Annales scientifiques de l'É.N.S.

N. E. Nörlund

Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 35-54
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__35_0>

SUR

LES FORMULES D'INTERPOLATION

DE STIRLING ET DE NEWTON

PAR N.-E. NÖRLUND

à Copenhague

(*suite*)

Prolongement analytique.

13. Les deux exemples que nous venons de considérer montrent qu'on peut quelquefois augmenter le domaine de convergence de la série de Newton en remplaçant la variable z par une fonction linéaire de z. J'ai déjà attiré l'attention sur ces transformations linéaires dans un Mémoire précédent ([1]) et je vais ici ajouter quelques mots sur ce sujet. Soit $\Phi(z)$ une fonction qui se représente par une série de la forme

$$\Phi(z)=\sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{z-1}{s}. \tag{1}$$

On sait trouver deux nombres α et β tels que la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe pour $\sigma \geqq \alpha$ et satisfait à l'inégalité

$$|\Phi(\alpha+r e^{i\nu})| < e^{r\psi(\nu)}(1+r)^{\beta+\varepsilon(r)}, \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \nu \geqq -\frac{\pi}{2}, \tag{2}$$

où $\varepsilon(r)$ tend uniformément vers zéro quand $r \to \infty$. Nous avons vu que la série (1) converge pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$. Soit ρ un nombre réel et considérons la fonction

$$\Phi_1(z) = \Phi(z-\rho).$$

([1]) *Acta math.*, t. XXXVII, 1914, p. 327-387. *Voir* aussi CARLSON, *loc. cit.*, p. 53-57.

Posons $\bar{\alpha} = \alpha + \rho$. L'inégalité (2) entraîne que

$$|\Phi_1(\bar{\alpha} + r e^{i\nu})| < e^{r\psi(\nu)}(1+r)^{\beta+\varepsilon},$$

et $\Phi_1(z)$ est holomorphe pour $\sigma \geqq \bar{\alpha}$. La fonction $\Phi_1(z)$ admet donc un développement de la forme

$$\Phi_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \binom{z-1}{s},$$

qui converge pour $\sigma > \bar{\alpha}$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$. C'est-à-dire que

$$\Phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \binom{z+\rho-1}{s}, \tag{3}$$

et cette série converge pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2} - \rho$. En choisissant ρ suffisamment grand on peut donc obtenir que la série (3) converge pour $\sigma > \alpha$. Le développement (3) subsiste d'ailleurs si l'on donne à ρ des valeurs complexes quelconques, il faut seulement dans les inégalités remplacer ρ par la partie réelle de ρ.

Soit α_0 le plus petit nombre tel que la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe pour [1] $\sigma > \alpha_0$. Soit λ_ρ l'abscisse de convergence de la série (3), ρ étant supposé réel. Si le nombre α est suffisamment grand la fonction $\Phi(z)$ satisfait à une inégalité de la forme (2). Soit $\mu = \mu(\alpha)$ la borne inférieure des nombres β pour lesquels cette inégalité reste vraie. $\mu(\alpha)$ est évidemment une fonction non croissante de α qui est continue dans tout intervalle où elle reste finie. Diverses circonstances peuvent se présenter :

1° $\mu(\alpha) = -\infty$ pour $\alpha > \alpha_0$. En ce cas on aura $\lambda_\rho = \alpha_0$ quel que soit ρ.

2° Si $\mu(\alpha) > -\infty$, cette fonction peut être bornée supérieurement ou non pour $\alpha > \alpha_0$. Admettons d'abord que le premier cas se présente. La fonction $\mu(\alpha) + \frac{1}{2} - \alpha$ est finie et décroissante pour $\alpha > \alpha_0$. Nous aurons l'inégalité la plus précise en déterminant α par

(1) Si la fonction est entière on aura $\alpha_0 = -\infty$.

l'équation

$$\mu(\alpha) + \frac{1}{2} - \alpha = \rho.$$

Cette équation définit α comme fonction de ρ. La fonction $\alpha(\rho)$ est décroissante pour $\rho < \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0$ et elle tend vers α_0 quand ρ tend vers $\mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0$. Cela posé, on conclut des résultats du paragraphe 10 que

$$\alpha(\rho) - 1 \leqq \lambda_\rho \leqq \alpha(\rho) \qquad \text{pour } \rho < \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_0 \qquad \text{pour } \rho \geqq \mu(\alpha_0) + \frac{1}{2} - \alpha_0.$$

En prenant ρ suffisamment grand la série (3) sera donc convergente dans le plus grand demi-plan où la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe.

3° Admettons maintenant que $\mu(\sigma)$ n'est pas bornée supérieurement pour $\sigma \geqq \alpha_0$. On sait trouver un nombre α_1 tel que, pour $\sigma \geqq \alpha_1 + \varepsilon$, la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe et la fonction $\mu(\sigma)$ est finie pendant que l'une au moins de ces conditions cesse d'être satisfaite pour $\sigma \geqq \alpha_1 - \varepsilon$ quelque petit que soit le nombre positif ε. On aura $\alpha_1 \geqq \alpha_0$. La fonction $\mu(\alpha)$ peut tendre vers une limite finie ou vers l'infini quand α tend vers α_1 en décroissant.

Si le premier cas se présente on trouvera :

$$\alpha(\rho) - 1 \leqq \lambda_\rho \leqq \alpha(\rho) \qquad \text{pour } \rho < \mu(\alpha_1 + 0) + \frac{1}{2} - \alpha_1,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour } \rho \geqq \mu(\alpha_1 + 0) + \frac{1}{2} - \alpha_1.$$

Par conséquent dans la bande $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$, la série (3) diverge quel que soit ρ.

Si $\mu(\alpha)$ augmente indéfiniment quand $\alpha \to \alpha_1$, la fonction décroissante $\alpha(\rho)$ tendra vers α_1 quand $\rho \to \infty$ et l'on aura toujours

$$\alpha_1 < \lambda_\rho \leqq \alpha(\rho).$$

L'abscisse de convergence λ_ρ tendra vers α_1 quand $\rho \to \infty$, mais la limite α_1 n'est atteinte pour aucune valeur finie de ρ.

Diverses autres circonstances peuvent avoir lieu. Posons comme plus haut

$$h_\alpha(v) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\log |\Phi(\alpha + re^{iv})|}{r}. \tag{4}$$

Si $h_\alpha\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) < \frac{\pi}{2}$ pour $\alpha > \alpha_1$, on voit sans peine que la fonction $\mu(\alpha)$ sera constante pour $\alpha > \alpha_1$. La fonction $\alpha(\rho)$ se réduira par conséquent à une fonction linéaire

$$\alpha(\rho) = \mu + \frac{1}{2} - \rho.$$

En ce cas on aura donc :

$$\mu - \rho \leqq \lambda_\rho \leqq \mu + \frac{1}{2} - \rho \qquad \text{pour} \qquad \rho < \mu + \frac{1}{2} - \alpha_1,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geqq \mu + \frac{1}{2} - \alpha_1.$$

Si de plus $h_\alpha(v) < \psi(v)$, en exceptant un nombre fini de points γ de la nature indiquée dans le paragraphe 11, il résulte de l'analyse de ce paragraphe que

$$\lambda_\rho = \mu - \rho \qquad \text{pour} \qquad \rho < \mu - \alpha_1,$$

$$\lambda_\rho = \alpha_1 \qquad \text{pour} \qquad \rho \geqq \mu - \alpha_1.$$

4° Il nous reste à considérer la bande $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$ où la série (3) diverge quel que soit ρ. Pour obtenir le prolongement de la fonction dans une partie de cette bande nous allons avoir recours à une autre transformation. Soit ω un nombre positif et plus petit que 1. L'équation (4) entraîne que

$$|\Phi(\alpha + \omega re^{iv})| < e^{r\omega[h_\alpha(v)+\varepsilon]}.$$

Si $\alpha > \alpha_1$, on aura

$$h_\alpha(v) \leqq \psi(v) \qquad \text{pour} \qquad \frac{\pi}{2} \geqq v \geqq -\frac{\pi}{2}.$$

Comme $\psi(v)$ est positif il en résulte que

$$\omega h_\alpha(v) < \psi(v),$$

le signe d'égalité étant exclu. Par conséquent, la fonction $\Phi(\omega z)$

admet un développement de la forme

$$\Phi(\omega z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \binom{z-1}{s}$$

qui converge pour $\sigma > \frac{\alpha_1}{\omega}$. En remplaçant z par $\frac{z}{\omega}$, on trouvera

$$\Phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\ldots(z-s\omega)}{1.2.3\ldots s}. \tag{5}$$

Toute fonction qui se représente par une série de la forme (1) *admet donc* a fortiori *un développement de la forme* (5) *où* $0 < \omega < 1$. Désignons par $\lambda(\omega)$ l'abscisse de convergence de la série (5). De ce que nous venons de dire il résulte que

$$\alpha_0 \leqq \lambda(\omega) \leqq \alpha_1 \leqq \lambda(1).$$

Mais on en conclut sans peine qu'on aura toujours

$$\lambda(\omega_1) \leqq \lambda(\omega), \qquad \text{si} \qquad 0 < \omega_1 < \omega. \tag{6}$$

Quand ω tend vers zéro la fonction $\lambda(\omega)$ tendra donc vers une limite qui est supérieure ou égale à α_0. Nous allons rattacher cette abscisse limite à une propriété analytique de la fonction $\Phi(z)$. Dans ce but considérons la fonction $\Phi(z)$ sur une droite parallèle à l'axe imaginaire et passant par le point σ. On aura, si σ est suffisamment grand,

$$|\Phi(\sigma + i\tau)| = o(e^{k|\tau|}).$$

Soit ξ la borne inférieure des nombres k pour lesquels cette équation est satisfaite. $\xi = \xi(\sigma)$ est une fonction de σ qui satisfait aux inégalités

$$0 \leqq \xi(\sigma) \leqq \frac{\pi}{2} \qquad \text{pour} \qquad \sigma > \alpha_1.$$

La dernière de ces inégalités résulte de l'équation $\psi\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, et la première inégalité est une conséquence d'un théorème de E. Phragmén et E. Lindelöf (¹). Dans l'intervalle $\alpha_0 < \sigma < \alpha_1$ la fonc-

(¹) *Sur une extension d'un principe classique de l'Analyse* (*Acta math.*, t. XXXI, 1908, p. 399-400).

tion $\xi(\sigma)$ peut être bornée ou non. On sait donc trouver un nombre α'_0 tel que, pour $\sigma \geqq \alpha'_0 + \varepsilon$, la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe et la fonction $\xi(\sigma)$ est bornée supérieurement, pendant que l'une au moins de ces conditions cesse d'être satisfaite pour $\sigma > \alpha'_0 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε. On aura $\alpha_0 \leqq \alpha'_0 \leqq \alpha_1$. Si $\alpha'_0 = \alpha_1$, l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ est égale à α_1 quelque petit que soit ω et notre transformation ne peut servir à rien. Admettons donc que $\alpha'_0 < \alpha_1$. Nous avons déjà vu que la fonction $\xi(\sigma)$ reste comprise entre les limites o et $\frac{\pi}{2}$, si $\sigma > \alpha_1$. Pour ces valeurs de σ elle peut d'ailleurs prendre une valeur quelconque dans l'intervalle indiqué comme le montrent les trois exemples du paragraphe 12. De la définition du nombre α_1 on conclut que $\xi(\sigma) \geqq \frac{\pi}{2}$ dans un point au moins dans l'intervalle $\alpha_1 - \varepsilon \leqq \sigma \leqq \alpha_1$. Cela posé, on démontre qu'il existe un nombre β tel que la fonction $\xi(\sigma)$ est positive, décroissante, continue et convexe dans l'intervalle $\alpha'_0 < \sigma < \beta$ pendant qu'elle reste constante pour $\sigma \geqq \beta$. Ceci résulte d'une analyse due à E. Lindelöf (1) et dont s'est servi récemment G.-H. Hardy (2) dans un cas qui ne diffère que légèrement de notre cas.

Comme la fonction est non croissante on aura nécessairement

$$\xi(\sigma) \geqq \frac{\pi}{2} \qquad \text{pour} \qquad \alpha'_0 < \sigma < \alpha_1.$$

D'autre part, nous avons vu que la fonction $\xi(\sigma)$ ne peut pas dépasser la valeur $\frac{\pi}{2}$ pour $\sigma > \alpha_1$. De la continuité il résulte donc que

$$\xi(\alpha_1) = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Désignons par α'_1 le plus petit des nombres α_1 et β. On aura donc

$$\alpha_0 \leqq \alpha'_0 \leqq \alpha'_1 \leqq \alpha_1.$$

---

(1) *Quelques remarques sur la croissance de la fonction* $\zeta(s)$ (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. XXXII, 1908, p. 341-356).

(2) *The application of Abel's method of summation to Dirichlet's series* (*Quart. J. pure appl. math.*, t. XLVII, 1916, p. 178-180).

Dans l'intervalle $\alpha'_0 < \sigma < \alpha'_1$ la fonction $\xi(\sigma)$ est toujours décroissante et supérieure à $\frac{\pi}{2}$. De plus, l'équation (7) entraîne que

$$\xi(\alpha'_1) = \frac{\pi}{2}.$$

Si $\alpha'_1 < \alpha_1$, la fonction $\xi(\sigma)$ reste constante et égale à $\frac{\pi}{2}$ pour $\sigma > \alpha'_1$. Mais si $\alpha'_1 = \alpha_1 \leqq \beta$, la fonction $\xi(\sigma)$ décroît encore dans l'intervalle $\alpha'_1 < \sigma < \beta$ et, pour $\sigma \geqq \beta$, elle reste constamment égale à $\xi(\beta)$ où

$$0 \leqq \xi(\beta) \leqq \frac{\pi}{2}.$$

$\xi(\beta)$ peut d'ailleurs avoir une valeur quelconque dans cet intervalle. Si $\beta = \infty$, la fonction est toujours décroissante.

Considérons maintenant l'équation

$$\xi(\sigma) = \frac{\pi}{2\omega}, \tag{8}$$

où ω est positif et plus petit que 1. Cette équation détermine uniquement σ comme fonction de ω. $\xi(\sigma)$ est définie pour $\sigma > \alpha'_0$. Quand σ décroît et tend vers α'_0, la fonction $\xi(\sigma)$ tend vers une limite finie, soit ξ_0, ou elle augmente indéfiniment. Posons dans le premier cas

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2\xi_0}$$

et dans le second cas $\omega_0 = 0$. A chaque valeur de ω dans l'intervalle $0 \leqq \omega_0 < \omega < 1$, il correspond une et une seule valeur de σ dans l'intervalle $\alpha'_0 < \sigma < \alpha'_1$.

Ces préliminaires posés reprenons la série (5) et déterminons l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ de cette série. Pour fixer les idées, nous supposerons que la série converge pour $\omega = 1$ et que $\alpha'_0 < \alpha_1$. Si $\sigma > \alpha_1$, on aura par conséquent

$$h_\sigma(\varphi) \leqq \psi(\varphi) \qquad \text{pour} \qquad \frac{\pi}{2} \geqq \varphi \geqq -\frac{\pi}{2}.$$

Soit $\omega_0 < \omega < 1$. Soit σ_ω la valeur de σ qui satisfait à l'équation (8). Si $\sigma > \sigma_\omega$ on aura $\xi(\sigma) < \frac{\pi}{2\omega}$. On sait donc trouver un nombre positif ε

tel que

$$|\Phi(\sigma+i\tau)| < e^{\left(\frac{\pi}{2\omega}-\varepsilon\right)|\tau|}$$

pour toute valeur de $|\tau|$ qui est suffisamment grande. On en conclut que

$$h_\sigma(\nu) < \frac{\psi(\nu)}{\omega}, \qquad \text{si} \qquad \sigma > \sigma_\omega.$$

Mais cette inégalité entraîne que la série (5) converge pour $\sigma > \sigma_\omega$. On a donc

$$\lambda(\omega) \leqq \sigma_\omega.$$

D'autre part, si $\sigma < \sigma_\omega$ on aura $\xi(\sigma) > \frac{\pi}{2\omega}$. On sait donc trouver un nombre positif ε tel que

$$|\Phi(\sigma+i\tau)| > e^{\left(\frac{\pi}{2\omega}+\varepsilon\right)|\tau|}$$

pour une infinité de valeurs de τ de modules indéfiniment croissants. La fonction $h_\sigma(\nu)$ dépassera donc la fonction $\frac{1}{\omega}\psi(\nu)$ dans un des points $\nu = \pm\frac{\pi}{2}$. La série (5) diverge par conséquent pour $\sigma < \sigma_\omega$. On aura donc

$$\lambda(\omega) = \sigma_\omega$$

pour toute valeur de ω dans l'intervalle $\omega_0 < \omega < 1$. Quand ω tend vers ω_0 en décroissant l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ tendra donc vers α'_0. Enfin si $0 < \omega < \omega_0$, on aura en vertu de l'inégalité (6)

$$\lambda(\omega) \leqq \lambda(\omega_0) = \alpha'_0.$$

Mais de la définition du nombre α'_0 il résulte que la série (5) diverge si $\sigma < \alpha'_0$. Par conséquent,

$$\lambda(\omega) = \alpha'_0 \qquad \text{pour} \qquad 0 < \omega \leqq \omega_0.$$

La fonction $\lambda(\omega)$ est donc entièrement déterminée par l'équation

$$\xi[\lambda(\omega)] = \frac{\pi}{2\omega}.$$

Des propriétés de la fonction ξ on conclut que $\lambda(\omega)$ est une fonction [1] croissante et continue à l'intérieur de l'intervalle $\omega_0 < \omega < 1$. Mais elle est discontinue dans le point $\omega = 1$, car quand ω tend vers 1 la fonction $\lambda(\omega)$ tendra vers α'_1 et nous avons vu que ce nombre est en général inférieur à $\lambda(1) = \lambda$. Par conséquent, quand ω décroît en partant du point 1, l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ fait d'abord un saut brusque, puis elle décroît continuellement jusqu'à ce que ω arrive dans le point ω_0, enfin elle reste constante et égale à α'_0 dans l'intervalle $0 < \omega \leqq \omega_0$. Si $\omega_0 = 0$, l'abscisse de convergence décroît toujours vers α'_0 sans atteindre cette limite pour aucune valeur positive de ω.

Pour fixer les idées nous avons supposé que la série diverge pour $\omega > 1$. Mais cette hypothèse n'a rien d'essentiel et l'on peut la supprimer. Il suffit d'ailleurs de multiplier z par un nombre positif pour remplacer le point $\omega = 1$ par un point quelconque ω_1 sur l'axe positif.

En résumé, si la série (5) converge pour une valeur positive de ω, elle convergera pour toute valeur positive de ω qui est inférieure à un certain nombre [2] ω_1, mais non pas pour $\omega > \omega_1$. Dans l'intervalle $0 < \omega < \omega_1$ l'abscisse de convergence $\lambda(\omega)$ est une fonction continue de ω dont nous avons déterminé la valeur précise à l'aide de certaines propriétés analytiques simples de la fonction $\Phi(z)$. Au contraire, dans le point ω_1 la fonction $\lambda(\omega)$ est en général discontinue et le nombre non négatif $\lambda(\omega_1) - \lambda(\omega_1 - 0)$ peut être infiniment grand. L'abscisse $\lambda(\omega_1)$ n'est pas un nombre caractéristique pour la fonction $\Phi(z)$. La détermination du nombre $\lambda(\omega_1)$ à l'aide des propriétés analytiques de la fonction $\Phi(z)$ présente des difficultés sérieuses. Nous avons dû nous borner à indiquer certaines inégalités, d'ailleurs assez resserrées, et l'on ne peut probablement pas aller plus loin.

Quand ω décroît vers zéro, l'abscisse $\lambda(\omega)$ tend vers α'_0 qui est un

---

(1) De plus $\lambda\left(\frac{1}{\omega}\right)$ est une fonction convexe et décroissante de ω. Ceci résulte immédiatement des propriétés des fonctions convexes [*cf.* J.-L.-W.-V. JENSEN, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes* (*Acta math.*, t. XXX, 1906, p. 191)].

(2) Si $\omega_1 = \infty$, la série converge pour toute valeur positive de ω. Pour qu'il en soit ainsi il faut que $h(\nu) \leqq 0$, t il suffit que $h(\nu) < 0$.

nombre caractéristique pour la fonction $\Phi(z)$. En prenant le nombre positif ω suffisamment petit la série converge dans tout demi-plan $\sigma > \alpha$ où la fonction est holomorphe et d'ordre fini.

De plus, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\Phi(z)$ *admette un développement de la forme* (5), *c'est qu'il existe un nombre* α *tel que la fonction est holomorphe dans le demi-plan* $\sigma > \alpha$ *et y satisfait à l'inégalité*

$$|\Phi(z)| < \text{const.}\, e^{k|z|}, \tag{9}$$

k étant un nombre positif. En effet, puisque $\psi(v) \geqq \log 2$, il suffit de prendre ω inférieur à $\frac{\log 2}{k}$ pour obtenir la convergence de la série. D'autre part, puisque $\psi(v) \leqq \frac{\pi}{2}$, la convergence de la série entraîne que l'inégalité (9) est satisfaite pour $k > \frac{\pi}{2\omega}$.

Les résultats que nous venons de trouver présentent quelque analogie avec ceux qu'ont obtenus H. Bohr (¹) et G.-H. Hardy (²) pour les séries de Dirichlet en y appliquant les méthodes de sommation Cesàro et d'Abel. Ces méthodes de sommation permettent aussi de prolonger la fonction $\Phi(z)$ en dehors du domaine de convergence de la série (1), mais il paraît plus avantageux de se servir des transformations linéaires que nous avons considérées. D'ailleurs l'analogie est bien plus grande encore entre la série de Newton et la série de facultés et il paraît intéressant de rapprocher ces deux séries l'une à l'autre. (*Cf.* mon Mémoire susmentionné sur les séries de facultés.)

Formules de quadrature et de différentiation mécanique.

14. Il arrive souvent qu'on ait besoin de calculer les dérivées ou l'intégrale d'une fonction à l'aide du tableau de ses différences successives. Je vais étudier les formules dont on aura à se servir et je

---

(¹) *Bidrag til de Dirichlet'ske Räkkers Theori* (*Thèse*, Copenhague, 1910; *Ueber die Summabilitätsgrenzgerade der Dirichlet'schen Reihen* (*Sitzungsb. Akad. Wien.*, t. CXIX, II *a*, 1910, p. 1391-1397).

(²) *Loc. cit.* (*Quart. J. pure appl. math.*, t. XLVII, 1916, p. 176-192).

montrerai en particulier que les coefficients de ces développements s'expriment d'une manière très simple à l'aide de certaines fonctions connues. Soit $\Phi(z)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\sigma \geqq \alpha$ et y satisfaisant à l'inégalité

$$(1) \qquad |\Phi(z)| < e^{k|z|}.\,\text{const.},$$

k étant un nombre positif. Nous avons vu que cette fonction se représente par la série de Newton

$$(2) \qquad \Phi(x+z) = \sum_{s=0}^{\infty} (z-\omega)(z-2\omega)\dots(z-s\omega)\,\Delta_\omega^s\,\Phi(x+\omega),$$

au moins si ω est positif et plus petit que $\frac{\log 2}{k}$. Reprenons les notations du paragraphe précédent et admettons que $0 < \omega < \omega_1$. A la fonction $\Phi(z)$ il appartient une fonction continue $\lambda(\omega)$ qui satisfait aux inégalités $\alpha'_0 \leqq \lambda(\omega) < \alpha'_1$. Si en particulier $\alpha'_0 = \alpha'_1$ la fonction $\lambda(\omega)$ est constamment égale à α'_0. La série (2) converge si $\mathfrak{R}(x+z) > \lambda(\omega)$, elle diverge si $\mathfrak{R}(x+z) < \lambda(\omega)$. Supposons que $\mathfrak{R}(x) > \lambda(\omega)$. Cette inégalité entraîne que la série (2) converge uniformément par rapport à z dans un petit voisinage du point $z = 0$. Dérivons par rapport à z et posons ensuite $z = 0$; on trouvera

$$(3) \qquad \Phi'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-\omega)^s \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s+1}\right) \Delta_\omega^{s+1}\,\Phi(x+\omega).$$

Cette série est par conséquent convergente si $\mathfrak{R}(x) > \lambda(\omega)$. D'autre part, si $\mathfrak{R}(x) < \lambda(\omega)$, la série (2) diverge pour $z = 0$, il en est donc de même de la série (3). Cette série admet donc le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > \lambda(\omega)$ comme domaine de convergence. Sur la frontière $\mathfrak{R}(x) = \lambda(\omega)$ elle peut être convergente ou non.

De même dérivons la série (2) par rapport à z, posons ensuite $z = \omega$ et remplaçons x par $x - \omega$; on trouvera

$$\Phi'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^s}{s+1} \Delta_\omega^{s+1}\,\Phi(x);$$

la même analyse montre que cette série converge ou diverge suivant que la partie réelle de x est supérieure ou inférieure à $\lambda(\omega)$. Pour trouver l'expression de la dérivée d'ordre n remarquons que la dérivée d'une factorielle s'exprime par les polynomes de Bernoulli de la manière suivante :

$$D_z^n[(z-\omega)(z-2\omega)\dots(z-s\omega)] = \omega^{s-n}\frac{s!}{(s-n)!}\,B_{s-n}^{(s+1)}\left(\frac{z}{\omega}\right). \tag{4}$$

Je prie le lecteur de vouloir bien se reporter à mon Mémoire sur les polynomes de Bernoulli ([1]) où l'on trouve cette relation élémentaire et où j'ai étudié les nombres de Bernoulli $B_s^{(n)}$ et certains autres membres rationnels $D_s^{(n)}$, qui s'y rattachent, et dont il sera question dans la suite. En dérivant la série (2) n fois par rapport à z et en posant ensuite z égal à zéro ou égal à ω on trouvera

$$\Phi^{(n)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s+n+1)}}{s!}\,\Delta_\omega^{s+n}\,\Phi(x+\omega), \tag{5}$$

$$\Phi^{(n)}(x) = n\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s+n)}}{s!\,(s+n)}\,\Delta_\omega^{s+n}\,\Phi(x). \tag{6}$$

La dernière série résulte de ce que

$$B_s^{(s+n+1)}(1) = \frac{n}{s+n}\,B_s^{(s+n)}. \tag{7}$$

Il va sans dire que ces deux développements admettent encore le demi-plan $\mathfrak{R}(x) > \lambda(\omega)$ comme domaine de convergence. On supposera toujours que ω est inférieur à ω_1. Si $\omega = \omega_1$, il peut arriver que le domaine de convergence de la série (5) est plus grand que celui de la série (6). Soit en particulier $\Phi(x) = \frac{1}{x}$, on trouvera la série de facultés

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\binom{s+n-1}{s}B_s^{(s+n)}}{(x+1)(x+2)\dots(x+s+n)},$$

qui converge si la partie réelle de x est positive.

([1]) *Acta math.*, t. XLIII, 1920, p. 187.

Passons aux formules de quadratures et rappelons que

$$\frac{dB_s^{(n)}(z)}{dz} = sB_{s-1}^{(n)}(z).$$

Puisque

$$(8) \qquad (z-\omega)(z-2\omega)\ldots(z-s\omega) = \omega^s B_s^{(s+1)}\left(\frac{z}{\omega}\right),$$

on obtient, en intégrant,

$$(9) \qquad \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (z+t-\omega)(z+t-2\omega)\ldots(z+t-s\omega)\,dt = \omega^s B_s^{(s)}\left(\frac{z}{\omega}\right).$$

En intégrant n fois de suite on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^n}\int_0^\omega dt_n \ldots \int_0^\omega dt_2 \int_0^\omega \\ \times (z+t_1+t_2+\ldots+t_n-\omega)(z+t_1+\ldots+t_n-2\omega)\ldots \\ \times (z+t_1+\ldots+t_n-s\omega)\,dt_1 = \omega^s B_s^{(s-n+1)}\left(\frac{z}{\omega}\right).\end{aligned}$$

Cela posé, remplaçons dans l'équation (2)

$$z \quad \text{par} \quad z+\omega t_1+\omega t_2+\ldots+\omega t_n$$

et intégrons terme par terme par rapport aux variables $t_1 \ldots t_n$, ce qui est permis par cause de la convergence uniforme. En posant ensuite $z = 0$ on trouvera

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 \Phi(x+\omega t_1+\omega t_2+\ldots+\omega t_n)\,dt_1 \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\omega^s B_s^{(s-n+1)}}{s!} \Delta_\omega^s \Phi(x+\omega).\end{aligned}$$

Mais en posant $z = \omega$ on obtient, en tenant compte de l'équation (7),

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt_n \ldots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 \Phi(x+\omega t_1+\omega t_2+\ldots+\omega t_n)\,dt_1 \\ = n\sum_{s=0}^{n-1} \frac{\omega^s B_s^{(s-n)}}{s!(n-s)} \Delta_\omega^s \Phi(x) \\ + (-1)^n \frac{\omega^n}{n!} B_n \Delta_\omega^n \Phi(x) - n \sum_{s=n+1}^{\infty} \frac{\omega^s B_s^{(s-n)}}{s!(s-n)} \Delta_\omega^s \Phi(x).\end{aligned}$$

Pour $n=1$, ces intégrales itérées se réduisent à des intégrales simples et l'on trouvera

$$(10)\quad \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\Phi(z)\,dz=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s)}}{s!}\Delta_\omega^s\,\Phi(x+\omega),$$

$$(11)\quad \frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\Phi(z)\,dz=\Phi(x)+\frac{\omega}{2}\Delta_\omega\,\Phi(x)-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s-1)}}{s!(s-1)}\Delta_\omega^s\,\Phi(x).$$

Il résulte de notre analyse que ces séries convergent encore pour $\mathfrak{R}(x)>\lambda(\omega)$. En prenant ω suffisamment petit nos séries convergent donc pour toute valeur de x dont la partie réelle est plus grande que α'_0. S'il s'agit de calculer une intégrale étendue sur un intervalle de longueur l, on peut se servir directement de ces formules si l est très petit. Mais, en général, il est préférable de décomposer l'intervalle d'intégration en m parties égales, en posant $l=m\omega$, et d'appliquer les formules à chacune de ces m intégrales. En remplaçant x successivement par $x+\omega$, $x+2\omega$, $\ldots$, $x+(m-1)\omega$ dans les formules (10) et (11), et en ajoutant ensemble, on trouvera

$$\begin{aligned}\int_x^{x+m\omega}\Phi(z)\,dz= {}&\omega\sum_{s=1}^{m}\Phi(x+s\omega)\\ &+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s)}}{s!}\left\{\Delta_\omega^{s-1}\,\Phi[x+(m+1)\omega]-\Delta_\omega^{s-1}\,\Phi(x+\omega)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_x^{x+m\omega}\Phi(z)\,dz= {}&\omega\left\{\frac{1}{2}\Phi(x)+\Phi(x+\omega)+\Phi(x+2\omega)+\ldots\right.\\ &\left.+\Phi[x+(m-1)\omega]+\frac{1}{2}\Phi(x+m\omega)\right\}\\ &+\sum_{s=2}^{\infty}\frac{\omega^s B_s^{(s-1)}}{s!(s-1)}\left[\Delta_\omega^{s-1}\,\Phi(x)-\Delta_\omega^{s-1}\,\Phi(x+m\omega)\right].\end{aligned}$$

Laplace (¹) a déduit la dernière formule dans sa *Mécanique céleste* mais il n'a pas indiqué la condition de convergence. En posant, en particulier, $\Phi(x)=\frac{1}{x}$ dans les équations (10) et (11), on trouvera les

(¹) *Œuvres*, t. IV, Paris, 1880, p. 206-207.

séries de facultés suivantes :

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s B_s^{(s)}}{(x+1)(x+2)\ldots(x+s)},$$

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{x(x+1)}-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s-1}\,\frac{(-1)^s B_s^{(s-1)}}{x(x+1)\ldots(x+s)}.$$

On a ici $\alpha'_0=\alpha'_1=0$. L'abscisse de convergence de ces deux séries est donc égale à zéro.

15. Les formules de quadrature et de différentiation mécanique que nous venons de déduire mettent en jeu les différences qui descendent en diagonale dans le tableau des différences. Mais si l'on veut utiliser les différences qui figurent sur une ligne horizontale il faut avoir recours à la formule d'interpolation de Stirling :

$$(12)\qquad \begin{aligned}\Phi(x+z)={}&\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^2(z^2-\omega^2)(z^2-2^2\omega^2)\ldots[z^2-(s-1)^2\omega^2]}{(2s)!}\Delta_\omega^{2s}\Phi(x-s\omega)\\&+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z(z^2-\omega^2)(z^2-2^2\omega^2)\ldots(z^2-s^2\omega^2)}{(2s+1)!}\Delta_\omega^{2s+1}\nabla_\omega\Phi[x-(s+1)\omega],\end{aligned}$$

ou à la formule de Bessel :

$$(13)\qquad \begin{aligned}\Phi\left(x+z+\frac{\omega}{2}\right)={}&\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left[z^2-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\omega^2\right]}{(2s)!}\Delta_\omega^{2s}\nabla_\omega\Phi(x-s\omega)\\&+z\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left[z^2-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\omega^2\right]}{(2s+1)!}\Delta_\omega^{2s+1}\Phi(x-s\omega).\end{aligned}$$

Soit donc maintenant $\Phi(z)$ une fonction entière qui satisfait à l'inégalité (1) dans tout le plan. La fonction $\psi(v)$ qui figure dans le paragraphe 5 est supérieure ou égale à $\log(3+2\sqrt{2})$ quel que soit v. De l'analyse du paragraphe 6 résulte donc que ces deux séries convergent uniformément dans toute partie finie du plan des z pourvu que (¹)

$$(14) \qquad |\omega| < \frac{\log(3+2\sqrt{2})}{k}.$$

On peut donc dériver terme par terme. En dérivant les deux membres de l'équation (12) par rapport à z et en faisant $z=0$ on obtient

$$\Phi'(x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \omega^{2s} \frac{s!\,s!}{(2s+1)!} \Delta_\omega^{2s+1} \nabla_\omega \Phi[x-(s+1)\omega].$$

Pour trouver les dérivées d'ordre quelconque reprenons l'équation (4) et rappelons que le nombre rationnel $D_s^{(n)}$ satisfait à la relation (²)

$$D_s^{(n)} = 2^s B_s^{(n)}\left(\frac{n}{2}\right).$$

Par un calcul facile on en déduit les expressions suivantes des dérivées d'une factorielle dans le point $z=0$,

$$\frac{d^n[z(z^2-\omega^2)\ldots(z^2-s^2\omega^2)]}{dz^n} = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s+1-n} \frac{(2s+1)!}{(2s+1-n)!} D_{2s+1-n}^{(2s+2)},$$

$$\frac{d^n[z^2(z^2-\omega^2)]\ldots[z^2-(s-1)^2\omega^2]}{dz^n} = n\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s-n} \frac{(2s-1)!}{(2s-n)!} D_{2s-n}^{(2s)}.$$

Mais le nombre $D_s^{(n)}$ est égal à zéro, si s est impair. En dérivant la série de Stirling (12) par rapport à z et en faisant ensuite $z=0$ on obtient donc

$$\Phi^{(2n-1)}(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s} \frac{D_{2s}^{(2s+2n)}}{(2s)!} \Delta_\omega^{2s+2n-1} \nabla_\omega \Phi[x-(s+n)\omega],$$

$$\Phi^{(2n)}(x) = 2n \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s} \frac{D_{2s}^{(2s+2n)}}{(2s)!} \Delta_\omega^{2s+2n} \Phi[x-(s+n)\omega].$$

La formule de Bessel peut nous fournir un résultat tout semblable.

(¹) Si, en particulier, la fonction $\Phi(z)$ est du genre zéro, les séries (12) et (13) convergent donc pour toute valeur réelle ou complexe de ω.

(²) *Loc. cit.* (*Polynomes de Bernoulli*, p. 163).

En posant $z = 0$ dans cette formule on obtient d'abord

$$\Phi\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)}\Delta_\omega^{2s}\nabla_\omega\,\Phi(x-s\omega).$$

On fait usage de cette série quand on aura besoin de déduire, d'une Table avec l'intervalle ω, une autre Table dont l'intervalle est $\frac{\omega}{2^n}$.

En dérivant la série (13) par rapport à z on trouvera, pour $z = 0$,

$$\Phi'\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{1.3.5\ldots(2s-1)}{2.4.6\ldots(2s)}\,\frac{1}{2s+1}\,\Delta_\omega^{2s+1}\,\Phi(x-s\omega).$$

Pour trouver les dérivées d'ordre supérieur nous déduirons d'abord, de l'équation (4), les relations suivantes, où l'on a mis $z = 0$ après la différentiation :

$$\frac{d^n\left\{\left[z^2-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\omega^2\right]\right\}}{dz^n}$$
$$=\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s-n}\frac{(2s)!}{(2s-n)!}\,D_{2s-n}^{(2s+1)},$$

$$\frac{d^n\left\{z\left[z^2-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\omega^2\right]\right\}}{dz^n}$$
$$=n\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s-n+1}\frac{(2s)!}{(2s-n+1)!}\,D_{2s-n+1}^{(2s+1)}.$$

En dérivant par rapport à z dans la série (13) et en faisant ensuite $z = 0$ on trouvera, par conséquent,

$$\Phi^{(2n)}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{D_{2s}^{(2s+2n+1)}}{(2s)!}\,\Delta_\omega^{2s+2n}\nabla_\omega\,\Phi[x-(s+n)\omega],$$

$$\Phi^{(2n+1)}\left(x+\frac{\omega}{2}\right)=(2n+1)\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{D_{2s}^{(2s+2n+1)}}{(2s)!\,(2s+2n+1)}$$
$$\times\,\Delta_\omega^{2s+2n+1}\,\Phi[x-(s+n)\omega].$$

Il nous reste à déduire les formules de quadrature. On a, en vertu de l'équation (8),

$$z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots[z^2-(s-1)^2] = B_{2s-1}^{(2s)}(z+s).$$

En intégrant par partie on trouvera donc

$$(15)\qquad \int_z^{z+1} z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(s-1)^2]\,dz$$
$$= \frac{1}{2s}B_{2s}^{(2s)}(z+s+1) - \frac{1}{2s}B_{2s}^{(2s-1)}(z+s) + zB_{2s-1}^{(2s-1)}(z+s).$$

En faisant $z=-\frac{1}{2}$ le second membre s'écrit

$$(16)\qquad \frac{1}{2s}B_{2s}^{(2s)}\left(s+\frac{1}{2}\right) - \frac{D_{2s}^{(2s-1)}}{2s\,2^{2s}},$$

mais cette expression peut se réduire. On a, en effet (1),

$$B_s^{(n)}(z+1) = \left(1-\frac{s}{n-1}\right)B_s^{(n-1)}(z) + \frac{zs}{n-1}B_{s-1}^{(n-1)}(z).$$

En faisant $z=\frac{n-1}{2}$ on en déduit

$$(17)\qquad B_s^{(n)}\left(\frac{n+1}{2}\right) = \left(1-\frac{s}{n-1}\right)\frac{D_s^{(n-1)}}{2^s} + s\frac{D_{s-1}^{(n-1)}}{2^s}.$$

A l'aide de cette relation on peut réduire l'expression (16) et l'on trouvera ainsi

$$\frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} z^2(z^2-\omega^2)\dots[z^2-(s-1)^2\omega^2]\,dz = -\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{D_{2s}^{(2s-1)}}{2s-1}.$$

De plus, on aura

$$\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} z(z^2-\omega^2)\dots(z^2-s^2\omega^2)\,dz = 0,$$

parce que la fonction sous le signe est impaire. En intégrant la série (12)

---

(1) *Polynomes de Bernoulli*, p. 185.

par rapport à z on trouvera donc

$$\frac{1}{\omega}\int_{x-\frac{\omega}{2}}^{x+\frac{\omega}{2}} \Phi(z)\,dz = -\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s} \frac{D_{2s}^{(2s-1)}}{(2s)!\,(2s-1)} \Delta_{\omega}^{2s}\,\Phi(x-s\omega).$$

En intégrant les deux membres de l'équation (15) on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^1 dt_2 \int_0^1 & (z+t_1+t_2)^2[(z+t_1+t_2)^2-1^2]\ldots[(z+t_1+t_2)^2-(s-1)^2]\,dt_1 \\ &= -\frac{2}{2s-1}B_{2s}^{(2s-2)}(z+s)+\frac{1}{2s-1}B_{2s}^{(2s-1)}(z+s) \\ &\qquad + \frac{2s}{2s-1}\left(z+\frac{3}{2}\right)B_{2s-1}^{(2s-2)}(z+s).\end{aligned}$$

En faisant $z = -1$ et en tenant compte de l'équation (17) on trouvera

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^2}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} dt_2 \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} & (t_1+t_2)^2[(t_1+t_2)^2-\omega^2]\ldots \\ & \times[(t_1+t_2)^2-(s-1)^2\omega^2]\,dt_1 = -\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s-1}\frac{D_{2s}^{(2s-2)}}{2s-2}.\end{aligned}$$

En intégrant la série (12) deux fois de suite on obtient, par conséquent,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^2}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} dt_2 \int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}} & \Phi(x+t_1+t_2)\,dt_1 \\ &= -\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s-1}\frac{D_{2s}^{(2s-2)}}{(2s)!\,(2s-2)}\Delta_{\omega}^{2s}\,\Phi(x-s\omega).\end{aligned}$$

Enfin, de l'équation (9) on déduit immédiatement que

$$\frac{1}{\omega}\int_{-\frac{\omega}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\left[z^2-\left(\frac{\omega}{2}\right)^2\right]\left[z^2-\left(\frac{3\omega}{2}\right)^2\right]\cdots\left[z^2-\left(s-\frac{1}{2}\right)^2\omega^2\right]dz = \left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s} D_{2s}^{(2s)}.$$

En intégrant la série de Bessel (13) on trouvera, par conséquent,

$$\frac{1}{\omega}\int_x^{x+\omega}\Phi(z)\,dz=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2s}\frac{D_{2s}^{(2s)}}{(2s)!}\Delta_\omega^{2s}\nabla_\omega\Phi(x-s\omega).$$

Tous ces développements convergeront donc quel que soit x pourvu que ω satisfasse à l'inégalité (14). Si $k=0$ les séries convergent dans tout le plan des ω. Mais les séries divergent pour toutes les valeurs de x et de ω si la fonction $\Phi(z)$ ne satisfait pas aux conditions que nous lui avons imposées. C'est donc seulement dans des cas très particuliers que les formules en question sont rigoureuses. Néanmoins elles rendent de très grands services dans les calculs numériques parce qu'elles donnent une approximation suffisante dans tous les cas où la fonction Φ se comporte à peu près comme un polynome dans l'intervalle qui entre en considération. S'il en est ainsi les différences successives décroissent d'abord rapidement vers zéro, mais ensuite elles augmentent au-dessus de toute limite si nos conditions de convergence ne sont pas satisfaites. Les $B_s^{(n)}$ et $D_s^{(n)}$ qui figurent dans nos développements sont des polynomes en n qui satisfont à certaines équations aux différences mêlées. Dans le Mémoire susdit nous avons étudié ces polynomes; on y trouvera, en particulier, des relations de récurrence qui permettent de déterminer rapidement les valeurs de ces quantités. Les Ouvrages mentionnés dans l'Introduction renferment un grand nombre de formules de quadrature et de différentiation mécanique. Mais ces auteurs ne se préoccupent ni de la question de convergence ni de trouver l'expression générale des coefficients des séries. Ils adoptent un mode de calcul qui paraît moins commode que celui que nous venons d'indiquer.

Note. — Aux mémoires mentionnés dans l'Introduction il faut encore ajouter l'ouvrage suivant : K. Pearson, *On the Construction of Fables and on Interpolation. Fracts for Computers* No. 2. Cambridge, 1920.