ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur les modules des zéros des polynômes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 40 (1923), p. 1-34
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1923_3_40__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LES MODULES DES ZÉROS DES POLYNOMES

PAR M. P. MONTEL

1. Je me propose d'établir quelques théorèmes d'algèbre d'un caractère élémentaire donnant des limites supérieures des modules de certains zéros des polynomes $P_k(x)$ assujettis à vérifier des conditions déterminées.

Si, par exemple, on fixe les $p+1$ premiers coefficients d'un polynome de $k+1$ termes

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots,$$

nous verrons que ce polynome a toujours p zéros intérieurs à un cercle de centre origine dont le rayon ne dépend que *des valeurs* $a_0, a_1, \ldots, a_p$ *et du nombre des termes du polynome.*

Plus généralement, supposons que l'on fixe les valeurs de $P_k(x)$ et de certaines de ses dérivées en h points distincts donnés $x_1, x_2, \ldots, x_h$, par exemple les valeurs

$$\begin{array}{llll}
P_k(x_1), & P'_k(x_1), & \ldots, & P_k^{(\alpha_1-1)}(x_1), \\
P_k(x_2), & P'_k(x_2), & \ldots, & P_k^{(\alpha_2-1)}(x_2), \\
\ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots, \\
P_k(x_h), & P'_k(x_h), & \ldots, & P_k^{(\alpha_h-1)}(x_h).
\end{array}$$

Si $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = p+1$, ces valeurs déterminent un polynome $P(x)$ dont le degré est effectivement p, à moins que les valeurs données ne vérifient une relation particulière.

Dans ces conditions, le polynome $P_k(x)$ a toujours p zéros dans un cercle de centre origine dont le rayon ne dépend que *des affixes des points donnés, des valeurs données en ces points, et du nombre des termes du polynome* $R(x)$ *lorsque* $P_k(x)$ *a été mis sous la forme*

$$P_k(x) = P(x) + Q(x)\,R(x),$$

où

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_h)^{\alpha_h}.$$

Ces théorèmes sont à rapprocher d'une autre catégorie de propositions qui se rattachent directement aux diverses généralisations du théorème de Picard. En effet, dans chacun des cas que nous venons d'indiquer, l'un des polynomes $P_k(x)$ ou $P_k(x) - 1$ a certainement p zéros dans un cercle de centre origine dont le rayon ne dépend que des quantités données mais *non du nombre des termes*. Si l'on supprime l'alternative pour les polynomes $P_k(x)$ et $P_k(x) - 1$, le nombre des termes intervient dans l'expression du module maximum des racines. A chaque proposition de l'un des groupes correspond une proposition de l'autre, obtenue en remplaçant l'expression « $P_k(x)$ ou $P_k(x) - 1$ » par « $P_k(x)$ et $P_k(x) - 1$ ».

Enfin, lorsque les polynomes considérés vérifient des relations fonctionnelles particulières telles que l'existence d'un zéro pour l'un des polynomes entraîne l'existence, pour l'autre polynome, d'un zéro de module inférieur ou égal à celui du premier zéro, les propositions des deux groupes deviennent les mêmes.

Les principaux résultats de ce travail ont été présentés à l'Académie des Sciences le 27 mars et le 8 mai 1922.

2. M. Landau a démontré que l'équation

$$1 + x + ax^n = 0 \qquad (n > 1)$$

a toujours une racine dont le module est inférieur ou égal à 2 et que l'équation

$$1 + x + bx^m + ax^n = 0 \qquad (1 < m < n)$$

a toujours une racine dont le module ne dépasse pas un nombre fixe inférieur à $5\frac{2}{3}$. Il a posé la question de savoir si l'équation à $k+1$ termes

$$P_k(x) = 1 + x + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1})$$

a toujours une racine dont le module ne dépasse pas un nombre $\varphi(k)$ ne dépendant que du nombre des termes du polynome $P_k(x)$ (1).

Je me propose de démontrer qu'il en est effectivement ainsi et que le nombre $\varphi(k)$ a la valeur très simple k, cette valeur maximum n'étant atteinte que pour le polynome unique $P_k(x)$ dont toutes les racines sont égales à $-k$. J'établirai donc la proposition suivante :

3. Théorème. — *L'équation*

$$P_k(x) = 1 + x + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1})$$

a toujours une racine dont le module est inférieur ou égal à k. Cette valeur maximum du module de la racine de plus petit module n'est atteinte que pour l'équation

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 0.$$

Considérons d'abord l'équation

$$P_2(x) = 1 + x + a x^n = 0 \qquad (1 < n)$$

et formons, en posant $x_1 = \frac{1}{x}$, l'équation aux inverses

$$Q_2(x_1) = x_1^n + x_1^{n-1} + a = 0.$$

La dérivée du polynome $Q_2(x_1)$ est

$$Q'_2(x_1) = n x_1^{n-2}\left[x_1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\right];$$

(1) *Ueber den Picardschen Satz* (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. LI, 1906, p. 316-318). — *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XXIV, 1907, p. 179-201).

elle admet une racine dont le module $1 - \frac{1}{n}$ est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Si toutes les racines de $Q_2(x_1)$ étaient situées à l'intérieur du cercle de centre $x_1 = 0$ et de rayon $\frac{1}{2}$, il en serait de même des racines de $Q'_2(x_1)$ d'après un théorème de Lucas. Il y a donc au moins un zéro de $Q_2(x_1)$ dont le module est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Le zéro du polynome $P_2(x)$ qui est l'inverse de celui-là a donc un module inférieur ou égal à 2.

Supposons maintenant établi que le polynome $P_{k-1}(x)$ a un zéro dont le module ne dépasse pas $k-1$, et proposons-nous de démontrer que le polynome $P_k(x)$ a un zéro dont le module ne dépasse pas k. Posons encore $x_1 = \frac{1}{x}$, et formons le polynome $Q_k(x_1)$ dont les zéros sont les inverses de ceux de $P_k(x)$,

$$Q_k(x_1) = x_1^{n_{k-1}} + x_1^{n_{k-1}-1} + a_1 x_1^{n_{k-1}-n_1} + \ldots + a_{k-2} x_1^{n_{k-1}-n_{k-2}} + a_{k-1}$$

et

$$\begin{aligned} Q'_k(x_1) = {} & n_{k-1} x_1^{n_{k-1}-n_{k-2}-1} \\ & \times \left[x_1^{n_{k-2}} + \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) x_1^{n_{k-2}-1} \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{n_1}{n_{k-1}}\right) a_1 x_1^{n_{k-2}-n_1} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2} \right]. \end{aligned}$$

Dans le polynome entre crochets, faisons le changement de variable

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) X_1,$$

il vient

$$\begin{aligned} & x_1^{n_{k-2}} + \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) a_1 x_1^{n_{k-2}-1} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2} \\ & \quad = \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right)^{n_{k-2}} R_{k-1}(X_1), \end{aligned}$$

avec

$$R_{k-1}(X_1) = X_1^{n_{k-2}} + X_1^{n_{k-2}-1} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right)^{-n_{k-2}} a_{k-2}.$$

Ce polynome a k termes et ses zéros sont les inverses de ceux du polynome

$$P_{k-1}(X) = 1 + X + \ldots + a'_{k-2} X^{n_{k-2}},$$

où l'on désigne par a'_{k-2} le terme constant de $R_{k-1}(X_1)$. Le polynome $P_{k-1}(X)$ a, par hypothèse, un zéro dont le module ne dépasse pas $k-1$, donc $R_{k-1}(X_1)$ a un zéro X_1 tel que

$$|X_1| \geqq \frac{1}{k-1};$$

donc $Q'_k(x_1)$ a un zéro x_1 tel que

$$x_1 = \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) X_1,$$

$$|x_1| \geqq \left(1 - \frac{1}{n_{k-1}}\right) \frac{1}{k-1} \geqq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{1}{k-1} = \frac{1}{k},$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $n_{k-1} = k$.

La dérivée de $Q_k(x_1)$ a un zéro de module supérieur ou égal à $\frac{1}{k}$. D'après le théorème de Lucas, le polynome $Q_k(x_1)$ a aussi un zéro dont le module n'est pas inférieur à $\frac{1}{k}$, et le zéro inverse de $P_k(x)$ a un module qui n'est pas supérieur à k.

La proposition est évidente pour $k = 1$, elle est donc générale. Nous avons donné la démonstration relative à $k = 2$ pour bien indiquer la marche à suivre.

Cherchons maintenant si le maximum peut être atteint pour un polynome particulier $P_k(x)$. Il faut d'abord que $n_{k-1} = k$ et alors

$$P_k(x) = 1 + x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k.$$

Le polynome aura alors un zéro dont le module est k et le polynome $Q_k(x_1)$ aura un zéro dont le module est $\frac{1}{k}$; c'est le zéro dont le module est le plus grand. Le centre de gravité du système des points ayant pour affixes les zéros de $Q_k(x_1)$ est le point d'affixe $-\frac{1}{k}$. Si les zéros de ce polynome sont distincts, comme ils sont à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle de centre $x_1 = 0$ et de rayon $\frac{1}{k}$, leur centre de gravité serait intérieur au cercle; il est donc nécessaire que tous les zéros soient confondus avec le point $-\frac{1}{k}$ et que, par suite, tous les zéros de $P_k(x)$ soient confondus avec le point $-k$. On obtient ainsi le polynome

$$\left(1+\frac{x}{k}\right)^k = 1 + x + \ldots + \frac{x^k}{k^k}.$$

4. Si l'on veut se borner à démontrer l'existence de $\varphi(k)$ sans chercher à déterminer la forme de cette fonction, on peut opérer plus simplement. M. Sarantopoulos a annoncé qu'il possédait une démonstration de l'existence de $\varphi(k)$ (1). Voici une démonstration particulièrement simple que son auteur, M. Casabonne, a bien voulu nous communiquer.

Soit x_{k-1} la racine de plus petit module de l'équation

$$P_{k-1}(x) = 1 + x + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-2} x^{n_{k-2}} = 0,$$

obtenue en supprimant le dernier terme de l'équation

$$P_k(x) = 1 + x + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-2} x^{n_{k-2}} + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0;$$

faisons le changement de variable

$$x = x_{k-1} + X,$$

il vient

$$P_k(x) = X(\ldots) + a_{k-1}(x_{k-1} + X)^{n_{k-1}} = 0,$$

le produit des racines de l'équation en X est égal à $\pm x_{k-1}^{n_{k-1}}$, il y a donc une racine X de cette équation dont le module ne dépasse pas $|x_{k-1}|$; la racine x correspondante,

$$x = x_{k-1} + X,$$

est telle que

$$|x| \leqq |x_{k-1}| + |X| \leqq 2|x_{k-1}|;$$

donc la racine x_k de plus petit module de $P_k(x) = 0$ vérifie l'inégalité

$$|x_k| \leqq 2|x_{k-1}|;$$

de même

$$|x_{k-1}| \leqq 2|x_{k-2}|,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|x_2| \leqq 2|x_1| = 2,$$

donc

$$|x_k| \leqq 2^{k-1}$$

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 592.

et

$$\varphi(k) \leqq 2^{k-1}.$$

5. Étant donnée l'équation

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0 \qquad (a_1 \neq 0),$$

le changement de variable $x = \frac{a_0}{a_1} X$ la ramène à la forme

$$a_0(1 + X + \ldots) = 0.$$

L'équation proposée a donc une racine dont le module ne dépasse pas $k \left| \frac{a_0}{a_1} \right|$, si le nombre de ses termes est égal à $k + 1$. La limite supérieure du module de la racine de plus petit module ne dépend que de a_0, a_1 *et du nombre des termes*. Cette proposition est à rapprocher du théorème de M. Landau, d'après lequel l'une des équations

$$P(x) = 0, \qquad P(x) = 1$$

a une racine dont le module a une limite supérieure ne dépendant que de a_0, a_1 et *non du nombre des termes*. Mais, tandis que le théorème que nous venons d'établir a un caractère élémentaire, la proposition de M. Landau est d'une nature plus élevée.

6. Supposons que le polynome $P_k(x)$ ait la forme

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{p-1} x^{p-1} + x^p + a_p x^{n_p} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}}$$
$$(p < n_p < \ldots < n_{k-1});$$

il contient $k + 1$ termes et les coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ sont arbitraires. Je me propose de montrer que le zéro de plus petit module de ce polynome est inférieur à un nombre fixe $\varphi(p, k)$ ne dépendant que des entiers p et k et de déterminer la fonction $\varphi(p, k)$. J'établirai pour cela la proposition suivante :

Théorème. — *L'équation à $k + 1$ termes*

$$P_k(x) = 1 + \ldots + x^p + a_p x^{n_p} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(p < n_p < \ldots < n_{k-1}),$$

dans laquelle le terme constant et le coefficient de x^p sont égaux à l'unité, *a toujours une racine dont le module ne dépasse pas le nombre*

$$\varphi(p, k) = \sqrt[p]{C_p^k}.$$

Cette valeur maximum n'est atteinte que pour l'une des équations

$$\left(1 + \frac{\omega x}{\varphi}\right)^k = 0,$$

dans laquelle ω *est une racine* $p^{\text{ième}}$ *de l'unité, lorsque* k *est supérieur à* p.

Dans l'énoncé précédent, C_p^k désigne le nombre

$$\frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{1.2\ldots p}$$

des combinaisons de k objets pris p à p. Le nombre k est toujours supérieur ou égal à p parce que les coefficients des termes en $x, x^2, \ldots, x^{p-1}$ sont comptés même lorsqu'ils sont nuls, tandis que les termes en $x^{n_p}, \ldots, x^{n_{k-1}}$ ne sont comptés que si leurs coefficients sont différents de zéro.

Examinons d'abord l'hypothèse $k = p$; l'équation

$$1 + a_1 x + \ldots + x^p = 0$$

a p racines dont les modules sont $r_1, r_2, \ldots, r_p$, et l'on a

$$r_1 r_2 \ldots r_p = 1.$$

L'un au moins des r_i est inférieur ou égal à un. Par conséquent, la racine de plus petit module a un module inférieur ou égal à un. Si ce module est égal à un, toutes les racines ont pour module l'unité, car chaque racine doit avoir un module supérieur ou égal à un. On a donc

$$\varphi(p, p) = 1.$$

Dans ce cas, le maximum du module de la racine de plus petit module est atteint pour une équation quelconque admettant comme racines p nombres arbitraires de module unité, assujettis à la seule condition que leur produit soit égal à un.

Supposons maintenant que l'on ait démontré que

$$\varphi(p, k-1) = \sqrt[p]{C_p^{k-1}},$$

et montrons que cette égalité reste vraie quand on y remplace $k-1$ par k. Considérons encore les polynomes

$$P_k(x) = 1 + \ldots + x^p + a_p x^{n_p} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}}$$

et

$$Q_k(x_1) = x_1^{n_{k-1}} + \ldots + x_1^{n_{k-1}-p} + a_p x_1^{n_{k-1}-n_p} + \ldots + a_{k-1}.$$

Calculons la dérivée

$$Q'_k(x_1) = n_{k-1} x_1^{n_{k-1}-n_{k-2}-1} \times \left[x_1^{n_{k-2}} + \ldots + \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right) x_1^{n_{k-2}-p} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2} \right].$$

Faisons, dans le polynome

$$x_1^{n_{k-2}} + \ldots + \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right) x_1^{n_{k-2}-p} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2},$$

le changement de variable

$$x_1 = \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{1}{p}} X_1,$$

il vient

$$\left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{n_{k-2}}{p}} [X_1^{n_{k-2}} + \ldots + X_1^{n_{k-2}-p} + \ldots + a'_{k-2}];$$

le polynome $R_{k-1}(X_1)$ entre crochets est déduit d'un polynome $P_{k-1}(x)$ par le changement de x en $\frac{1}{X_1}$. Il a donc, par hypothèse, une racine X_1 dont le module est supérieur ou égal à $\frac{1}{\varphi(p, k-1)}$. La racine x_1 correspondante vérifie l'inégalité

$$|x_1| = \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{1}{p}} |X_1| \geqq \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\varphi(p, k-1)}$$

et, comme $n_{k-1} \geqq k$,

$$|x_1|^p \geqq \frac{(k-p)}{k} \frac{1}{C_{k-1}^p} = \frac{1}{C_k^p}.$$

L'égalité ne pouvant avoir lieu que si $n_{k-1} = k$, auquel cas $n_p = p+1$, $n_{p+1} = p+2$, ..., $n_{k-2} = k-1$, et si l'équation en X_1 a une racine dont le module atteint sa limite inférieure $\frac{1}{\varphi(p, k-1)}$.

L'équation $Q_k(x_1) = 0$ a nécessairement une racine dont le module n'est pas inférieur à $\frac{1}{\sqrt[p]{C_k^p}}$, sinon, d'après le théorème de Lucas, l'équation $Q'_k(x_1) = 0$ ne pourrait avoir une racine dont le module soit supérieur ou égal à ce nombre. Par suite, l'équation aux inverses $P_k(x) = 0$ a une racine dont le module est inférieur ou égal à $\sqrt[p]{C_k^p}$, et la première partie de la proposition est démontrée.

Voyons maintenant dans quelles conditions le maximum $\varphi(p, k)$ peut être atteint. Supposons d'abord $k = p + 1$. Pour que la racine x de plus petit module atteigne sa valeur maximum $\varphi(p, p+1) = \sqrt[p]{p+1}$, il est nécessaire que $n_p = p + 1$ et que l'équation en X_1, qui est ici

$$X_1^p + \ldots + 1 = 0,$$

ait le module de sa racine X_1 de plus grand module égal à son minimum 1. Ceci exige que cette équation ait toutes ses racines de module unité. Il en résulte que l'équation $Q'_{p+1}(x_1) = 0$, qui n'a pas de racine nulle, doit avoir toutes ses racines sur la circonférence de centre $x_1 = 0$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt[p]{p+1}}$. Pour que l'équation $Q_{p+1}(x_1) = 0$ ait sa racine x_1 de plus grand module sur la même circonférence, il faut et il suffit que toutes les racines de Q'_{p+1} soient confondues avec cette racine x_1. Dans le cas contraire, en effet, il résulterait du théorème de Lucas que Q'_{p+1} a au moins un zéro intérieur à la circonférence. Ainsi, le polynome $Q_{p+1}(x_1)$ a tous ses zéros confondus et leur module est égal à $\frac{1}{\varphi}$. Comme le produit des racines de $Q'_{p+1}(x_1)$ doit être égal à $\frac{(-1)^p}{p+1}$, il faut que ce zéro soit de la forme $-\frac{\omega}{\varphi}$, avec $\omega^p = 1$. On a donc

$$Q_{p+1}(x_1) = \left(x_1 + \frac{\omega}{\varphi}\right)^{p+1}, \qquad \omega^p = 1,$$

et

$$P_{p+1}(x) = \left(1 + \frac{\omega x}{\varphi}\right)^{p+1}, \qquad \omega^p = 1,$$

φ ayant la valeur $\varphi(p, p+1) = \sqrt[p]{p+1}$.

Supposons maintenant établi que l'équation $P_{k-1}(x) = 0$ ne puisse avoir le module de sa racine de plus petit module égal à son maximum $\varphi(p, k-1)$ sans que toutes ses racines soient égales, auquel cas ce polynome est nécessairement de la forme

$$P_{k-1}(x) = \left(1 + \frac{\omega x}{\varphi}\right)^{k-1}, \qquad \omega^p = 1$$

et

$$\varphi = \varphi(p, k-1),$$

et proposons-nous de démontrer que cette propriété subsiste pour le polynome $P_k(x)$. En effet, il est d'abord nécessaire pour que le module de la racine de plus petit module de $P_k(x) = 0$ soit égal à $\varphi(p, k)$ que $n_{k-1} = k$ et que l'équation $R(X_1)$ correspondante ait, pour module de sa racine de plus grand module, la valeur minimum. Cela exige que $R(X_1)$ ait toutes ses racines égales puisque $R(X_1)$ a pour zéros les inverses des zéros d'un polynome $P_{k-1}(x)$ pour lequel la propriété est supposée démontrée. Alors $Q'_k(x_1) = 0$ a toutes ses racines égales, cette équation n'ayant pas de racine nulle puisque $n_{k-2} = k-1$; le module de la racine unique est $\frac{1}{\varphi(p, k)}$. Il est alors nécessaire, d'après le théorème de Lucas, que $Q_k(x_1)$ ait toutes ses racines confondues avec la racine unique de la dérivée qui est de la forme $-\frac{\omega}{\varphi}$ et l'on a

$$Q_k(x_1) = \left(x_1 + \frac{\omega}{\varphi}\right)^k,$$

avec $\omega^p = 1$, pour que le coefficient de x_1^{k-p} soit égal à 1. Alors

$$P_k(x) = \left(1 + \frac{\omega x}{\varphi}\right)^k, \qquad \omega^p = 1.$$

7. Si l'on veut seulement démontrer l'existence de $\varphi(p, k)$, la méthode de M. Casabonne est encore applicable et conduit à la même inégalité

$$\varphi(p, k) \leqq 2\varphi(p, k-1),$$

d'où

$$\varphi(p, k) \leqq 2^{k-p}\varphi(p, p) = 2^{k-p},$$

puisque $\varphi(p, p) = 1$.

8. Étant donnée l'équation

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + \ldots + a_n x^n = 0 \qquad (a_p \neq 0),$$

le changement de variable $x = \left(\frac{a_0}{a_p}\right)^{\frac{1}{p}} X$ la ramène à la forme

$$a_0(1 + \ldots + X^p + \ldots) = 0.$$

L'équation proposée a donc une racine dont le module ne dépasse pas la valeur

$$\sqrt[p]{C_k^p \left|\frac{a_0}{a_p}\right|},$$

si le nombre de ses termes est égal à $k+1$. Prenons en particulier une équation de degré n et formons la suite des nombres

$$C_n^1 \left|\frac{a_0}{a_1}\right|; \quad \sqrt{C_n^2 \left|\frac{a_0}{a_2}\right|}; \quad \ldots \quad \sqrt[p]{C_n^p \left|\frac{a_0}{a_p}\right|}; \quad \ldots \quad \sqrt[n]{\left|\frac{a_0}{a_n}\right|};$$

l'équation proposée a au moins une racine dont le module ne dépasse pas le plus petit de ces nombres, comme on le voit aussitôt en ramenant à l'unité, successivement, chacun des coefficients non nuls des termes de l'équation.

Ainsi, lorsqu'on laisse fixes les coefficients a_0 et a_p d'un polynome $P(x)$, on voit que ce polynome admet un zéro dans un cercle dont le rayon ne dépend que de a_0, a_p et *du nombre des termes* du polynome. Ce résultat est à rapprocher d'un théorème de M. Landau d'après lequel, l'un des polynomes $P(x)$ ou $P(x) - 1$ a un zéro dans un cercle dont le rayon ne dépend que de a_0 et a_p et *non du nombre des termes* du polynome. Ici encore, la première proposition a un caractère élémentaire et se déduit du théorème de Lucas.

9. Nous allons maintenant établir des théorèmes fixant une limite supérieure des modules de plusieurs zéros d'un polynome. Nous étudierons d'abord un cas simple, celui du polynome à $k+1$ termes

$$P_k(x) = 1 + x^2 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(2 < n_1 < \ldots < n_{k-1}).$$

Je vais démontrer la proposition suivante :

Théorème. — *Un polynome à $k+1$ termes de la forme*

$$1 + x^2 + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}}$$

a toujours deux zéros dont les modules ne dépassent pas le nombre $\varphi_2 = \sqrt{\frac{k(k+1)}{2}}$. *Cette limite supérieure n'est atteinte que pour les deux polynomes*

$$\left(1 \pm \frac{ix}{\varphi_2}\right)^k \left(1 \mp \frac{kix}{\varphi_2}\right).$$

Examinons d'abord l'hypothèse $k = 2$. Nous avons les polynomes

$$P_1(x) = 1 + x^2 + a_1 x^{n_1} \qquad (2 < n_1),$$

et

$$Q_1(x_1) = x_1^{n_1} + x_1^{n_1-2} + a_1.$$

Calculons encore

$$Q'_1(x_1) = n_1 x_1^{n_1-3}\left[x_1^2 + \left(1 - \frac{2}{n_1}\right)\right].$$

Le trinome entre crochets a deux racines dont le carré du module est

$$1 - \frac{2}{n_1} \geqq \frac{1}{3},$$

puisque $n_1 \geqq 3$. Donc la dérivée $Q'_1(x_1)$ a $n_1 - 3$ racines nulles et deux racines de module supérieur ou égal à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, représentées par des points B

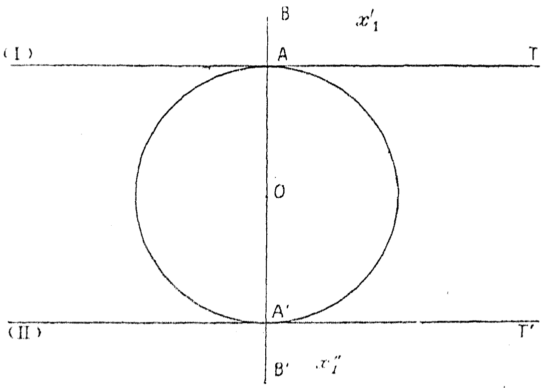

Fig. 1.

et B′ voisins des points A$\left(\frac{i}{\sqrt{3}}\right)$ et A′$\left(\frac{-i}{\sqrt{3}}\right)$ du cercle du centre origine et de rayon $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (*fig.* 1).

Il en résulte que le polynome $Q(x_1)$ a une racine x'_1 située dans la région I du plan située du côté de la tangente AT au cercle qui ne contient pas ce cercle et une racine x''_1 située dans la région II formée par le demi-plan, limité à la tangente A'T' au cercle, qui ne contient pas ce cercle. Dans le cas contraire, en effet, si, par exemple, il n'y avait pas de racine dans la région I, une parallèle à AT, voisine de AT et coupant le cercle, laisserait un demi-plan contenant le point A et ne contenant pas de racine de $Q(x_1)$; d'après le théorème de Lucas, il ne devrait y avoir dans ce demi-plan aucune racine de la dérivée $Q'_1(x_1)$: or, il y a le point voisin de A. Les deux racines x'_1 et x''_1 sont donc placées dans les régions I et II et leurs modules ne sont pas inférieurs à $\frac{1}{\sqrt{3}}$; donc $P(x)$ a deux racines dont les modules ne sont pas supérieurs à $\varphi_2(1) = \sqrt{3}$. Pour que cette limite supérieure soit atteinte, il est nécessaire que $n_1 = 3$ et il faut que l'une des racines x_1, par exemple x'_1, vienne se placer sur la circonférence, donc au point A, l'équation $P_1(x) = 0$ a alors une racine double de module $\sqrt{3}$ et une racine simple : on obtient aussitôt

$$P_1(x) = 1 + x^2 \pm \frac{2i}{3\sqrt{3}} x^3 = \left(1 \pm \frac{ix}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(1 \mp \frac{2ix}{\sqrt{3}}\right).$$

Supposons maintenant établi que le polynome $P_{k-1}(x)$ a deux zéros dont les inverses sont placés comme on a dit et dont les modules sont inférieurs ou égaux à $\varphi_2(k-1) = \sqrt{\frac{(k-1)k}{2}}$, et que le maximum ne peut être atteint que pour un polynome ayant un zéro simple et un zéro d'ordre de multiplicité $k-1$ et de module φ_2; et démontrons qu'il en sera de même pour $P_k(x)$. Calculons de nouveau

$$Q_k(x_1) = x_1^{n_{k-1}} + x_1^{n_{k-1}-2} + a_1 x_1^{n_{k-1}-n_1} + \ldots + a_{k-1},$$

$$Q'_k(x_1) = n_{k-1} x_1^{n_{k-1}-n_{k-2}-1} \left[x_1^{n_{k-2}} + \left(1 - \frac{2}{n_{k-1}}\right) x_1^{n_{k-2}-2} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2} \right]$$

et faisons le changement de variable

$$x_1 = \sqrt{1 - \frac{2}{n_{k-1}}}\, X_1,$$

Il vient, pour le polynome entre crochets,

$$\left(1-\frac{2}{n_{k-1}}\right)^{\frac{n_{k-2}}{2}}\left[X_1^{n_{k-2}}+X_1^{n_{k-2}-2}+\ldots+a'_{k-2}\right].$$

Le polynome $R_{k-1}(X_1)$ entre crochets a comme zéros les inverses des zéros d'un polynome $P_{k-1}(x)$; il a donc, par hypothèse, deux racines X'_1 et X''_1 dont les modules ne sont pas inférieurs à $\frac{1}{\varphi_2(k-1)}$. Donc $Q'_k(x_1)$ a deux racines correspondantes x'_1 et x''_1 dont les carrés des modules sont supérieurs à

$$\left(1-\frac{2}{n_{k-1}}\right)\frac{1}{\varphi_2^2(k-1)}=\frac{(k-1)}{(k+1)\varphi_2^2(k-1)}=\frac{1}{\varphi_2^2(k)},$$

car $n_{k-1}\geqq k+1$.

D'autre part, puisque les zéros de X'_1 et X''_1 sont, par hypothèse, situés dans les régions I et II correspondant au cercle de rayon $\frac{1}{\varphi_2(k-1)}$, les racines x'_1 et x''_1 seront situées dans les régions I et II correspondant au cercle de rayon $\frac{1}{\varphi_2(k)}$.

Donc, en appliquant de nouveau le théorème de Lucas, on voit que $Q_k(x_1)$ a deux racines placées dans les régions I et II de ce dernier cercle. Par suite, $P_k(x)$ a deux racines dont les modules ne dépassent pas $\varphi_2(k)$.

En outre, le maximum ne peut être atteint que si $n_{k-1}=k+1$ et si l'une des racines X'_1 ou X''_1 a son module minimum. Dans ce cas, le polynome $R_{k-1}(X_1)$ a un zéro d'ordre $k-1$ et de module $\frac{1}{\varphi_2(k-1)}$, et un zéro simple de module plus grand. Donc $Q'_k(x_1)$ a un zéro d'ordre $k-1$ et de module $\frac{1}{\varphi_2(k)}$, et un zéro simple de module plus grand. Pour que l'un des deux zéros des deux plus grands modules de $Q_k(x_1)$ atteigne son module minimum, il est nécessaire que ce zéro coïncide avec le zéro d'ordre $k-1$ de $Q'_k(x_1)$, comme le montre la figure. Donc, le polynome $Q_k(x_1)$ a un zéro simple et un zéro d'ordre k dont l'affixe est de la forme $\pm\frac{i}{\varphi_2(k)}$. Le polynome $P_k(x)$ correspondant admet le zéro $\pm i\varphi_2(k)$ avec l'ordre de multiplicité k et un zéro simple. Il est nécessairement de la forme

$$\left(1 \pm \frac{ix}{\varphi_2}\right)^k \left(1 \mp \frac{kix}{\varphi_2}\right);$$

la proposition est donc établie.

10. J'ai obtenu des résultats moins précis pour le polynome à $k+1$ termes

$$P_k(x) = 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}}$$
$$(2 < p < n_1 < \ldots < n_{k-1}).$$

Je me bornerai à établir le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le polynome $P_k(x)$ admet p zéros dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe $\varphi_p(k)$ qui ne dépend que du nombre $k+1$ des termes de ce polynome.*

Pour démontrer cette proposition, nous nous appuierons sur l'étude faite par M. Walsh (¹) de la distribution des zéros de la dérivée d'un polynome par rapport à celle des zéros de ce polynome. Je me bornerai à utiliser ici un cas particulier du théorème général de M. Walsh et j'en donnerai une démonstration.

Supposons que les m zéros d'un polynome $P(x)$ de degré m soient répartis en deux groupes : un groupe de p zéros extérieurs à un cercle (C) de centre origine et de rayon R et un groupe de $q = m - p$ zéros intérieurs à un cercle (c), concentrique au premier et de rayon $r < R$. Je dis que les zéros de $P'(x)$ sont ou bien intérieurs à (c), ou bien extérieurs à (C), ou bien extérieurs à un troisième cercle (C_1) concentrique aux premiers et de rayon R_1. Si $R_1 > r$, il y a exactement $q-1$ racines de la dérivée dans le cercle (c) et les p autres racines de cette dérivée sont extérieures à (C_1).

(¹) J.-L. WALSH, *On the location of the roots of the Jacobian of two binary forms, and of the derivative of a rational fonction* (*Transactions of the American Mathematical Society*, p. 101-116, vol. XXII, 1921); *On the location of the roots of the derivative of a polynomial* (*Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens à Strasbourg*, 1921, p. 339-342).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_p$ les p racines de $\mathrm{P}(x) = 0$ extérieures à (C) et $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_{p+q}$ les q racines intérieures à (c). Si x_0 est une racine de $\mathrm{P}'(x) = 0$, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{x_0 - x_1} + \ldots + \frac{1}{x_0 - x_p} + \frac{1}{x_0 - x_{p+1}} + \ldots + \frac{1}{x_0 - x_m} = 0.$$

Supposons que x_0 ne soit ni intérieure à (c) ni extérieure à (C) et faisons la transformation

$$x_0 - x' = \frac{1}{x_0 - x}$$

qui transforme en lui-même le plan des x. L'intérieur du cercle (c) se transforme en l'intérieur d'un cercle (γ) qui ne contient pas x_0 et l'extérieur du cercle (C) se transforme en l'intérieur d'un cercle (Γ) qui contient le point x_0 (*fig.* 2). Les points $x'_1, x'_2, \ldots, x'_p$ corres-

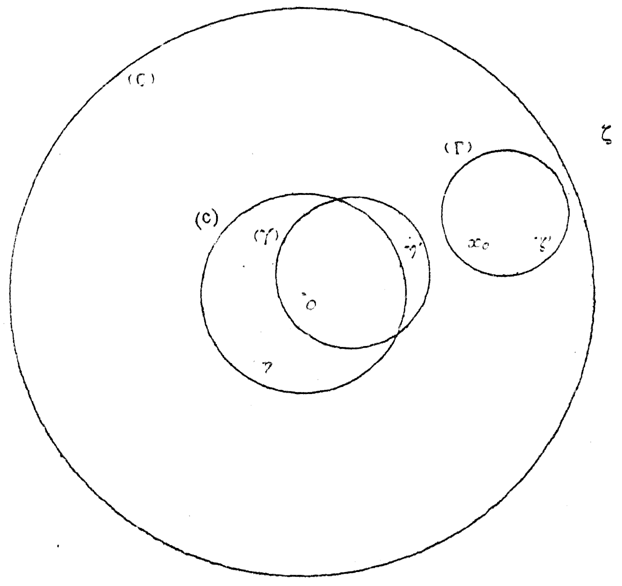

Fig. 2.

pondant à $x_1, x_2, \ldots, x_p$ sont intérieurs à (Γ) et les points x'_{p+1}, $x'_{p+2}, \ldots, x'_m$, correspondant à $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_m$, sont intérieurs à (γ). Soient ζ' et η' les affixes des centres de gravité des groupes x'_1, $x'_2, \ldots, x'_p$ et $x'_{p+1}, x'_{p-2}, \ldots, x'_m$. ζ' est intérieur à (Γ), η' est intérieur à (γ) et ces points sont distincts car les cercles (γ) et (Γ) n'ont aucun point commun. On a

$$x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_p = p\zeta',$$
$$x'_{p+1} + x'_{p+2} + \ldots + x'_m = q\eta'.$$

L'équation (1) devient

$$\sum_{i=1}^{i=m} (x_0 - x'_i) = 0,$$

ou

$$p(x_0 - \zeta') + q(x_0 - \eta') = 0,$$

ou encore

$$\frac{p}{x_0 - \zeta} + \frac{q}{x_0 - \eta} = 0,$$

en désignant par ζ et η les points correspondant à ζ' et η' par la transformation homographique précédente. ζ est d'ailleurs fini, sinon on devrait avoir $\zeta' = x_0$ et par suite $\eta' = x_0$, ce qui est impossible. Le point ζ est extérieur à (C) et le point η est intérieur à (c), donc

$$|\eta| \leqq r, \qquad |\zeta| \geqq \mathrm{R}.$$

La valeur x_0 est donnée par

$$x_0 = \frac{p\eta + q\zeta}{p + q},$$

d'où

$$|x_0| \geqq \frac{q\mathrm{R} - pr}{p + q};$$

si le second membre est négatif, le point x_0 peut occuper n'importe quelle position dans le plan : il suffit de se donner η et ζ et de prendre pour $\mathrm{P}(x)$ un polynome ayant une racine ζ d'ordre p et une racine η d'ordre q,

$$\mathrm{P}(x) = (x - \zeta)^p (x - \eta)^q.$$

Si le second membre est positif, soit $\mathrm{R}_1 = \dfrac{q\mathrm{R} - pr}{p + q}$, la racine x_0 est extérieure au cercle de centre O et de rayon R_1. Si $\mathrm{R}_1 > r$, on doit avoir

$$\frac{q\mathrm{R} - pr}{p + q} > r$$

ou

$$\frac{R}{r} > \frac{2p+q}{q} = \frac{m+p}{m-p},$$

p étant fixe, cette inégalité est vérifiée lorsque m est assez grand ou lorsque le rapport $\frac{R}{r}$ est assez grand. On a, d'ailleurs, toujours

$$R_1 = R - \frac{p(R+r)}{p+q} < R.$$

L'intérieur de (c) et l'extérieur de (C_1) n'ont, dans ce cas, aucune partie commune; or, si tous les points $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_m$ sont confondus en η et les points $x_1, x_2, \ldots, x_p$ en ζ, il y a $q-1$ racines de la dérivée en η dans (c), $p-1$ à l'extérieur de (C) en ζ, et une racine x_0 extérieure à (C_1). Si on laisse p et q fixes et si l'on fait varier les coefficients de $P(x)$ d'une manière continue, les zéros de $P'(x)$ varient d'une manière continue et, comme aucun d'eux ne peut ni entrer dans (c), ni en sortir, il y en a toujours $q-1$ dans (c) et les p autres sont à l'extérieur de (C_1).

Cette proposition préliminaire établie, revenons au polynome

$$P_k(x) = 1 + x^p + a_1 x^{n_1} + \ldots + a_{k-1} x^{n_{k-1}}$$
$$(p < n_1 < \ldots < n_{k-1})$$

à $k+1$ termes.

Si $k=1$, on voit que $P_1(x) = 1 + x^p$ a p racines dont le module est égal à un; supposons que l'on ait établi que $P_{k-1}(x)$ a toujours p racines dont les modules ne dépassent pas un nombre fixe $\varphi_p(k-1)$ et montrons que $P_k(x)$ a aussi p racines dont le module ne dépasse pas un nombre fixe $\varphi_p(k)$. Formons encore

$$Q_k(x_1) = x_1^{n_{k-1}} + x_1^{n_{k-1}-p} + a_1 x_1^{n_{k-1}-n_1} + \ldots + a_{k-1},$$
$$Q'_k(x_1) = n_{k-1} x_1^{n_{k-1}-n_{k-2}-1}\left[x_1^{n_{k-2}} + \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right) x_1^{n_{k-2}-p} + \ldots + \left(1 - \frac{n_{k-2}}{n_{k-1}}\right) a_{k-2}\right],$$

faisons de nouveau un changement de variable

$$x_1 = \left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{1}{p}} X_1;$$

le polynome entre crochets devient

$$\left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{n_{k-2}}{p}} [X_1^{n_{k-2}} + X_1^{n_{k-2}-p} + \ldots + a'_{k-2}].$$

Le nouveau polynome entre crochets, $R_{k-1}(X_1)$, a pour zéros les inverses des zéros d'un polynome $P_{k-1}(x)$ du type considéré ici; donc, $R_{k-1}(X_1)$ a p racines dont les modules sont supérieurs ou égaux à $\frac{1}{\varphi_p(k-1)}$; par suite $Q'_k(x_1)$ a p racines dont les modules sont supérieurs ou égaux à

$$\left(1 - \frac{p}{n_{k-1}}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\varphi_p(k-1)} \geqq \left(\frac{k-1}{p+k-1}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{1}{\varphi_p(k-1)},$$

car $n_{k-1} \geqq p + k - 1$, et, par conséquent, ne peut avoir plus de $n_{k-1} - p - 1$ racines nulles ou voisines de zéro.

Considérons les différents polynomes $Q_k(x_1)$ et classons les racines par modules non croissants; ou bien les p premières restent supérieures à un nombre fixe $\frac{1}{\varphi_p(k)}$, ou bien, il y a moins de p zéros qui restent supérieurs à un nombre fixe; c'est-à-dire qu'il y a une infinité de polynomes $Q_k(x_1)$ tels que, au moins les $n_{k-1} - p + 1$ dernières racines tendent vers zéro. Considérons ces polynomes, ils ont $p' < p$ racines de modules supérieurs à un nombre fixe R et $n_{k-1} - p'$ racines de modules inférieurs à un nombre r arbitrairement petit. Nous avons vu que si

$$\frac{R}{r} > \frac{n_{k-1} + p'}{n_{k-1} - p'},$$

le polynome $Q'_k(x_1)$ a $n_{k-1} - p' - 1 > n_{k-1} - p - 1$ zéros situés dans le cercle r. Or,

$$\frac{n_{k-1} + p'}{n_{k-1} - p'} \leqq \frac{p + p' + k - 1}{p - p' + k - 1},$$

on peut donc prendre r assez petit pour que l'inégalité

$$\frac{R}{r} > \frac{p + p' + k - 1}{p - p' + k - 1}$$

soit vérifiée. La dérivée aura plus de $n_{k-1} - p - 1$ racines de modules inférieurs à r et, comme on peut toujours supposer que r a été choisi inférieur à la limite inférieure trouvée plus haut pour les p racines de $Q'_k(x_1)$ qui ont les plus grands modules, on est conduit à une contradiction. Donc les p premières racines de $Q_k(x_1)$ sont bornées inférieurement et le polynome $P_k(x)$ a p racines dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe $\varphi_p(k)$.

Par analogie avec les cas particuliers $p=1, p=2$ qui ont été étudiés précédemment, on est conduit à penser que la valeur exacte de $\varphi_p(k)$ est $\sqrt[p]{C^p_{p+k-1}}$, mais je n'ai pu le démontrer rigoureusement. Si p, au lieu d'être fixe, varie en restant supérieur à un nombre fixe p_0, on démontre, en suivant la même voie, que le polynome $P_k(x)$ a toujours au moins p_0 racines dont les modules restent inférieurs à un nombre fixe $\Phi_{p_0}(k)$, ne dépendant que de p_0 et de k.

11. Voici maintenant une proposition plus générale :

THÉORÈME. — *Le polynome à $k+p$ termes*

$$1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p+a_{p+1}x^{n_{p+1}}+\ldots+a_{p+k-1}x^{n_{p+k-1}}$$
$$(a_p\neq 0,\ p<n_{p+1}<\ldots<n_{p+k-1})$$

dans lequel $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont des nombres fixes dont le dernier n'est pas nul, a toujours p racines dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p, k)$ ne dépendant que des nombres donnés et du nombre des termes du polynome.

Considérons le polynome

$$P_1(x)=1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_px^p,$$

il admet p racines fixes lorsque les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_p$ sont donnés; il en est de même du polynome

$$Q_1(x_1)=x_1^p+a_1x_1^{p-1}+a_2x_1^{p-2}+\ldots+a_p.$$

Supposons que les a'_i vérifient les inégalités

$$|a'_i|\leqq|a_i|, \qquad |a'_p|\geqq\frac{|a_p|}{p+1},$$

alors le polynome

$$R_1(x_1)=x_1^p+a'_1x_1^{p-1}+a'_2x_1^{p-2}+\ldots+a'_p$$

a p racines dont les modules restent supérieurs à un nombre fixe ne dépendant que de $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait trouver une suite infinie de polynomes $R_1(x_1)$ tels que l'une au moins des p racines ait un module tendant vers zéro. Or, le point $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ de l'espace à p dimensions, qui correspond à chaque polynome R_1, reste dans un domaine borné de cet espace; il a donc au moins un point limite $\overline{a'_1}, \overline{a'_2}, \ldots, \overline{a'_p}$ avec $\overline{a'_p} \neq 0$. Le polynome limite

$$\overline{R_1}(x_1) = x_1^p + \overline{a'_1} x_1^{p-1} + \overline{a'_2} x_1^{p-2} + \ldots + \overline{a'_p}$$

aurait une racine nulle, ce qui est impossible.

Supposons maintenant établi que le polynome

$$R_{k-1}(x_1) = x_1^{n_{p+k-2}} + a'_1 x_1^{n_{p+k-2}-1} + \ldots + a'_p x_1^{n_{p+k-2}-p} + \ldots + a'_{p+k-2},$$

dont les coefficients $a'_1, a'_2, \ldots, a'_p$ vérifient les inégalités précédentes et dont les coefficients $a'_{p+1}, \ldots, a'_{p+k-2}$ sont arbitraires, ait toujours p racines dont les modules restent supérieurs à un nombre fixe et montrons qu'il en est de même pour $R_k(x_1)$.

Considérons le polynome

$$Q_k(x_1) = x_1^{n_{p+k-1}} + a_1 x_1^{n_{p+k-1}-1} + \ldots + a_p x_1^{n_{p+k-1}-p} + \ldots + a_{p+k-1}$$

dont les zéros sont les inverses de ceux du polynome $P_k(x)$ et sa dérivée

$$\begin{aligned} Q'_k(x_1) = n_{p+k-1} x_1^{n_{p+k-1}-n_{p+k-2}-1} \Bigg[x_1^{n_{p+k-2}} &+ \left(1 - \frac{1}{n_{p+k-1}}\right) a_1 x_1^{n_{p+k-2}-1} + \ldots \\ &+ \left(1 - \frac{p}{n_{p+k-1}}\right) a_p x_1^{n_{p+k-2}-p} + \ldots \\ &+ \left(1 - \frac{n_{p+k-2}}{n_{p+k-1}}\right) a_{p+k-2} \Bigg]; \end{aligned}$$

le polynome entre crochets est de la forme

$$R_{k-1}(x_1) = x_1^{n_{p+k-2}} + a'_1 x_1^{n_{p+k-2}-1} + \ldots + a'_p x^{n_{p+k-2}-p} + \ldots + a'_{p+k-2}$$

avec

$$|a'_i| = \left(1 - \frac{i}{n_{p+k-1}}\right) |a_i| \leqq |a_i|$$

$$|a'_p| = \left(1 - \frac{p}{n_{p+k-1}}\right) |a_p| > \frac{|a_p|}{p+1},$$

car

$$n_{p+k-1} \geqq p + k - 1 \geqq p + 1.$$

Par conséquent, le polynome $Q'_k(x_1)$ a p racines dont les modules sont supérieurs à un nombre fixe ne dépendant que de $a_1, a_2, \ldots, a_p, k$ et en outre $n_{p+k-1} - p - 1$ racines au plus qui peuvent être nulles ou voisines de zéro. En raisonnant exactement comme au paragraphe précédent et en utilisant le théorème de M. Walsh, on en déduit que le polynome $Q_k(x_1)$ a certainement p racines dont les modules sont supérieurs à un nombre fixe $\dfrac{1}{\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p, k)}$.

Si, au lieu du polynome $Q_k(x_1)$, on prend le polynome

$$R_k(x_1) = x_1^{n_{p+k-1}} + a'_1 x_1^{n_{p+k-1}-1} + \ldots + a'_p x_1^{n_{p+k-1}-p} + \ldots + a'_{p+k-1}$$

$$|a'_i| \leqq |a_i|, \qquad |a'_p| \geqq \frac{|a_p|}{p+1},$$

on pourra répéter la même démonstration : les coefficients a''_i du nouveau polynome $R_{k-1}(x_1)$ ainsi formés vérifieront les conditions

$$|a''_i| \leqq |a_i|, \qquad |a''_p| \geqq \frac{|a'_p|}{p+1} \geqq \frac{|a_p|}{(p+1)^2}$$

et le résultat demeure le même puisqu'il suffit, dans les calculs précédents, de remplacer a_p par $\dfrac{a_p}{p+1}$.

Ainsi, il est établi que le polynome $P_k(x)$ admet toujours p racines dont les modules ne dépassent pas un nombre fixe $\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_p, k)$.

Il serait intéressant de déterminer exactement la fonction φ, comme dans le cas de $p = 1$.

12. Le polynome à $p + k$ termes

$$P_k(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_p x^p + a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k-1} x^{n_{p+k-1}} \qquad (a_p \neq 0)$$

a p zéros dans un cercle de centre origine dont le rayon ne dépend que des valeurs de $a_0, a_1, \ldots, a_p$ et *du nombre des termes*.

Ce théorème est à rapprocher du suivant (¹) :

L'un des polynomes $P_k(x)$ ou $P_k(x) - 1$ a p zéros dans un cercle de

(¹) P. MONTEL, *Sur une extension d'un théorème de M. Landau* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 143-144); *Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, 1922, p. 1-41).

centre origine dont le rayon dépend des valeurs de $a_0, a_1, \ldots, a_p$, mais *non du nombre des termes*.

13. Nous avons vu que les limites supérieures ρ des modules des racines des équations précédentes dépendaient du nombre des termes de l'équation. Pour avoir une limite supérieure indépendante de ce nombre, il faut envisager simultanément les polynomes $P(x)$ et $P(x) - 1$; mais, dans ce cas, la limite supérieure est valable pour l'une *ou* l'autre des équations

$$P(x) = 0, \qquad P(x) = 1$$

et l'on ne peut rien affirmer pour chacune d'elles.

Voici un autre cas où la limite supérieure d'un certain nombre de zéros de $P(x)$ ne dépend pas du nombre de termes : c'est celui où les exposants de ces termes forment une progression arithmétique. On peut énoncer la proposition suivante :

Le polynome

$$P(x) = 1 + x^p + a_1 x^{p+q} + a_2 x^{p+2q} + \ldots + a_{k-1} x^{p+(k-1)q}$$

a toujours p zéros dont le module ne dépasse pas un nombre fixe indépendant de q et du nombre des termes du polynome, lorsque q ne divise pas p.

Soit ω une racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité, différente de 1. On a

$$P(\omega x) - 1 = \omega^p [P(x) - 1]$$

et, pour une racine x_0 de $P(x) = 0$, il vient

$$P(\omega x_0) = 1 - \omega^p.$$

Le nombre $1 - \omega^p$ n'est pas nul si l'on choisit pour ω une racine ne vérifiant pas l'égalité $\omega^p = 1$, par exemple une racine primitive; le polynome

$$Q(x) = \frac{P(x)}{1 - \omega^p}$$

s'annule pour $x = x_0$ et prend la valeur *un* pour $x = \omega x_0$. Dans un cercle de rayon arbitraire, les polynomes $Q(x)$ et $Q(x) - 1$ ont le même nombre de zéros. Les polynomes

$$Q(x) = \frac{1}{1-\omega^p} + \frac{x^p}{1-\omega^p} + \ldots + \frac{\omega_{k-1}}{1-\omega^p} x^{p+(k-1)q}$$

ont leurs $p+1$ premiers coefficients (ceux de $x^0, x, \ldots, x^p$) fixes. Je dis qu'il existe un nombre fixe Φ tel que le polynome $P(x)$ ait toujours p racines dans le cercle de centre origine et de rayon Φ. Considérons, en effet, tous les polynomes $T(x)$ dont les p premiers coefficients sont

$$a_0 = \frac{1}{1-\omega^p}, \quad 0, \quad \ldots, \quad 0$$

et ne prenant pas plus de $(p-1)$ fois ni la valeur zéro, ni la valeur un dans un cercle de rayon $2R$; ces polynomes forment une famille normale [1]; ils sont donc bornés dans le cercle concentrique de rayon R et leur module ne dépasse pas une limite fixe $\Omega(R, a_0)$. Or, la substitution de x à Rx remplace cette famille de polynomes par la famille des polynomes possédant les mêmes propriétés dans le cercle de rayon 2. On a donc

$$\Omega(R, a_0) = \Omega(1, a_0);$$

c'est-à-dire que la limite supérieure $\Omega(a_0)$ des modules des polynomes est indépendante de R. Considérons maintenant, parmi ces polynomes, ceux qui sont des polynomes $Q(x)$, pour lesquels le coefficient de x^p est a_0, on aura

$$|a_0| \leq \frac{\Omega(a_0)}{R^p},$$

d'où

$$R \leq \sqrt[p]{\frac{\Omega(a_0)}{|a_0|}};$$

le nombre R ne peut donc pas dépasser une limite $\Phi(p)$ ne dépendant que de p. Donc, dans un cercle de rayon supérieur à Φ, $Q(x)$ prend au moins p fois la valeur zéro ou la valeur un et le polynome correspondant $P(x)$ a alors p zéros dans le même cercle.

Supposons maintenant que le nombre p soit variable mais reste

(1) P. MONTEL, *Sur les familles quasi normales* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 174, 1922, p. 22-24).

supérieur ou égal à un nombre entier fixe p_0. Pour chaque polynome $P(x)$, on peut choisir la racine $q^{\text{ième}}$ de l'unité ω de manière que $1-\omega^p$ ait un module supérieur à l'unité. En effet, si l'on donne à ω les q valeurs possibles, le nombre ω^p prend $\frac{q}{d}$ valeurs distinctes correspondant aux $\frac{q}{d}$ sommets d'un polygone régulier, d désignant le plus grand commun diviseur de p et de q et, comme q ne divise pas p, le nombre d est inférieur à q et $\frac{q}{d} \geqq 2$. Il y a donc toujours un sommet de ce polygone régulier de $\frac{q}{d}$ côtés dont l'abscisse est négative, par suite, pour la racine ω correspondante, on a

$$|1-\omega^p| > 1.$$

On a donc toujours, en choisissant pour chaque valeur de p une racine ω convenable,

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{1}{|1-\omega^p|} < 1,$$

car $|1-\omega^p| \leqq 2$.

Il suffit alors de répéter le raisonnement précédent en remarquant que les p_0 premiers coefficients sont *bornés*. Les polynomes $T(x)$ correspondants forment une famille normale et l'on a, quel que soit R,

$$|Q(x)| < \Omega,$$

Ω étant un nombre fixe supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$ puisque l'on a toujours $|T(0)| \geqq \frac{1}{2}$. On a donc, pour chaque polynome $Q(x)$,

$$R^p \leqq \frac{\Omega}{|a_0|} \leqq 2\Omega;$$

et, puisque $2\Omega \geqq 1$, $p_0 \leqq p$,

$$\sqrt[p]{2\Omega} \leqq \sqrt[p_0]{2\Omega},$$

donc

$$R \leqq \sqrt[p_0]{2\Omega} = \Phi.$$

Chaque polynome $Q(x)$ prend donc p_0 fois au moins soit la valeur zéro, soit la valeur un, dans un cercle de rayon supérieur à Φ. Donc le polynome $P(x)$ correspondant admet au moins p_0 racines dans le même cercle :

Le polynome

$$1 + x^p + a_1 x^{p+q} + \ldots + a_{k-1} x^{p+(k-1)q},$$

pour lequel $p \geqq p_0$ et n'est pas divisible par q, a toujours au moins p_0 racines dont les modules ne dépassent pas une constante Φ ne dépendant que de p_0.

Il n'y a rien à changer aux raisonnements précédents si l'on remplace les polynomes par des séries de Taylor; on obtient la nouvelle proposition :

Il existe un nombre fixe Φ, ne dépendant que de p_0, tel que la fonction définie par la série

$$1 + x^p + a_1 x^{p+q} + \ldots + a_k x^{p+kq} + \ldots$$

dans laquelle q ne divise pas p, ou bien a un point singulier dans un cercle de rayon supérieur à Φ, ou bien admet au moins p_0 racines dans ce cercle.

Si $p_0 = 1$, on retrouve un théorème établi par M. Landau (1).

14. Voici maintenant un théorème tout à fait général dont plusieurs propositions établies dans ce travail sont des cas particuliers. Un polynome $P(x)$, de degré p, peut être déterminé au moyen des valeurs attribuées à ce polynome et à certaines de ses dérivées en des points x_1, x_2, ..., x_h. D'une manière précise, donnons-nous les valeurs

$$\begin{array}{llll} P(x_1), & P'(x_1), & \ldots, & P^{(\alpha_1-1)}(x_1); \\ P(x_2), & P'(x_2), & \ldots, & P^{(\alpha_2-1)}(x_2); \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill,} \\ P(x_h), & P'(x_h), & \ldots, & P^{(\alpha_h-1)}(x_h), \end{array}$$

et supposons que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_h = p + 1.$$

Les points x_1, x_2, ..., x_h étant distincts, ces valeurs déterminent un

(1) *Sur quelques généralisations*, etc.; *loc. cit.*, p. 189.

polynome unique qui est de degré p si les nombres donnés ne vérifient pas une relation particulière. Nous supposerons toujours qu'il en soit ainsi et que le polynome unique $P(x)$ déterminé par les valeurs précédentes est effectivement de degré p.

Considérons maintenant tous les polynomes $P_k(x)$ qui remplissent les mêmes conditions que $P(x)$, mais dont le degré est arbitraire, ils sont de la forme

$$P_k(x) = P(x) + Q(x)(a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k}x^{n_{p+k}})$$

dans laquelle

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1}(x - x_2)^{\alpha_2}\ldots(x - x_h)^{\alpha_h}.$$

Le polynome $P_k(x)$ dépend de k paramètres arbitraires $a_{p+1}, \ldots, a_{p+k}$ et des valeurs arbitraires des entiers $n_{p+1}, \ldots, n_{p+k}$, pour lesquels

$$0 \leqq n_{p+1} < \ldots < n_{p+k}.$$

Je dis que ce polynome a toujours p racines dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe ne dépendant que de p, k, des x_i et des valeurs données en ces points. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Les polynomes vérifiant les $p+1$ conditions qui déterminent un polynome $P(x)$, de degré p, ont toujours p zéros dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe qui dépend des valeurs données et des affixes des points donnés et, en outre, du nombre p, et du nombre k des constantes arbitraires qui figurent dans ce polynome mis sous la forme

$$P(x) + Q(x)(a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k}x^{n_{p+k}}),$$
$$0 \leqq n_{p+1} < \ldots < n_{p+k}.$$

Si $h = 1$ et $x_1 = 0$, avec $\alpha_1 = p + 1$, nous retombons sur l'énoncé du théorème du paragraphe 10.

Nous établirons d'abord un lemme qui constitue un cas particulier d'un théorème de M. Walsh [1].

---

[1] *Loc. cit.*

Considérons la fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ qui a p zéros et q pôles. Supposons que les q pôles et p' zéros soient à l'extérieur du cercle (C), $|x| = R$, et que les $p'' = p - p'$ autres zéros soient intérieurs au cercle (c), $|x| = r$, avec $r < R$. Les racines de la dérivée seront alors soit intérieures à (c), soit extérieures à (C_1), $|x| = R_1$, dont le rayon R_1 pourra être supérieur à r. Dans le cas où $R_1 < r$, la proposition ne nous donne aucune indication sur la place des zéros de la dérivée $\left(\frac{P}{Q}\right)'$.

Soit, en effet, x une racine de la dérivée qui n'est ni intérieure à (c), ni extérieure à (C). On a

$$\frac{1}{x - x_1} + \ldots + \frac{1}{x - x_{p'}} + \ldots + \frac{1}{x - x_p} = \frac{1}{x - x'_1} + \ldots + \frac{1}{x - x'_q},$$

en désignant les zéros de P par $x_1, \ldots, x_{p'}, \ldots, x_p$, et ceux de Q par $x'_1, \ldots, x'_q$. Comme nous l'avons vu au paragraphe 10, il existe des points ξ et η extérieurs au cercle (C) et un point ζ intérieur à (c) tels que

$$\frac{1}{x - x_1} + \ldots + \frac{1}{x - x_{p'}} = \frac{p'}{x - \xi},$$

$$\frac{1}{x - x_{p'+1}} + \ldots + \frac{1}{x - x_p} = \frac{p''}{x - \zeta},$$

$$\frac{1}{x - x'_1} + \ldots + \frac{1}{x - x'_q} = \frac{q}{x - \eta}.$$

L'égalité ci-dessus devient alors

$$\frac{p'}{x - \xi} + \frac{p''}{x - \zeta} = \frac{q}{x - \eta}.$$

Soit ρ le module de x, on a

$$|x - \xi| \geqq R - \rho, \qquad |x - \eta| \geqq R - \rho$$

et

$$|x - \zeta| \leqq r + \rho,$$

donc, comme

$$\frac{p''}{|x - \zeta|} \leqq \frac{p'}{|x - \xi|} + \frac{q}{|x - \eta|},$$

$$\frac{p''}{r + \rho} \leqq \frac{p' + q}{R - \rho}$$

et

$$\rho \geqq \frac{p''R - (p'+q)r}{p+q};$$

on en déduit

$$\rho - r \geqq \frac{p''R - (p+p'+2q)r}{p+q}.$$

Si le rapport $\frac{r}{R}$ est assez petit, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{r}{R} < \frac{p-p'}{p+p'+2q} = \lambda,$$

le point x sera extérieur à un cercle de rayon R_1, supérieur à r et inférieur à R :

$$R_1 = \frac{p''R - (p'+q)r}{p+q}.$$

Supposons qu'il en soit ainsi; faisons coïncider toutes les racines $x_1, \ldots, x_{p'}$, avec un point ξ extérieur à (C), tous les pôles $x'_1, x'_2, \ldots, x'_q$ avec un point η extérieur à (C) et toutes les racines $x_{p'+1}, \ldots, x_p$ avec un point ζ intérieur à (c); il y aura certainement $p''-1$ racines de la dérivée intérieures à (c); $p'+q-2$ racines de la dérivée extérieures à (C) et deux autres racines de cette dérivée, distinctes des zéros de $P(x)$ et de $Q(x)$, qui seront extérieures à (C_1) puisqu'elles vérifient l'équation précédente; donc $p'+q$ racines extérieures à (C_1). Puisque la somme

$$(p''-1)+(p'+q) = p+q-1$$

représente le nombre des racines de la dérivée, il y en a exactement $p''-1$ dans (c) et $p'+q$ hors de (C_1) comme le montre un raisonnement identique à celui du paragraphe 10.

Ce lemme établi, étudions d'abord l'équation

$$P(x) + Q(x)\,a_{p+1}x^{n_{p+1}} = 0, \qquad 0 \leqq n_{p+1},$$

ou

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + a_{p+1}x^{n_{p+1}} = 0.$$

Formons l'équation aux inverses, en posant $x_1 = \frac{1}{x}$:

$$x_1^{n_{p+1}+1}\frac{P_1(x_1)}{Q_1(x_1)} + a_{p+1} = 0.$$

Nous avons ici une fraction rationnelle dont le numérateur est de degré $n_{p+1}+p+1$ et le dénominateur de degré $p+1$. Je dis que p racines de cette équation restent, quels que soient a_{p+1} et n_{p+1}, supérieures en module à un nombre fixe. Dans le cas contraire, en effet, il y aurait au plus $p-1$ racines dont les modules seraient supérieurs à un nombre fixe R que l'on peut supposer inférieur aux inverses des modules de $x_1, x_2, \ldots, x_h$, et quelque petit que soit r, on pourrait trouver une équation ayant $n_{p+1}+p+1-(p-1)=n_{p+1}+2$ racines de modules inférieurs à r. Pour une telle équation, calculons la dérivée du premier membre :

$$x_1^{n_{p+1}} \frac{(n_{p+1}+1)\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + x_1(\mathrm{P}'_1\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{Q}'_1)}{\mathrm{Q}_1^2} = (n_{p+1}+1)\, x_1^{n_{p+1}} \frac{\mathrm{P}_2(x_1)}{\mathrm{Q}_2(x_1)},$$

avec

$$\mathrm{P}_2(x_1) = \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1 + \frac{x_1}{n_{p+1}+1}(\mathrm{P}'_1\mathrm{Q}_1 - \mathrm{P}_1\mathrm{Q}'_1).$$

Comme on a

$$\mathrm{P}_2(0) = \mathrm{P}_1(0)\;\mathrm{Q}_1(0) = \mathrm{P}_1(0) \neq 0,$$

puisque le polynome $\mathrm{P}(x)$ est effectivement de degré p, les modules des zéros de P_2 restent, quel que soit n_{p+1}, supérieurs à un nombre fixe r_0. Donc la dérivée a n_{p+1} racines nulles et $2p+1$ racines de modules supérieurs à r_0.

Supposons $r<r_0$; la valeur de λ calculée précédemment est égale ici à

$$\frac{n_{p+1}+2}{n_{p+1}+4p+2} \geqq \frac{1}{2p+1};$$

si donc, en outre,

$$r \leqq \frac{\mathrm{R}}{2p+1},$$

la dérivée, d'après le théorème de M. Walsh rappelé dans le lemme, devrait avoir $n_{p+1}+1$ racines dans le cercle (c); or, elle n'a dans ce cercle que les n_{p+1} racines nulles. Il y a donc contradiction et nous ne pouvons pas supposer que l'équation proposée a au plus $p-1$ racines extérieures à un cercle fixe. Le théorème est établi pour $k=1$.

Les points x_i demeurant fixes, supposons que les valeurs de $\mathrm{P}(x)$ et de ses dérivées données en ces points varient de manière que leurs modules restent bornés supérieurement et que le module de $\mathrm{P}_1(0)$

reste borné inférieurement. Le nombre r_0 de la démonstration précédente restera supérieur à un nombre fixe r'_0, sinon on pourrait trouver un polynome $P(x)$ de la famille considérée pour lequel r_0 serait nul, ce qui est impossible.

Le théorème est donc encore applicable dans ce cas.

Supposons-le démontré, avec la généralisation précédente, pour un polynome à $k-1$ coefficients arbitraires

$$P_{k-1}(x) = P(x) + Q(x)(a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k-1}x^{n_{p+k-1}}),$$

et démontrons-le pour le polynome

$$P_k(x) = P(x) + Q(x)(a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k}x^{n_{p+k}}).$$

Écrivons l'équation

$$\frac{P(x)}{Q(x)} + a_{p+1}x^{n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k}x^{n_{p+k}} = 0, \tag{1}$$

et la transformée en $x_1 = \frac{1}{x}$,

$$x_1^{n_{p+k}+1}\frac{P_1(x_1)}{Q_1(x_1)} + a_{p+1}x_1^{n_{p+k}-n_{p+1}} + \ldots + a_{p+k} = 0. \tag{2}$$

Supposons encore que cette équation n'ait que $p-1$ racines de modules supérieurs à un nombre fixe R inférieur aux inverses des modules de $x_1, x_2, \ldots, x_h$ et, par conséquent, $n_{p+k}+2$ racines dont les modules peuvent être inférieurs à un nombre arbitrairement petit r pour un choix convenable des n_i et des a_i.

Prenons la dérivée

$$x_1^{n_{p+k}}\frac{(n_{p+k}+1)P_1Q_1 + x_1(P'_1Q_1 - P_1Q'_1)}{Q_1^2}$$
$$+(n_{p+k}-n_{p+1})a_{p+1}x_1^{n_{p+k}-n_{p+1}-1} + \ldots + (n_{p+k}-n_{p+k-1})a_{p+k-1}x_1^{n_{p+k}-n_{p+k-1}-1},$$

qu'on peut écrire

$$n_{p+k}x_1^{n_{p+k}-n_{p+k-1}-1}\left[x_1^{n_{p+k-1}+1}\frac{P_2(x_1)}{Q_2(x_1)} + \left(1 - \frac{n_{p+1}}{n_{p+k}}\right)a_{p+1}x_1^{n_{p+k-1}-n_{p+1}} + \ldots\right],$$

en posant

$$P_2(x_1) = \left(1 + \frac{1}{n_{p+k}}\right)P_1Q_1 + \frac{x_1}{n_{p+k}}(P'_1Q_1 - P_1Q'_1).$$

On a

$$P_2(0) = \left(1 + \frac{1}{n_{p+k}}\right) P_1(0)$$

et

$$|P_2(0)| > |P_1(0)| > 0.$$

L'expression entre crochets se déduit donc, par la transformation $\left(x, \frac{1}{x_1}\right)$, d'une expression

$$(3) \qquad \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + a'_{p+1} x^{n_{p+1}} + \ldots + a'_{p+k-1} x^{n_{p+k-1}},$$

dans laquelle $Q_3(x)$ est de degré $2p+2$ et $P_3(x)$ est effectivement de degré $2p+1$. Cette dernière expression à $(k-1)$ coefficients a_i a donc $2p+1$ zéros dont les modules sont inférieurs à un nombre R'_0 qui ne dépend que des x_i, et des valeurs de $P_3(x)$ et de ses dérivées en ces points. Ces valeurs sont de la forme $\frac{A}{n_{p+k}}$, A ne dépendant que des valeurs de $P(x)$ et de ses dérivées aux points x_i et étant une fraction rationnelle bornée par rapport à ces valeurs. Comme $\frac{1}{n_{p+k}}$ varie de zéro à $\frac{1}{k-1}$, on voit que les valeurs de $P_3(x)$ et de ses dérivées aux points x_i restent bornées; il en résulte, d'après l'hypothèse, que l'expression (3) a $2p+1$ zéros dont les modules sont inférieurs à un nombre fixe R_0; donc, la dérivée de la fraction (2) a $2p+1$ racines dont les modules sont supérieurs à un nombre fixe $r_0 = \frac{1}{R_0}\cdot$ Comme elle a en tout $n_{p+k} + 2p + 1$ zéros, il en reste au plus n_{p+k} dont les modules peuvent devenir arbitrairement petits (il y en a d'ailleurs $n_{p+k} - n_{p+k-1} - 1$ qui sont nuls). Il est donc impossible que la fraction rationnelle (1) ait $n_{p+k} + 2$ racines inférieures en module à un nombre r arbitrairement petit, car, en choisissant r inférieur à r_0 et à

$$\frac{1}{2p+1} < \frac{n_{p+k}+2}{n_{p+k}+4p+2},$$

on devrait avoir, en vertu du théorème de M. Walsh, $n_{p+k}+1$ racines de la dérivée dont les modules seraient inférieurs à r.

Si, laissant fixes les nombres x_i, on fait varier les valeurs données à $P(x)$ et à ses dérivées en ces points de façon que leurs modules soient bornés et que le module de $P_1(0)$ reste supérieur à un nombre positif fixe, les valeurs de $P_3(x)$ et de ses dérivées aux points x_i auront aussi leurs modules bornés et les nombres R_0 auront une limite supérieure. La proposition est donc démontrée dans toute sa généralité pour le cas où la fraction rationnelle contient k paramètres arbitraires $a_{p+1}, \ldots, a_{p+k}$.

15. La proposition que nous venons de démontrer est, elle aussi, à rapprocher d'un théorème qui appartient au groupe des propositions relatives au théorème de Picard. La proposition du paragraphe précédent nous montre que tous les polynomes $P(x)$ prenant, ainsi que certaines de leurs dérivées, des valeurs données en des points fixes, ont toujours p zéros dans un cercle dont le rayon ne dépend que des valeurs données, des affixes des points donnés, de p, et du *nombre des termes* du polynome; p désigne le degré du polynome de plus petit degré vérifiant les conditions imposées à $P(x)$.

Au contraire, les polynomes $P(x)$ ou $P(x) - 1$ ont certainement p zéros dans un cercle dont le rayon ne dépend que des valeurs données, des affixes des points donnés, de p, et *non du nombre des termes* du polynome (1).

(1) P. MONTEL, *loc. cit.* page 23, en note.