un* tel couple de suites suffit pour que Δ_2 soit valable.

44. *Interprétation.* — La convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \theta'_p \delta'_p$ exprime que les points ζ_n, ζ'_p sont situés sur une courbe Γ' limitant un domaine Δ' pour lequel l'intégrale (36) converge (on peut prendre pour Γ' la ligne brisée joignant ces points dans l'ordre; Δ' satisfait aux conditions suffisantes de M. Ahlfors). La convergence des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{p=1}^{\infty} \delta'^2_p$ exprime que ces points sont assez rapprochés les uns des autres. Enfin la convergence des séries $\sum_{p=1}^{\infty} |\delta_n - \delta_{n+1}|$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta'_p - \delta'_{p+1}|$ est une condition de régularité dans la répartition de ces points, qui est assurée en particulier si les suites δ_n et δ'_p sont monotones non croissantes.

EXEMPLES. — Soient A et B les domaines symétriques formés en ôtant du plan $\zeta = \xi + i\eta$, pour A

les demi-droites $\xi < 0, \qquad \eta = \pm R_n;$

pour B

les demi-circonférences $\xi < 0, \qquad |\zeta| = R_n$ et le demi-axe $\xi < 0, \qquad \eta = 0;$

$R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ étant une suite positive croissante tendant vers l'infini.

Si, en posant $\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}$, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{n+1} - \delta_n|$ convergent, les deux domaines A et B sont valables.

Pour le domaine A, avec les notations de M. Ahlfors, on a,

$$\text{si } R_n \leqq \rho < R_{n+1}, \qquad \Theta(\rho) - \pi = 2 \arccos \frac{R_n}{\rho};$$

$$\text{si } \rho = R_{n+1}, \qquad \Theta(R_{n+1}) = \Theta(R_n) = \pi.$$

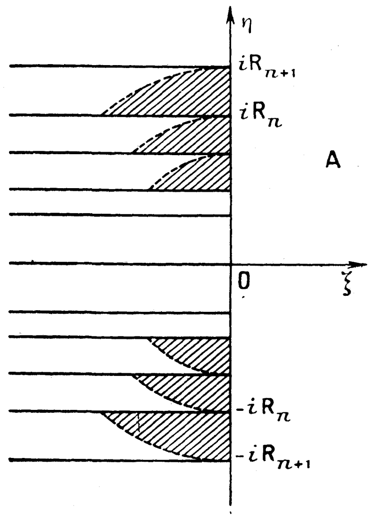

Fig. 13.

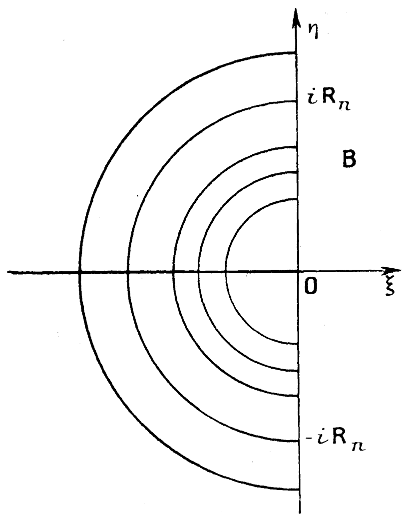

Fig. 14.

Il existe deux constantes positives k et k' telles que

$$\int_{R_n}^{R_{n+1}} [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho} > k \left[\arccos \frac{R_n}{R_{n+1}} \right]^3 > k' \delta_n^{\frac{3}{2}}.$$

La condition suffisante de M. Ahlfors [convergence de l'intégrale (36)] exigerait donc la convergence de la série $\sum_{1=n}^{\infty} \delta_n^{\frac{3}{2}}$ ce qui est plus restrictif que la convergence de $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$. Quant à la convergence de l'intégrale (35), ici équivalente à la convergence de l'intégrale (36), elle n'est nécessaire, d'après l'étude de M. Ahlfors, que si la fonction $\Theta(\rho)$ est à variation totale bornée, ce qui exige déjà que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Arc\,cos} \frac{R_n}{R_{n+1}}$ converge, c'est-à-dire que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\delta_n}$ converge.

Pour le domaine B, on a

$\Theta(\rho) = \pi$, s'il existe une valeur de n telle que $\rho = R_n$;

$\Theta(\rho) = 2\pi$, dans le cas contraire.

Donc, l'intégrale

$$\int_1^\rho [\Theta(\rho) - \pi] \frac{d\rho}{\rho} = \pi \log \rho$$

est toujours divergente lorsque $\rho \to \infty$, et les critères de M. Ahlfors sont ici inefficaces.

THÉORÈME (*résumé*). — *Si le domaine* Δ *satisfait aux conditions du théorème* I, *le rapport* $\frac{|\varphi(\zeta)|}{\rho(\zeta)}$ *reste borné lorsque* $\zeta \to \infty$.

Si le domaine Δ *satisfait aux conditions du théorème* II, *le rapport* $\frac{\rho(\zeta)}{|\varphi(\zeta)|}$ *reste borné lorsque* $\zeta \to \infty$.

Si le domaine Δ *satisfait à la fois aux conditions* I *et* II, *il est valable* (¹).

L'inégalité d'Ahlfors ainsi affinée permet dans certaines applications d'obtenir des résultats plus précis, par exemple dans la démonstration du théorème de M. Denjoy sur le nombre des valeurs asymptotiques des fonctions entières. Supposons que la fonction entière $F(\zeta)$ ait une limite lorsque ζ décrit un continu Γ tel que celui représenté sur la figure 15, possédant une double infinité de points ζ_n, ζ'_n satisfaisant aux conditions du théorème II. Le

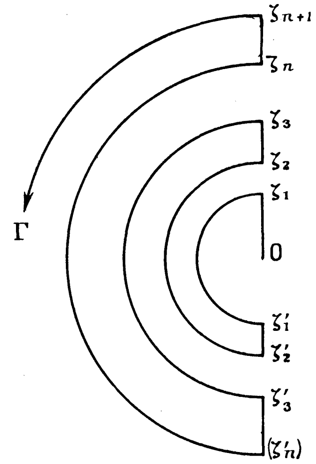

Fig. 15.

domaine Δ formé des points du plan extérieurs à Γ est contenu dans un domaine valable Δ_2. Si le domaine Δ est sans plis, on peut le représenter conformément sur le demi-plan D de manière que $\frac{|\zeta|}{|\varphi(\zeta)|}$ reste borné. La fonction $G(z) = F[f(z)]$ est définie dans D et satisfait aux conditions du théorème de Lindelöf. On a

(¹) Dans une première étude, fondée uniquement sur la mesure conforme (*C. R. Acad. Sc.*, t. 212, 1941, p. 977), nous avions établi des conditions du même type, mais plus restrictives.

donc, si $M(\rho)$ désigne le maximum de $|F(\zeta)|$ sur le cercle $|\zeta| = \rho$, $\overline{\lim} \frac{\log M(\rho)}{\rho} > 0$. La fonction $F(\zeta)$ est d'ordre 1 au moins, alors que l'ordre minimum fourni par les conditions de M. Ahlfors est seulement $\frac{1}{2}$.

Discussion des résultats. Conditions nécessaires.

45. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une dérivée angulaire est la convergence de l'intégrale (39). Or, à notre connaissance, les conditions géométriques suffisantes établies jusqu'ici reviennent à la convegence *absolue* de cette intégrale : c'est bien ce qui se passe dans le cas, le plus fréquemment étudié, où le domaine Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$ et où l'on a

$$g(y) > 0, \quad g(-y) < 0,$$

ou si le domaine Δ contient ce demi-plan $[g(y) < 0,\ g(-y) > 0]$. Ces conditions sont donc trop restrictives. Nous allons montrer qu'elles permettent une conclusion plus précise que l'existence d'une dérivée angulaire.

THÉORÈME. — *La convergence absolue de l'intégrale* (39) *est la condition nécessaire et suffisante pour que, si $z = x$ tend vers l'infini sur l'axe réel, la fonction* $\log \frac{|f(x)|}{x}$ *ait non seulement une limite finie, mais une variation totale finie.*

Démonstration. — Examinons d'abord les deux cas particuliers :

a. Δ est contenu dans le demi-plan $\xi > 0$. D'après (38) on a

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{y}{x_1^2 + y^2} - \frac{y}{x_0^2 + y^2} \right] [g(y) - g(-y)]\, dy,$$

donc, si $x_1 > x_0$,

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} \leqq 0,$$

la fonction $\log \frac{|f(x)|}{x}$ *est non croissante.*

b. Δ contient le demi-plan $\xi > 0$. On aura cette fois, si $x_1 > x_0$,

$$\log \frac{|f(x_1)|}{x_1} - \log \frac{|f(x_0)|}{x_0} \geqq 0,$$

la fonction $\log \frac{|f(x)|}{x}$ *est non décroissante.*

Dans le cas général, puisque l'intégrale (39) est absolument convergente, on peut la différentier sous le signe $\int$.

$$\Phi(x) = \log \frac{|f(x)|}{x} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{1+y^2}\right][g(y)-g(-y)]\,dy,$$

$$|\Phi'(x)| \leqq \frac{2x}{\pi}\int_0^\infty \frac{y|g(y)-g(-y)|\,dy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\int_0^\infty |\Phi'(x)|\,dx < \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y|g(y)-g(-y)|}{x^2+y^2}$$

$$< \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y|g(y)-g(-y)|}{1+y^2}\,dy < \infty.$$

La variation totale de $\Phi(x)$ est bornée. C. Q. F. D.

46. L'exemple de M. Ahlfors nous a montré, dans un cas particulier, la portée du théorème I. Pour discuter les résultats du théorème II, nous nous placerons dans le cas d'un domaine Δ sans plis, contenant le demi-plan $\xi > 0$, symétrique par rapport à l'axe réel et limité par un arc de Jordan continu, auquel cas $g(y) = -g(-y) < 0$, et sur la frontière $\rho = |f(iy)| = |f(-iy)|$ est fonction continue non décroissante de $y > 0$.

Enfin nous utiliserons le lemme suivant :

LEMME. — $G(X)$ *étant une fonction continue non négative pour* $X \geqq 0$, *si l'intégrale* $\int_0^\infty G(X)\,dX$ *est convergente, on peut trouver une suite croissante de valeurs de* X : $X_1, X_2, \ldots X_n \ldots$ $(X_n \to +\infty)$ *telle que les séries* $\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1}-X_n)^2$ *et* $\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1}-X_n)\,G(X_{n+1})$ *soient simultanément convergentes.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que si l'on connaît une suite X_n relative à une fonction $H(X)$ constamment supérieure à $G(X)$, la même suite convient pour $G(X)$. Nous allons déterminer une suite X_n relative à la fonction $H(X)$ égale, pour chaque valeur de X, au plus grand des deux nombres $G(X)$ et $\frac{1}{X^2}$. L'intégrale (40) $\int_1^\infty H(X)\,dX$ est évidemment convergente. La suite X_n sera déterminée par récurrence (*fig.* 16) : X_n étant supposé connu, nous prendrons pour X_{n+1} l'abscisse du premier point de rencontre B_n de la demi-droite $Y = X - X_n (X > X_n)$, issue du point A_n d'abscisse X_n de l'axe OX, avec la courbe $Y = H(X)$. Soit A_{n+1} la projection de B_n sur OX. Le triangle $T_n(A_n A_{n+1} B_n)$ est tout entier dans la région définie par $0 \leqq Y \leqq H(X)$, $X > 0$. Son aire est $\frac{1}{2}(X_{n+1}-X_n)\,H(X_{n+1})$. Or $G(X_{n+1}) \leqq H(X_{n+1}) = X_{n+1} - X_n$. On prendra $X_1 \geqq 1$ quelconque. La somme des aires des triangles T_n est bornée par l'intégrale (40). La convergence des deux séries en résulte immédiatement. Il suffit de montrer que X_n tend vers l'infini. Or $X_{n+1} - X_n = H(X_{n+1}) \geqq X_{n+1}^{-2}$. Donc X_n ne peut avoir aucune limite finie. C. Q. F. D.

De la convergence de l'intégrale $\int_1^\infty g(y)\frac{dy}{y}$, nécessaire à l'existence d'une dérivée angulaire, on déduit alors l'existence d'une suite croissante y_1, $y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ($y_n \to \infty$) telle que si l'on pose

$$\theta_n = g(y_n), \qquad d_n = \log \frac{y_{n+1}}{y_n},$$

les séries $\sum_{n=1}^{\infty} d_n \theta_{n+1}$ et $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$ convergent.

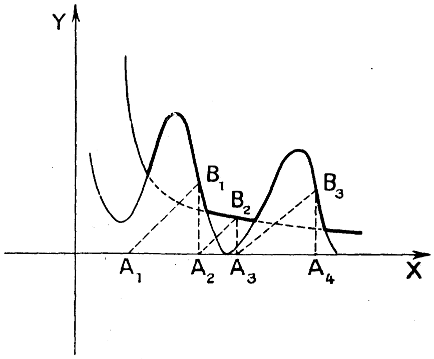

Fig. 16.

Soit

$$\zeta_n = \varphi(iy_n) = R_n e^{i\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)}, \qquad \zeta'_n = \varphi(-iy_n) = R_n e^{-i\left(\theta_n + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Posons

$$\delta_n = \log \frac{R_{n+1}}{R_n}$$

La méthode de la mesure harmonique permet de montrer que le rapport $\frac{\delta_n}{d_n}$ reste borné lorsque $n \to \infty$. Donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n$ convergent. Or, d'après le théorème II, il suffit, pour que le domaine Δ soit valable, qu'il existe sur sa frontière une suite de points ζ_n (auxquels on associe leurs symétriques ζ'_n) pour lesquels les trois séries $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_{n+1} \delta_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} |\delta_{n+1} - \delta_n|$ soient convergentes. *Seule la convergence de la troisième série pourrait donc ne pas être nécessaire :* mais c'est une condition de régularité qu'il semble difficile d'éliminer.