

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

N. E. NÖRLUND

Sur les formules d'interpolation de Stirling et de Newton

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 39 (1922), p. 343-403

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1922_3_39__343_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1922, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR
LES FORMULES D'INTERPOLATION
DE STIRLING ET DE NEWTON⁽¹⁾

PAR N.-E. NÖRLUND

à Copenhague

1. Dans le calcul numérique les méthodes d'interpolation sont d'un grand secours. Pour l'Astronomie elles ont une importance capitale. Le problème de l'interpolation consiste à représenter une fonction à l'aide des valeurs qu'elle prend pour des valeurs déterminées de la variable indépendante. Ce problème comporte évidemment une infinité de solutions. Celle qui se présente tout d'abord à l'esprit a été donnée par Newton et Stirling et c'est d'ailleurs celle dont les calculateurs font presque toujours usage. Dans ce qui suit, nous supposerons que les valeurs de la variable se succèdent en progression arithmétique. Newton ⁽²⁾ représente une fonction, dont on connaît les valeurs dans les points $z = 0, \omega, 2\omega, 3\omega, \dots$, par une série de la forme

$$(1) \quad \sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z - \omega)(z - 2\omega) \dots (z - s\omega).$$

Mais si les valeurs de la fonction sont données pour les valeurs entières, positives ou négatives, de la variable on préfère généralement se servir de la *formule d'interpolation de Stirling* qui est composée de

(1) Un extrait des premiers paragraphes de ce Mémoire a paru en danois dans les *Communications de l'Académie royale des Sciences et des Lettres de Danemark*, t. 4, 1922.

(2) *Philos. naturalis principia math.* (livre III, lemme 5); *methodus differentialis* (*Opera*, t. 1, p. 521-528; London, 1779).

deux séries de la forme

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s z(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \dots (z^2 - s^2).$$

A celle-ci se rattachent *la formule de Gauss et la formule de Bessel* dont nous parlerons plus loin. Ces quatre séries sont d'ailleurs des cas particuliers d'une série de polynomes plus générale donnée par Newton (1).

Dans la théorie des approximations numériques ces développements jouent un rôle très important. On en fait usage dans la construction des tables numériques (2), dans le calcul des éphémérides et encore quand on a besoin de faire une différentiation mécanique ou une intégration mécanique. Ce dernier problème se présente souvent, par exemple dans l'Astronomie (3). On déduit le plus souvent les formules d'interpolation par un raisonnement symbolique (4) et purement formel ou bien en supposant que la fonction qu'il s'agit de représenter est égale à un polynome; en ce cas particulier la série se réduit à un nombre fini de termes. Il y a donc lieu de se demander si les séries d'interpolation sont convergentes ou non, et, dans le cas de l'affirmative, si la série représente la fonction qu'on s'est proposé de développer. Ce mémoire donne la réponse à ces questions. Nous allons voir *que les séries de Stirling et de Gauss divergent en général*. Pour que ces séries convergent, il faut que la fonction correspondante soit une

(1) Par conséquent, la notation formule de Gauss, de Stirling, etc., n'est pas entièrement en accord avec les faits historiques mais il paraît commode de conserver cette notation, pour abréger l'écriture, et parce qu'elle a été adoptée par un grand nombre d'auteurs.

(2) R. RADAU, *Études sur les formules d'interpolation*. Paris, 1891. — H.-L. RICE, *The theory and practice of interpolation*. Lynn, Mass., 1899. — D. GIBB, *Interpolation and numerical integration*. London, 1915.

(3) T. OPPOLZER, *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten*, Bd 2, p. 1-68; Leipzig, 1880. — J. F. ENCKE, *Ueber mechanische Quadratur*, *Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen*, Bd 1, p. 21-99; Berlin, 1888. — F. TISSETAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. 4, p. 151-197; Paris, 1896.

(4) Voir, par exemple, *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. I, vol. 4, p. 49-59 et 88-127. — G. BOOLE, *A treatise on the calculus of finite differences*, 2^e édition, p. 1-61; London, 1872. — T. N. THIELE, *Interpolationsrechnung*, p. 68-104; Leipzig, 1909.

fonction entière d'une nature bien particulière de sorte que la convergence ne se présente presque jamais dans les applications. Ce fait n'est pas sans intérêt. Par exemple, si l'on veut construire une table de logarithmes on se borne à calculer directement un petit nombre de logarithmes et l'on détermine tous les autres à l'aide de la formule d'interpolation de Stirling. En procédant ainsi on fera une grande économie de travail et l'on aura une approximation suffisante en se bornant à calculer trois ou quatre termes dans la série d'interpolation, pourvu que l'intervalle de la table ait été choisi suffisamment petit. Mais si cette condition n'est pas satisfaite, ou si l'on voulait essayer d'obtenir une approximation plus grande en calculant un grand nombre de termes dans la série d'interpolation, on trouverait une valeur entièrement fautive du logarithme par suite de la divergence de la série.

Mais ce n'est pas seulement dans la théorie des approximations numériques que les séries d'interpolation peuvent rendre service. Ces séries se présentent encore dans plusieurs problèmes d'Analyse. Tout récemment G. Pólya ⁽¹⁾ et F. Carlson ⁽²⁾ en ont fait des applications intéressantes à l'étude de certaines fonctions qui prennent des valeurs entières pour les valeurs entières de la variable. Dans le calcul aux différences finies les séries d'interpolation jouent un rôle capital et je vais en tirer parti dans un Mémoire prochain.

Dans les paragraphes 2-8 j'ai fait une étude approfondie des propriétés de la série de Stirling et j'ai indiqué la condition de convergence sous une forme qui paraît bien remarquable. A cette série se rattachent certaines formules de quadrature et de différentiation mécanique. Dans le paragraphe 15 j'ai indiqué la condition nécessaire et suffisante pour que ces développements convergent.

Il y a intérêt à rapprocher la formule de Stirling de la formule d'interpolation de Newton (1). Le calculateur se sert de la formule de Newton quand il s'agit d'interpoler au voisinage d'une des deux extré-

(1) *Ueber ganzwertige ganze Funktionen* (*Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 40, 1915, p. 1-16). — *Über ganze ganzwertige Funktionen* [*Nachr. Ges. Gött. (Math.-Phys.)*, 1920, p. 1-10]. L'étude de G. Pólya a été complétée par G.-H. Hardy et E. Landau (*Proc. Camb. philos. Soc.*, t. 19, 1919, p. 60-63; t. 20, 1920, p. 14-15).

(2) *Ueber ganzwertige Funktionen* (*Math. Z.*, t. 11, 1921, p. 1-23).

mités de la table; mais en tout autre cas il préfère la série de Stirling parce qu'elle est « plus convergente », c'est-à-dire que les premiers termes de la série de Stirling donnent une meilleure approximation que les premiers termes de la série de Newton. On pourrait donc être tenté de croire que la convergence de la série de Newton devrait entraîner la convergence de la série de Stirling. Mais il n'en est rien. Nous allons voir que la série (1) converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le fait la série d'interpolation de Stirling. On voit par là une nouvelle fois combien est grande la différence entre ce que demandent le géomètre et le calculateur des séries dont ils s'occupent. Si une série converge, le géomètre en peut tirer parti sans se préoccuper de la rapidité de la convergence. Mais s'il s'agit d'une approximation numérique l'essentiel est le degré d'approximation que donnent *les premiers termes* de la série, et une série de Stirling, qui diverge, peut quelquefois rendre de plus grands services qu'une série de Newton qui converge.

La série (1) a été étudiée par S. Pincherle et F. Carlson dans deux Mémoires dont nous parlerons plus loin. S. Pincherle a fait remarquer qu'il n'y a pas, en général, de point singulier sur la droite de convergence. Dans les paragraphes 9-13 j'ai étudié la série de Newton par une méthode nouvelle et directe. Je démontre qu'il y a un rapport remarquable et très simple entre le domaine de convergence de la série et les propriétés analytiques de la fonction qu'elle représente. Ceci est vrai pour toute valeur positive de ω en exceptant une seule qui présente des difficultés sérieuses. Je me suis arrêté longtemps sur ce problème et les résultats obtenus présentent quelque analogie avec ceux qu'a trouvés H. Bohr relativement aux séries de Dirichlet.

En particulier, je démontre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $\Phi(z)$ se représente par la série (1) (ω étant positif) c'est qu'il existe un nombre réel α tel que la fonction est holomorphe dans le demi-plan $\Re(z) > \alpha$ et γ satisfait à l'inégalité

$$|\Phi(z)| < e^{k|z|},$$

k étant un nombre positif. La série converge dans le demi plan $\Re(z) > \alpha$ si le nombre ω est positif et suffisamment petit.

La formule d'interpolation de Stirling.

2. Considérons d'abord une série de la forme

$$(2) \quad \sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \dots (z^2 - s^2),$$

où les coefficients a_s ne dépendent pas de z . Si z est un entier positif, négatif ou nul, la série se réduit à un nombre fini de termes. En mettant de côté ce cas, nous démontrerons le théorème suivant. *Si la série (2) converge pour $z = z_0$ (où z_0 n'est pas un entier), elle converge uniformément dans tout domaine fini dans le plan de la variable z . Ce résultat se déduit aisément d'un théorème d'Abel (1).*

En effet, posons

$$b_s = a_s z_0 (z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2) \dots (z_0^2 - s^2),$$

$$u_s(z) = \frac{z(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \dots (z^2 - s^2)}{z_0(z_0^2 - 1^2)(z_0^2 - 2^2) \dots (z_0^2 - s^2)},$$

on aura

$$u_s(z) - u_{s+1}(z) = u_s(z) \frac{z^2 - z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2}.$$

Le reste de la série (2) peut donc s'écrire comme il suit

$$(3) \quad \sum_{s=n}^{s=m} b_s u_s(z) = \sum_{s=n}^{s=m} [u_s(z) - u_{s+1}(z)] \sum_{v=n}^{v=s} b_v + u_{m+1}(z) \sum_{v=n}^{v=m} b_v$$

$$= (z^2 - z_0^2) \sum_{s=n}^{s=m} \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{v=n}^{v=s} b_v + u_{m+1}(z) \sum_{v=n}^{v=m} b_v.$$

Pour voir comment les u_s se comportent pour des valeurs très grandes de s , divisons le numérateur et le dénominateur de u_s par $(s!)^2$; nous aurons

$$(4) \quad u_s(z) = \frac{z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}.$$

(1) BROMWICH, *Theory of infinite series*, p. 205-7; London, 1908.

Sur cette expression on voit immédiatement que u_s tend uniformément vers une limite quand s augmente indéfiniment, z étant situé dans un domaine fini quelconque. Cette limite est d'ailleurs égale à

$$\lim_{s \rightarrow \infty} u_s(z) = \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0}.$$

Cela posé, soit ε un nombre positif. Par hypothèse, on sait trouver un nombre n_0 tel que

$$\left| \sum_{v=n}^{v=s} b_v \right| < \varepsilon, \quad \text{si } s \geq n \geq n_0.$$

De l'équation (3) on déduit donc l'inégalité suivante

$$\left| \sum_{s=n}^{s=m} b_s u_s(z) \right| < C\varepsilon \sum_{s=n}^{s=m} \frac{1}{|(s+1)^2 - z_0^2|} + C\varepsilon < C_1\varepsilon,$$

C et C_1 désignant des constantes. Le théorème énoncé est donc vrai. Par conséquent, si la série (2) converge, elle représente toujours une fonction entière que nous désignerons par $H(z)$:

$$H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s z (z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \dots (z^2 - s^2).$$

Pour voir quelles sont les fonctions entières qui admettent un développement de cette forme nous allons chercher une fonction majorante relative à $H(z)$. Il va sans dire qu'on peut choisir les a_s tels que la série (2) converge absolument dans tout le plan. Mais il arrive aussi que cette série est simplement convergente pour toute valeur de z qui n'est pas un entier. Pour cette raison nous allons d'abord transformer la série en une série absolument convergente. Reprenons l'équation (3), posons $n = 0$ et faisons tendre m vers l'infini. On trouvera

$$H(z) = H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} + (z^2 - z_0^2) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \sum_{v=0}^{v=s} b_v.$$

La dernière série converge absolument, car les u_s tendent vers une limite finie quand s augmente indéfiniment, comme nous l'avons déjà vu, et la série $\sum b_v$ est par hypothèse convergente. On sait donc trouver

une constante c telle que

$$\left| \sum_{v=0}^{v=s} b_v \right| < c, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

On a par conséquent l'inégalité suivante

$$(5) \quad |H(z)| < \left| H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} \right| + c |z^2 - z_0^2| \sum_{s=0}^{\infty} \left| \frac{u_s(z)}{(s+1)^2 - z_0^2} \right|.$$

Nous avons supposé que la série (2) converge pour $z = z_0$, mais cette hypothèse entraîne que la série converge dans tout le plan. Nous pouvons donc, sans restreindre la généralité, admettre que $0 < z_0 < 1$. De l'équation (4) on déduit maintenant que

$$\begin{aligned} |u_s(z)| \frac{|z^2 - z_0^2|}{(s+1)^2 - z_0^2} &\leq \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \left(1 + \frac{|z|^2}{2^2}\right) \dots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z_0^2}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} \frac{|z|^2 + z_0^2}{(s+1)^2 - z_0^2} \\ &= \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \dots \left[1 + \frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right]}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \dots \left[1 - \frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right]} \\ &= \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \dots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} |z^2 - z_0^2| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{|u_s(z)|}{(s+1)^2 - z_0^2} &\leq \sum_{s=0}^{\infty} \left\{ \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \dots \left[1 + \frac{|z|^2}{(s+1)^2}\right]}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \dots \left[1 - \frac{z_0^2}{(s+1)^2}\right]} - \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \dots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{|z| \left(1 + \frac{|z|^2}{1^2}\right) \dots \left(1 + \frac{|z|^2}{s^2}\right)}{z_0 \left(1 - \frac{z_0^2}{1^2}\right) \dots \left(1 - \frac{z_0^2}{s^2}\right)} - \frac{|z|}{z_0} \\ &= \frac{\operatorname{sh} \pi |z|}{\sin \pi z_0} \frac{|z|}{z_0}, \end{aligned}$$

où $\text{sh } z$ désigne le sinus hyperbolique de z . En substituant cette expression dans l'inégalité (5) on trouvera

$$|H(z)| < \left| H(z_0) \frac{\sin \pi z}{\sin \pi z_0} \right| + c \left(\frac{\text{sh } \pi |z|}{\sin \pi z_0} - \frac{|z|}{z_0} \right).$$

Par conséquent, si la fonction $H(z)$ admet un développement de la forme (2), on sait trouver une constante C telle que

$$(6) \quad |H(z)| < C e^{\pi |z|}$$

pour toute valeur de z . Cette inégalité cesse d'être vraie si, dans l'exposant, on remplace π par un nombre qui est inférieur à π . En effet, la fonction $\sin \omega z$ admet un développement de la forme (2), si $-\pi < \omega < \pi$. Mais il n'en est plus ainsi pour $\omega = \pi$. De même, la fonction entière

$$\frac{\cos \pi z - 1}{z}$$

se représente par une série de la même forme.

3. Quand on veut trouver toutes les fonctions qui se représentent par notre formule d'interpolation, on peut donc se borner à considérer les fonctions entières dont l'ordre est ≤ 1 . Pour voir quelle condition ultérieure il faut imposer à ces fonctions nous allons exprimer le terme complémentaire de la série à l'aide de l'intégrale de Cauchy. Soit $H(x)$ une fonction entière et posons pour abrégier

$$\begin{aligned} \Delta H(x) &= H(x+1) - H(x), \\ \Delta^n H(x) &= \Delta[\Delta^{n-1} H(x)]. \end{aligned}$$

Les différences successives de $H(x)$ s'expriment par les intégrales suivantes

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{\zeta - x}, \\ \Delta H(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1)}, \\ \Delta^n H(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\zeta) d\zeta}{(\zeta - x)(\zeta - x - 1) \dots (\zeta - x - n)}, \end{aligned}$$

où la ligne d'intégration est un cercle parcouru en sens positif, ayant l'origine pour centre et avec un rayon si grand que le cercle comprend les points $x, x + 1, \dots, x + n$.

Cela posé, considérons l'identité suivante

$$(7) \quad \frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\psi_1(\zeta)} + \frac{\psi_1(z)}{\psi_2(\zeta)} + \frac{\psi_2(z)}{\psi_3(\zeta)} + \dots + \frac{\psi_{n-1}(z)}{\psi_n(\zeta)} + \frac{\psi_n(z)}{\psi_n(\zeta)} \frac{1}{\zeta - z},$$

où

$$\psi_\nu(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_\nu).$$

Choisissons d'abord les nombres a_ν comme il suit

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = -n, \quad a_{2n+1} = n.$$

On trouvera

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{s=0}^n \frac{(z+s)(z+s-1) \dots (z-s+1)}{(\zeta+s)(\zeta+s-1) \dots (\zeta-s)} + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{(z+s)(z+s-1) \dots (z-s)}{(\zeta+s+1)(\zeta+s) \dots (\zeta-s)} + \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \dots (z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \dots (\zeta^2-n^2)} \frac{1}{\zeta - z}.$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $H(\zeta)$ et intégrons par rapport à ζ le long d'un cercle C_n parcouru en sens positif, ayant l'origine pour centre et avec un rayon qui est plus grand que n . On trouve

$$(8) \quad H(z) = \sum_{s=0}^n \binom{z+s}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \sum_{s=0}^{n-1} \binom{z+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1},$$

où

$$(9) \quad R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2) \dots (z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \dots (\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On suppose ici que le point z est situé à l'intérieur du cercle C_n . De même en choisissant, dans l'équation (7), les nombres a_ν de la manière suivante :

$$a_1 = 0, \quad a_{2n} = n, \quad a_{2n+1} = -n,$$

on obtiendra, au lieu de l'équation (8), cette autre relation :

$$(10) \quad H(z) = \sum_{s=0}^n \binom{z+s-1}{2s} \Delta^{2s} H(-s) \\ + \sum_{s=0}^{n-1} \binom{z+s}{2s+1} \Delta^{2s+1} H(-s) + R_{2n+1}.$$

Pour abréger, nous désignerons les séries (8) et (10) comme *les formules d'interpolation de Gauss* ⁽¹⁾. En ajoutant terme à terme ces deux séries on trouvera *la formule d'interpolation de Stirling* ⁽²⁾ :

$$(11) \quad H(z) = \sum_{s=0}^n \frac{z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(s-1)^2]}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s) \\ + \sum_{s=0}^{n-1} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) + R_{2n+1},$$

où R_{2n+1} a la valeur indiquée par l'intégrale (9). Ici nous avons posé, pour abréger,

$$\nabla H(x) = \frac{H(x+1) + H(x)}{2}.$$

En donnant à s les valeurs 0, 1, 2, ..., $n-1$ dans les deux séries qui figurent au second membre de l'équation (11), on trouvera pour le reste R_{2n} après $2n$ termes l'expression suivante :

$$(12) \quad R_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{z(z^2-1^2)\dots[z^2-(n-1)^2](z\zeta-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2)\dots(\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

On obtient un autre développement remarquable de la manière suivante. Remplaçons, dans l'équation (10), z par $z + \frac{1}{2}$ et $H(z)$

(1) C.-F. GAUSS, *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (*Werke*, t. III, p. 265-330), Göttingen, 1876. — I.-F. ENCKE, *Ueber Interpolation. Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen*, t. I, p. 1-20; Berlin, 1888. Dans ce Mémoire, Encke reproduit des leçons faites par Gauss en 1812.

(2) *Methodus differentialis sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, London, 1730.

par $H\left(z - \frac{1}{2}\right)$. Remplaçons, dans l'équation (8), z par $z - \frac{1}{2}$ et $H(z)$ par $H\left(z + \frac{1}{2}\right)$. En ajoutant terme à terme les deux séries ainsi obtenues on trouvera la formule d'interpolation de Bessel :

$$H(z) = \sum_{s=0}^n \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s)!} \nabla^{2s} H\left(-s - \frac{1}{2}\right) + z \sum_{s=0}^{n-1} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H\left(-s - \frac{1}{2}\right) + \mathfrak{R}_{2n+1},$$

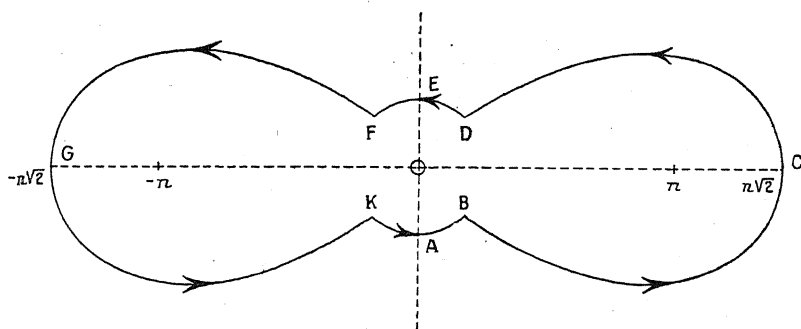
où

$$4) \quad \mathfrak{R}_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right] H(\zeta)}{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[\zeta^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[\zeta^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right] \zeta - z} d\zeta,$$

$$5) \quad \mathfrak{R}_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{n+1}} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \dots \left[\zeta^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]} \left[z\zeta - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right] \frac{H(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

4. Je vais démontrer que ces termes complémentaires tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment, si la fonction $H(z)$ satisfait à

Fig. 1.



une certaine inégalité. Considérons d'abord R_{2n+1} . Sans changer la valeur de cette intégrale on peut déformer le cercle C_n et le remplacer par le chemin d'intégration indiqué dans la figure 1. KAB et DEF désignent deux arcs d'un cercle ayant l'origine comme centre et avec

le rayon $\log n$. Comme ligne d'intégration je prends la courbe ABCDEFGKA, qui est composée de ces deux arcs de cercle et de deux arcs BCD et FGK de la lemniscate de Bernoulli qui a pour équation $r = n\sqrt{2 \cos 2\varphi}$. Cette courbe coupe donc l'axe réel dans les points $\pm n\sqrt{2}$. Ce choix du chemin d'intégration est un point essentiel dans notre démonstration. Il va nous permettre d'indiquer, avec une très grande précision, la condition qui assure la convergence de la série. Si l'on avait cheminé le long d'une autre courbe on aurait trouvé une inégalité moins précise. Comme le chemin d'intégration est symétrique par rapport à l'axe imaginaire on peut réduire l'intégrale (9) et l'écrire comme il suit :

$$(16) \quad R_{2n+1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\dots(\zeta^2-n^2)} \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2-z^2} d\zeta,$$

où nous avons posé, pour abrégé,

$$(17) \quad H_1(\zeta) = \zeta[H(\zeta) - H(-\zeta)] + z[H(\zeta) + H(-\zeta)].$$

Soit φ_n le plus petit nombre positif qui satisfait à l'équation

$$(18) \quad \cos 2\varphi_n = \frac{1}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2.$$

Le nombre φ_n est inférieur à $\frac{\pi}{4}$ et l'on a évidemment

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \frac{\pi}{4}.$$

Si nous posons $\zeta = r e^{i\varphi}$, le chemin d'intégration est composé de :

1° L'arc AB, où

$$r = \log n \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\varphi_n;$$

2° L'arc BCD, où

$$r = n\sqrt{2 \cos 2\varphi} \quad \text{et} \quad -\varphi_n \leq \varphi \leq \varphi_n;$$

3° L'arc DE, où

$$r = \log n \quad \text{et} \quad \varphi_n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Écrivons maintenant l'intégrale (16) sous la forme suivante :

$$R_{2n+1} = z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \left(1 - \frac{z^2}{2^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{1}{2\pi i} \\ \times \int_{ABCDE} \frac{(-1)^n (n!)^2 \Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n + 1)} \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta.$$

Le produit qui figure avant le signe intégrale tend vers une limite finie, quand n augmente indéfiniment, savoir vers la limite $\frac{\sin \pi z}{\pi}$. Il suffit donc de considérer la dernière intégrale, que je décompose en trois parties en écrivant

$$R_{2n+1} = z \left(1 - \frac{z^2}{1^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \frac{1}{2\pi i} (P_n + Q_n + T_n),$$

où

$$P_n = \int_{AB}, \quad Q_n = \int_{BCD}, \quad T_n = \int_{DE}.$$

Sur l'arc BCD on a maintenant

$$\zeta = n \sqrt{2 \cos 2\varphi} e^{i\varphi},$$

par conséquent,

$$d\zeta = i n \sqrt{2 \cos 2\varphi} (1 + i \tan 2\varphi) e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$\left| \frac{d\zeta}{d\varphi} \right| = \frac{n \sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

En posant, pour abrégier,

$$(19) \quad f_n(\varphi) = (-1)^n \frac{(n!)^2 \Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n + 1)}$$

$$(20) \quad = \frac{\pi}{\sin \pi \zeta} \frac{[\Gamma(n)]^2}{\Gamma(n + \zeta) \Gamma(n - \zeta)} \frac{n^2}{n^2 - \zeta^2},$$

on trouvera

$$P_n = i \log n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\varphi_n} f_n(\varphi) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$(21) \quad Q_n = i n \int_{-\varphi_n}^{+\varphi_n} f_n(\varphi) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} \sqrt{2 \cos 2\varphi} (1 + i \tan 2\varphi) e^{i\varphi} d\varphi,$$

$$(22) \quad T_n = i \log n \int_{\varphi_n}^{\frac{\pi}{2}} f_n(\varphi) \frac{H_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} e^{i\varphi} d\varphi.$$

5. Avant d'aller plus loin je m'arrête un moment pour dire quelques mots sur une certaine fonction $\psi(\nu)$ qui joue un rôle important dans notre problème. Je définis cette fonction dans l'intervalle $-\pi \leq \nu \leq \pi$ par les deux expressions suivantes :

$$(23) \quad \psi(\nu) = \cos \nu \log(\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu)^2 + 2 \sin \nu \arcsin(\sqrt{2} \sin \nu),$$

si

$$0 \leq |\nu| \leq \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \frac{3\pi}{4} \leq |\nu| \leq \pi.$$

Mais

$$(24) \quad \psi(\nu) = \pi |\sin \nu|$$

si

$$\frac{\pi}{4} \leq |\nu| < \frac{3\pi}{4}.$$

La fonction, ainsi définie, satisfait aux relations

$$(25) \quad \begin{cases} \psi(\nu) = \psi(-\nu), \\ \psi(\nu) = \psi(\pi - \nu), \end{cases}$$

et elle est continue, car, des deux expressions indiquées, il résulte que

$$\psi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

On a, de plus,

$$\begin{aligned} \psi(0) = \psi(\pm \pi) &= 2 \log(1 + \sqrt{2}), \\ \psi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) &= \pi. \end{aligned}$$

Je vais démontrer que la fonction $\psi(\nu)$ admet des minima dans les points 0 et $\pm \pi$ et des maxima dans les points $\pm \frac{\pi}{2}$. Considérons d'abord l'intervalle $0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{4}$. On aura

$$(26) \quad \arcsin(\sqrt{2} \sin \nu) = \sqrt{2} \int_0^\nu \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}},$$

$$(27) \quad \log(\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu) = \sqrt{2} \int_\nu^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

On le vérifie aisément en dérivant par rapport à ν . En faisant $\nu = 0$ dans la dernière équation on trouvera

$$\log(1 + \sqrt{2}) = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

L'expression (23) peut donc s'écrire comme il suit :

$$\begin{aligned} (28) \quad \psi(\nu) &= 2 \cos \nu \log(1 + \sqrt{2}) - 2\sqrt{2} \cos \nu \int_0^{\nu} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}} \\ &\quad + 2\sqrt{2} \sin \nu \int_0^{\nu} \frac{\cos x \, dx}{\sqrt{\cos 2x}} \\ &= 2 \cos \nu \log(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \int_0^{\nu} \frac{\sin(\nu - x) \, dx}{\sqrt{\cos 2x}}. \end{aligned}$$

En dérivant par rapport à ν il vient

$$(29) \quad \psi'(\nu) = -2 \sin \nu \log(1 + \sqrt{2}) + 2\sqrt{2} \int_0^{\nu} \frac{\cos(\nu - x)}{\sqrt{\cos 2x}} \, dx.$$

En dérivant encore une fois on trouvera

$$(30) \quad \psi''(\nu) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\nu}} - \psi(\nu).$$

De l'équation (28) on déduit l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \psi(\nu) &\leq 2 \cos \nu \log(1 + \sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\nu}} \int_0^{\nu} \sin(\nu - x) \, dx \\ &= 2 \cos \nu \log(1 + \sqrt{2}) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\nu}} (1 - \cos \nu). \end{aligned}$$

On aura donc, en vertu de l'équation (30),

$$\psi''(\nu) \geq 2 \cos \nu \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\nu}} - \log(1 + \sqrt{2}) \right].$$

Mais il en résulte que $\psi''(\nu)$ est positive dans l'intervalle en question. On voit à l'équation (29) que

$$\psi'(0) = 0.$$

La dérivée $\psi'(\nu)$ est donc positive, continue et croissante dans

l'intervalle $0 < \nu \leq \frac{\pi}{4}$. On en conclut, en tenant compte de l'expression (24), que la fonction $\psi(\nu)$ est positive, continue et croissante dans l'intervalle $0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$. Cela posé, on voit aux équations (25) que la fonction $\psi(\nu)$ admet les maxima et minima indiqués ci-dessus et qu'elle n'en admet pas d'autres. On a donc, pour toute valeur de ν ,

$$\pi \geq \psi(\nu) \geq 2 \log(1 + \sqrt{2}) > 0.$$

Des équations (23), (26) et (27) on peut aussi déduire l'expression suivante de la fonction $\psi(\nu)$:

$$\psi(\nu) = \pi \sin \nu + 2\sqrt{2} \int_{\nu}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x - \nu) dx}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

Dans l'intervalle $\frac{\pi}{4} > \nu \geq 0$ la fonction satisfait donc à l'inégalité

$$\psi(\nu) > \pi \sin \nu.$$

6. Posons

$$(31) \quad h(\nu) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\mathbf{H}(r e^{i\nu})|}{r}.$$

Dans le paragraphe 2 nous avons démontré que la convergence de la série d'interpolation entraîne que

$$h(\nu) \leq \pi$$

pour toute valeur de ν . Mais c'est seulement dans les points $\nu = \pm \frac{\pi}{2}$ que la fonction $h(\nu)$ peut atteindre sa limite supérieure π . Par une analyse plus détaillée on peut, en effet, démontrer que

$$h(\nu) \leq \psi(\nu).$$

De plus, on voit aisément que les termes complémentaires que nous venons d'indiquer tendent vers zéro, si

$$h(\nu) < \psi(\nu)$$

pour toute valeur de ν . On peut même démontrer un théorème plus précis. Admettons que la fonction entière $\mathbf{H}(\zeta) = \mathbf{H}(r e^{i\nu})$ satisfait

aux inégalités

$$(32) \quad |H(\zeta) - H(-\zeta)| < e^{r\psi(\nu)} r^{\beta_1},$$

$$(33) \quad |H(\zeta) + H(-\zeta)| < e^{r\psi(\nu)} r^{\beta_2},$$

pour $r \geq r_0$. Soit β le plus grand des nombres β_1 et $\beta_2 - 1$; on sait trouver une constante C telle que

$$(34) \quad |H_1(r e^{i\nu})| < C e^{r\psi(\nu)} r^{\beta+1}$$

pour $r \geq r_0$. Nous allons démontrer que le reste R_{2n+1} tend vers zéro, si β est négatif. Dans ce but, étudions comment la fonction $|f_n(\nu)|$ se comporte pour les valeurs très grandes de n . Admettons d'abord que $\nu_n > \nu > -\nu_n$. On sait que

$$(35) \quad \Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} [1 + \varepsilon(x)],$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers zéro, quand x tend vers l'infini d'une telle manière qu'elle s'éloigne indéfiniment de l'axe des nombres négatifs. L'expression (19) peut donc s'écrire

$$(36) \quad \begin{aligned} f_n(\nu) &= (-1)^n \frac{[\Gamma(n)]^2 \Gamma(\zeta - n)}{\Gamma(\zeta + n)} \frac{n^2}{\zeta + n} \\ &= (-1)^n 2\pi \left(\frac{n^2}{\zeta^2 - n^2} \right)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right)^\zeta [1 + \varepsilon(n)], \end{aligned}$$

où $\varepsilon(n)$ tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. Puisque

$$\nu_n > \nu > -\nu_n,$$

nous aurons

$$\zeta = r e^{i\nu} = n \sqrt{2 \cos 2\nu} e^{i\nu}.$$

On en déduit que

$$\zeta^2 - n^2 = n^2 e^{4i\nu}.$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{\zeta^2 - n^2}{n^2} \right| = 1.$$

Par un calcul facile on trouvera

$$\begin{aligned} \frac{\zeta - n}{\zeta + n} &= \frac{2 \cos 2\nu - 1 + i 2 \sin \nu \sqrt{2 \cos 2\nu}}{(\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu)^2} \\ &= \left(\frac{\sqrt{\cos 2\nu} + i \sqrt{2} \sin \nu}{\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu} \right)^2. \end{aligned}$$

Mais, de cette équation résulte que

$$\left| \frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right| = (\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu)^{-2},$$

$$\arg \frac{\zeta - n}{\zeta + n} = 2 \arcsin(\sqrt{2} \sin \nu).$$

De l'expression (36) nous pouvons donc conclure que

$$|f_n(\nu)| = 2\pi \left| \left(\frac{\zeta - n}{\zeta + n} \right)^\zeta [1 + \varepsilon(n)] \right|$$

$$= 2\pi e^{-r\psi(\nu)} |1 + \varepsilon(n)|.$$

Cela posé, on déduit de l'équation (21), en tenant compte de l'inégalité (34),

$$|Q_n| \leq n \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} |f_n(\nu)| \left| \frac{\mathbf{H}_1(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} \right| \frac{\sqrt{2} d\nu}{\sqrt{\cos 2\nu}}$$

$$< n C_1 \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} |f_n(\nu)| e^{r\psi(\nu)} r^{\beta-1} \frac{d\nu}{\sqrt{\cos 2\nu}}$$

$$< n^\beta C_2 \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} (\cos 2\nu)^{\frac{1}{2}\beta-1} d\nu$$

$$= 2 C_2 n^\beta \int_0^{\nu_n} (\cos 2\nu)^{\frac{1}{2}\beta-1} d\nu,$$

où C_1 et C_2 désignent des constantes. En décomposant la dernière intégrale en deux parties on trouvera

$$|Q_n| < 2 C_2 n^\beta \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos 2\nu)^{\frac{1}{2}\beta-1} d\nu + 4 C_2 n^\beta \int_{\frac{\pi}{6}}^{\nu_n} \frac{\sin 2\nu d\nu}{(\cos 2\nu)^{1-\frac{1}{2}\beta}}.$$

Admettons que $\beta < 0$. La première intégrale au second membre tend vers zéro quand n augmente indéfiniment. La dernière intégrale est égale à

$$2 C_2 n^\beta \int_{\cos 2\nu_n}^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}\beta-1} dx = 4 C_2 \beta^{-1} n^\beta \left[2^{-\frac{1}{2}\beta} - (\cos 2\nu_n)^{\frac{1}{2}\beta} \right]$$

$$= 2^{2-\frac{1}{2}\beta} C_2 \beta^{-1} [n^\beta - (\log n)^\beta].$$

Mais cette expression tend vers zéro, quand $n \rightarrow \infty$, parce que β est

négatif. On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0.$$

Considérons maintenant l'intégrale T_n . Commençons par étudier comment se comporte la fonction $f_n(\nu)$ sur l'arc DE quand n est très grand. f_n peut s'écrire sous la forme (20). De l'expression asymptotique (35) de la fonction gamma on conclut que

$$\frac{[\Gamma(n)]^2}{\Gamma(n+\zeta)\Gamma(n-\zeta)} \frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = \left(\frac{n^2}{n^2-\zeta^2}\right)^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right)^\zeta [1+\varepsilon(n)].$$

En posant $\zeta = \log n e^{i\nu}$, on trouvera

$$\frac{n-\zeta}{n+\zeta} = \frac{n^2 - (\log n)^2 - 2in \log n \sin \nu}{n^2 + (\log n)^2 + 2n \log n \cos \nu}.$$

On a donc

$$\left| \frac{n-\zeta}{n+\zeta} \right|^2 = 1 - \frac{4n \log n \cos \nu}{n^2 + (\log n)^2 + 2n \log n \cos \nu},$$

$$\arg \frac{n-\zeta}{n+\zeta} = -\operatorname{arc tang} \frac{2n \log n \sin \nu}{n^2 - \log^2 n}.$$

En posant, pour abrégé,

$$\varphi(n) = \frac{4n \log n \cos \nu}{n^2 + \log^2 n + 2n \log n \cos \nu},$$

on aura donc

$$\left| \left(\frac{n-\zeta}{n+\zeta}\right)^\zeta \right| = e^{\frac{1}{2} \log n \cos \nu \log [1-\varphi(n)] + \log n \sin \nu \operatorname{arc tang} \frac{2n \log n \sin \nu}{n^2 - \log^2 n}}.$$

Quand n tend vers l'infini, cette expression tend uniformément vers 1. De plus, on trouvera

$$\left| \frac{n^2 - \zeta^2}{n^2} \right|^2 = 1 - \frac{2}{n^2} \log^2 n \cos 2\nu + \frac{\log^4 n}{n^4}.$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{n^2}{n^2 - \zeta^2} \right|^{n+\frac{1}{2}} = e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{2}{n^2} \log^2 n \cos 2\nu + \frac{\log^4 n}{n^4}\right)}.$$

Cette quantité tend aussi vers 1, quand $n \rightarrow \infty$. Nous avons ainsi démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[\Gamma(n)]^2}{\Gamma(n+\zeta)\Gamma(n-\zeta)} \frac{n^2}{n^2-\zeta^2} = 1,$$

si $|\zeta| = \log n$. On sait donc trouver une constante c telle que, sur l'arc DE,

$$|f_n(\nu)| < c e^{-r\pi \sin \nu}.$$

Cela posé, on voit que l'intégrale (22) satisfait à l'inégalité

$$\begin{aligned} |T_n| &< C_1 r^{-1} \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{2}} |f_n(\nu) \mathbf{H}_1(r e^{i\nu})| d\nu \\ &< C_2 r^{-1} \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r\pi \sin \nu} |\mathbf{H}_1(r e^{i\nu})| d\nu, \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Décomposons cette intégrale en deux parties et remplaçons \mathbf{H}_1 par l'expression (34). On trouvera

$$|T_n| < C C_2 r^\beta \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r[\psi(\nu) - \pi \sin \nu]} d\nu + C C_2 r^\beta \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\nu.$$

Le dernier terme au second membre tend vers zéro, quand $n \rightarrow \infty$, parce que β est négatif. De l'équation (18) il résulte que

$$\frac{\pi}{4} - \nu_n < \frac{1}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2.$$

Puisque la fonction continue $\psi(\nu) - \pi \sin \nu$ s'annule dans le point $\nu = \frac{\pi}{4}$, on sait trouver un nombre positif n_0 tel que, pour $n > n_0$, on aura

$$\psi(\nu) - \pi \sin \nu < 1,$$

si

$$\frac{\pi}{4} \geq \nu \geq \nu_n.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{4}} e^{r[\psi(\nu) - \pi \sin \nu]} d\nu &= \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{4}} n^{\psi(\nu) - \pi \sin \nu} d\nu \\ &< n \left(\frac{\pi}{4} - \nu_n \right) < \frac{n}{2} \left(\frac{\log n}{n} \right)^2, \end{aligned}$$

et la dernière quantité tend vers zéro quand n augmente indéfiniment.

On en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0.$$

On voit tout à fait de la même manière que l'intégrale $T_n \rightarrow 0$. Nous avons ainsi démontré que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_{2n+1} = 0,$$

si $\beta < 0$. Les séries d'interpolation de Gauss,

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \Delta^{2s-1} H(-s) \right],$$

$$H(z) = H(0) + \sum_{s=1}^{\infty} \left[\binom{z+s-1}{2s} \Delta^{2s} H(-s) + \binom{z+s-1}{2s-1} \Delta^{2s-1} H(-s+1) \right],$$

convergent donc, si $H(z)$ est une fonction entière qui satisfait aux inégalités (32) et (33), où

$$(37) \quad \beta_1 < 0, \quad \beta_2 < 1.$$

Considérons maintenant l'intégrale (12). Nous pouvons la décomposer en deux intégrales et écrire le reste R_{2n} sous la forme suivante :

$$R_{2n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z^2(z^2-1^2) \dots [z^2-(n-1)^2]}{\zeta(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \dots [\zeta^2-(n-1)^2]} \frac{H(\zeta) + H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2) \dots (z^2-n^2)}{(\zeta^2-1^2)(\zeta^2-2^2) \dots (\zeta^2-n^2)} \frac{H(\zeta) - H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta.$$

On voit immédiatement que les inégalités (37) entraînent aussi que ces deux intégrales tendent vers zéro quand n augmente indéfiniment.

La série de Stirling

$$H(z) = H(0) + \frac{z}{1} \nabla \Delta H(-1) + \frac{z^2}{2!} \Delta^2 H(-1) + \frac{z(z^2-1^2)}{3!} \nabla \Delta^3 H(-2)$$

$$+ \frac{z^2(z^2-1^2)}{4!} \Delta^4 H(-2) + \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)}{5!} \nabla \Delta^5 H(-3) + \dots$$

converge donc si les nombres β_1 et β_2 satisfont aux inégalités (37).

E.-T. Whittaker et K. Ogura ont indiqué récemment un théorème semblable mais sans arriver à la condition de convergence précise que nous venons de trouver.

Dans un Mémoire important, E.-T. Whittaker ⁽¹⁾ fait voir que la série de Gauss converge, si $H(z)$ est une fonction entière qui satisfait à l'inégalité

$$|H(re^{i\nu})| < \text{const. } e^{(\pi-\varepsilon)r|\sin\nu|}, \quad \varepsilon > 0.$$

Mais cet auteur a ainsi laissé de côté des fonctions telles que la suivante :

$$H(z) = \alpha^z, \quad 3 - 2\sqrt{2} \leq \alpha \leq 3 + 2\sqrt{2},$$

qui satisfait à notre condition de convergence. K. Ogura ⁽²⁾ démontre, dans un article publié par les soins de J. Hadamard, que la série d'interpolation de Stirling converge si $H(z)$ est une fonction entière et paire qui satisfait à la condition

$$|H(re^{i\nu})| < e^{\lambda r}, \quad 0 < \lambda < \log 2.$$

Nous avons vu qu'on peut remplacer λ par une fonction de ν qui vérifie l'inégalité

$$\pi \geq \psi(\nu) \geq \log(3 + 2\sqrt{2}).$$

Considérons enfin les termes complémentaires (14) et (15) de la série de Bessel. Nous pouvons réduire ces intégrales à la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{2n+1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z \left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[z^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[\zeta^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[\zeta^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]} \frac{H(\zeta) - H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[z^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right]}{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[\zeta^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[\zeta^2 - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \right]} \zeta \frac{H(\zeta) + H(-\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta, \\ \mathfrak{R}_{2n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[z^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}{\left[\zeta^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[\zeta^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[\zeta^2 - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \right]} \frac{H_2(\zeta)}{\zeta^2 - z^2} d\zeta, \end{aligned}$$

où

$$H_2(\zeta) = \zeta[H(\zeta) + H(-\zeta)] + z[H(\zeta) - H(-\zeta)].$$

⁽¹⁾ *On the Functions which are represented by the Expansions of the Interpolation-Theory* (Proceed. Royal Soc. Edinburgh, t. XXXV, 1915, p. 181-194).

⁽²⁾ *Sur la théorie de l'interpolation de Stirling et les zéros des fonctions entières* (Bull. Sc. math., 2^e série, t. XLV, 1921, p. 31-40); voir aussi *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens à Strasbourg, 1920, Toulouse, 1921, p. 316-322.*

En raisonnant comme plus haut on voit que ces deux restes tendent vers zéro, c'est-à-dire que *la série de Bessel converge, si*

$$(38) \quad \beta_1 < 1, \quad \beta_2 < 0.$$

Si $H(z)$ est une fonction impaire, la série de Bessel est donc celle qui est la plus avantageuse, mais si $H(z)$ est une fonction paire, la série de Stirling est à préférer.

J'ai encore quelques remarques à ajouter au sujet de la série de Gauss. En réunissant deux termes consécutifs en un seul terme, nous avons démontré que la série ainsi obtenue converge si les conditions (37) sont satisfaites. Mais si l'on ne fait pas cette contraction des termes de la série, ces conditions ne suffisent pas pour assurer la convergence de la série. En ce cas nous devons encore démontrer que les termes de la série tendent vers zéro. On aura maintenant

$$(39) \quad \binom{z+n}{2n} \Delta^{2n} H(-n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\dots[z^2-(n-1)^2](z+n)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\dots(\zeta^2-n^2)} \times [H(\zeta) + H(-\zeta)] d\zeta.$$

Cette intégrale tend vers zéro si le nombre β_2 est négatif, quand ν appartient à l'intervalle $\frac{\pi}{4} > \nu > -\frac{\pi}{4}$. La série de Gauss

$$H(z) = H(0) + \binom{z}{1} \Delta H(-1) + \binom{z+1}{2} \Delta^2 H(-1) + \binom{z+1}{3} \Delta^3 H(-2) + \dots$$

sera donc convergente pourvu que $\beta_1 < 0$ et

$$\begin{aligned} \beta_2 < 1, & \quad \text{si } \frac{3\pi}{4} > \nu > \frac{\pi}{4}, \\ \beta_2 < 0, & \quad \text{si } \frac{\pi}{4} > \nu > -\frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

On en conclut par exemple que la fonction $\cos \pi z$ se représente par la série de Gauss qui en ce cas prend la forme

$$(40) \quad \cos \pi z = 1 + 2 \binom{z}{1} - 2^2 \binom{z+1}{2} - \dots + (-1)^n 2^{2n} \binom{z+n}{2n} + (-1)^{n+1} 2^{2n+1} \binom{z+n}{2n+1} + \dots$$

On vérifie aussi aisément que cette série converge simplement dans tout le plan. Mais si l'on fait $H(z) = \sin \pi z$ dans la série de Gauss, tous les termes de la série s'annulent. La fonction $\sin \pi z$ n'admet donc pas un développement de cette forme. Cette fonction satisfait à notre inégalité pour $\beta_1 = 0$. Cet exemple nous montre donc qu'il est *nécessaire* de supposer $\beta_1 < 0$.

7. L'exemple $H(z) = \cos \pi z$ met en évidence que nos conditions de convergence ne suffisent pas pour assurer la convergence absolue des séries. Soient u_0, u_1, u_2, \dots les termes de la série de Gauss. Le terme u_{2n} est égal à l'intégrale (39) et l'on aura

$$\begin{aligned} u_{2n+1} &= \binom{z+n}{2n+1} \Delta^{2n+1} H(-n) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{\zeta(\zeta^2-1^2)\dots[\zeta^2-(n+1)^2]} \\ &\quad \times \{ (n+1)[H(\zeta) + H(-\zeta)] + \zeta[H(\zeta) - H(-\zeta)] \} d\zeta. \end{aligned}$$

On voit à ces deux intégrales qu'on sait trouver un nombre positif ε tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(\log n)^{1+\varepsilon} u_n = 0,$$

pourvu que

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < -2.$$

Ces deux inégalités entraînent donc la convergence absolue des deux séries d'interpolation de Gauss.

Dans la série de Stirling on aura

$$\begin{aligned} u_{2n} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(n-1)^2]}{\zeta(\zeta^2-1^2)\dots(\zeta^2-n^2)} [H(\zeta) + H(-\zeta)] d\zeta, \\ u_{2n+1} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{ABCDE} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-n^2)}{(\zeta^2-1^2)\dots[\zeta^2-(n+1)^2]} [H(\zeta) - H(-\zeta)] d\zeta, \end{aligned}$$

et l'on en conclut que la série de Stirling converge absolument si

$$\beta_1 < -1, \quad \beta_2 < 0.$$

On voit de même que la série de Bessel converge absolument si

$$\beta_1 < 0, \quad \beta_2 < -1.$$

Si en particulier $H(z)$ est une fonction paire, on aura

$$\begin{aligned} \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) &= 0, \\ \Delta^{2s+1} H\left(-s - \frac{1}{2}\right) &= 0, \quad \nabla \Delta^{2s} H\left(-s - \frac{1}{2}\right) = \Delta^{2s} H\left(-s - \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

La formule de Stirling se réduit par conséquent à la suivante :

$$(41) \quad H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(s-1)^2]}{(2s)!} \Delta^{2s} H(-s),$$

et la formule de Bessel prend la forme

$$(42) \quad H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s)!} \Delta^{2s} H\left(-s - \frac{1}{2}\right).$$

Si $H(z)$ est une fonction impaire on aura

$$\begin{aligned} \Delta^{2s} H(-s) &= 0, \quad \nabla \Delta^{2s+1} H(-s-1) = \Delta^{2s+1} H(-s), \\ \nabla \Delta^{2s} H\left(-s - \frac{1}{2}\right) &= 0. \end{aligned}$$

La formule de Stirling s'écrit donc comme il suit :

$$(43) \quad H(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)(z^2-2^2)\dots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H(-s),$$

et la formule de Bessel prend la forme

$$(44) \quad H(z) = z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s+1)!} \Delta^{2s+1} H\left(-s - \frac{1}{2}\right).$$

Comme la fonction $\cos \pi z$ satisfait aux conditions (37), l'équation (41) nous donne le développement convergent

$$(45) \quad \cos \pi z = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s}}{(2s)!} z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(s-1)^2].$$

La fonction $\sin \pi z$ satisfait aux conditions (38). Elle se représente

donc par la série (44) qui s'écrit

$$(46) \quad \sin \pi z = z \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{2^{2s+1}}{(2s+1)!} \left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 \right].$$

On trouve de même les deux développements convergents suivants :

$$\frac{\cos \pi z - \cos \pi \alpha}{z^2 - \alpha^2} = \cos \pi \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 \right]}{\left[\alpha^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] \left[\alpha^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 \right] \cdots \left[\alpha^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 \right]},$$

$$\frac{\alpha \sin \pi z - z \sin \pi \alpha}{z^2 - \alpha^2} = \sin \pi \alpha \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2 - 1^2)(z^2 - 2^2) \cdots (z^2 - s^2)}{(\alpha^2 - 1^2)(\alpha^2 - 2^2) \cdots [\alpha^2 - (s+1)^2]},$$

où α est un nombre quelconque qui ne fait pas disparaître un des dénominateurs.

8. De ce que nous venons de dire il résulte *a fortiori* que les quatre séries d'interpolation convergent absolument si la fonction $h(\nu)$, définie par l'équation (31), satisfait à l'inégalité

$$h(\nu) < \psi(\nu)$$

pour toutes les valeurs de ν . Un cas particulièrement intéressant est celui où l'on a $h(\nu) = \psi(\nu)$ dans un nombre fini de points, pendant que $h(\nu) < \psi(\nu)$ pour toute autre valeur de ν . Quelles sont alors les conditions de convergence? Nous allons voir qu'en ce cas particulier nos inégalités relativement aux nombres β pourront se remplacer par d'autres qui sont moins restrictives. Soit α un point tel que

$$h(\alpha) = \psi(\alpha), \quad h(\nu) < \psi(\nu), \quad \nu \geq \alpha.$$

Remarquons d'abord que, dans les intervalles $\frac{3\pi}{4} > \nu > \frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4} > \nu > -\frac{3\pi}{4}$, on ne trouve jamais un point α de cette sorte. Car s'il y a, à l'intérieur d'un de ces deux intervalles, un point de coïncidence entre la courbe $\psi(\nu)$ et la courbe $h(\nu)$, il y en a une infinité. C'est ce qui résulte d'un théorème général dû à E. Phragmén et E. Lin-

delöf (1). Mais α peut prendre une valeur quelconque en dehors des deux intervalles. Pour le voir, considérons l'exemple suivant :

$$H(z) = t^{2z}.$$

Pour quelles valeurs de t cette fonction se représente-t-elle par nos séries d'interpolation? Pour que la série de Gauss converge, il faut que les termes de la série tendent vers zéro, c'est-à-dire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta^{2n} H(-n)}{2^{2n} \sqrt{n}} = 0.$$

Mais on a

$$\Delta^{2n} H(-n) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2n}.$$

S'il y a convergence, le nombre t doit donc satisfaire à l'inégalité $\left|t - \frac{1}{t}\right| \leq 2$. La courbe

$$\left|t - \frac{1}{t}\right| = 2$$

est composée des deux cercles

$$|t-1| = \sqrt{2}, \quad |t+1| = \sqrt{2}$$

avec le rayon $\sqrt{2}$ et ayant pour centres les points ± 1 . Si le point t est situé à l'intérieur d'un des deux domaines que je couvre de hachures dans la figure 2, on aura $\left|t - \frac{1}{t}\right| < 2$. En ce cas il y a donc convergence absolue. Si le point t est situé à l'extérieur du domaine couvert de hachures, on aura $\left|t - \frac{1}{t}\right| > 2$, et les séries divergent par conséquent. Les seuls points qui présentent quelque difficulté sont ceux qui forment la frontière du domaine. Je vais déterminer le maximum de $|t^{2z}|$ quand t décrit le contour AFCBA. Posons

$$t = 1 + \sqrt{2} e^{i\varphi}, \quad z = re^{i\nu}.$$

(1) Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés des fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier (*Acta math.*, t. XXXI, 1908, p. 397).

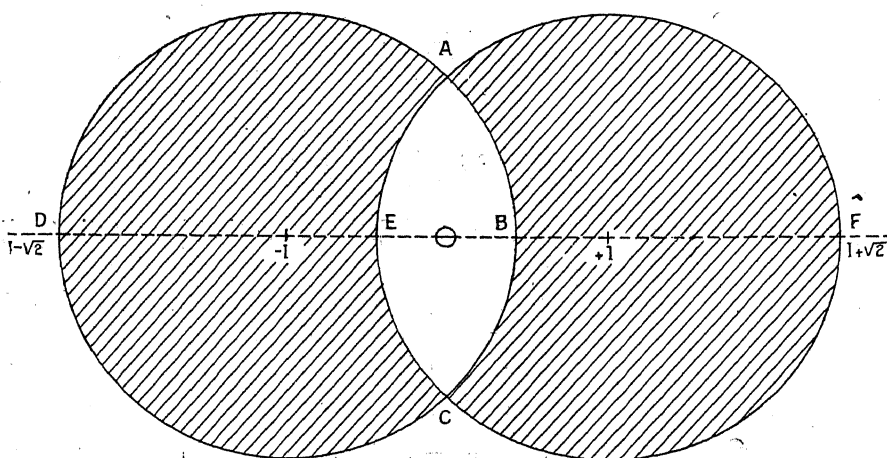
Sur l'arc AFC nous aurons

$$|t^{2z}| = e^{\nu \lambda(\varphi)},$$

où

$$(47) \quad \lambda(\varphi) = \cos \nu \log(3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi) - 2 \sin \nu \arcsin \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}}.$$

Fig. 2.



En dérivant par rapport à φ on trouve

$$\lambda'(\varphi) = -2\sqrt{2} \frac{\sin(\nu + \varphi) + \sqrt{2} \sin \nu}{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}.$$

Si $\frac{3\pi}{4} > \nu > \frac{\pi}{4}$, on aura $\lambda' < 0$ parce que $\sqrt{2} \sin \nu > 1$. Dans l'intervalle $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ la fonction $\lambda(\varphi)$ est par conséquent décroissante et elle prend, dans le point $\varphi = -\frac{3\pi}{4}$, sa plus grande valeur

$$\lambda\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi \sin \nu.$$

Si $-\frac{3\pi}{4} < \nu < -\frac{\pi}{4}$, on aura $\lambda' > 0$ parce que $-\sqrt{2} \sin \nu > 1$. Dans l'intervalle $\frac{3\pi}{4} \geq \varphi \geq -\frac{3\pi}{4}$ la fonction $\lambda(\varphi)$ est par conséquent croissante

et elle prend, dans le point $\varphi = \frac{3\pi}{4}$, sa plus grande valeur

$$\lambda\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\pi \sin v.$$

Si $\frac{\pi}{4} \geq v \geq -\frac{\pi}{4}$, la dérivée $\lambda'(\varphi)$ s'annule dans un et un seul point dans l'intervalle $\frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}$. Ce point est un maximum de $\lambda(\varphi)$ et la valeur correspondante de φ satisfait à l'équation

$$\sin(v + \varphi) + \sqrt{2} \sin v = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos v \sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2} \sin^2 v, \\ \sin \varphi &= -\sin v \sqrt{\cos 2v} - \sqrt{2} \sin v \cos v, \end{aligned}$$

où l'on suppose que $\sqrt{\cos 2v} > 0$. Mais il en résulte que

$$\begin{aligned} 3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi &= (\sqrt{\cos 2v} + \sqrt{2} \cos v)^2, \\ \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}} &= -\sqrt{2} \sin v. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans le second membre de l'équation (47), on trouvera que le maximum de $\lambda(\varphi)$ est égal à la fonction $\psi(v)$ définie par l'expression (23).

Si en dernier lieu $\pi \geq |v| \geq \frac{3\pi}{4}$, on aura $\lambda(\varphi) < \psi(v)$.

Quand le point z décrit l'arc ABC, les deux derniers intervalles échangeront leur rôle et l'on trouvera la même valeur maximum. Résumons ces résultats. Quand le point z décrit le contour AFCBA, on aura

$$|z^2| \leq e^{r\psi(v)}.$$

Le maximum indiqué est atteint dans un et un seul point du contour. Ce point est égal à A ou C si $\frac{\pi}{4} \leq |v| \leq \frac{3\pi}{4}$; mais si v est situé en dehors de ces deux intervalles, c'est un point différent de A et de C.

Soit maintenant t un point fixe sur notre contour en exceptant les points A et C. Pour fixer les idées, admettons que t est situé sur

l'arc AFC. On aura donc

$$t = 1 + \sqrt{2} e^{i\varphi}, \quad \frac{3\pi}{4} > \varphi > -\frac{3\pi}{4}.$$

Posons

$$|t^{2z}| = e^{r\mu(\nu)}.$$

On aura

$$\mu(\nu) = \cos \nu \log(3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi) - 2 \sin \nu \arcsin \frac{\sqrt{2} \sin \varphi}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2} \cos \varphi}}.$$

Nous venons de voir que

$$\mu(\nu) \leq \psi(\nu)$$

et que le signe d'égalité subsiste pour une seule valeur de ν , soit pour $\nu = \alpha$.

Cette valeur est située dans l'intervalle $\frac{\pi}{4} > \nu > -\frac{\pi}{4}$ et elle satisfait à l'équation

$$\sin(\alpha + \varphi) + \sqrt{2} \sin \alpha = 0.$$

En substituant, dans l'expression de $\mu(\nu)$, les valeurs de $\cos \varphi$ et de $\sin \varphi$ qu'on tire de cette équation, on trouvera

$$\mu(\nu) = \cos \nu \log(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2} \cos \alpha)^2 + 2 \sin \nu \arcsin(\sqrt{2} \sin \alpha).$$

En dérivant, par rapport à ν , on obtient

$$\mu'(\nu) = -\sin \nu \log(\sqrt{\cos 2\alpha} + \sqrt{2} \cos \alpha)^2 + 2 \cos \nu \arcsin(\sqrt{2} \sin \alpha).$$

On a, par définition,

$$\psi(\nu) = \cos \nu \log(\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu)^2 + 2 \sin \nu \arcsin(\sqrt{2} \sin \nu).$$

En dérivant, il vient

$$\psi'(\nu) = -\sin \nu \log(\sqrt{\cos 2\nu} + \sqrt{2} \cos \nu)^2 + 2 \cos \nu \arcsin(\sqrt{2} \sin \nu).$$

Par conséquent, on aura

$$\mu(\alpha) = \psi(\alpha), \quad \mu'(\alpha) = \psi'(\alpha)$$

et

$$\mu(\nu) < \psi(\nu)$$

pour toute autre valeur de ν .

C. Q. F. D.

Soit maintenant α un point quelconque à l'intérieur de l'intervalle

$\frac{\pi}{4} > \nu > -\frac{\pi}{4}$. Admettons que la fonction entière $H(z) = H(re^{i\nu})$, au voisinage du point α , satisfait aux inégalités

$$\begin{aligned} |H(z) - H(-z)| &< e^{r\mu(\nu)} r\beta_1, \\ |H(z) + H(-z)| &< e^{r\mu(\nu)} r\beta_2, \end{aligned} \quad |\nu - \alpha| \leq \eta,$$

pour $r > r_0$, et supposons en outre que

$$h(\nu) < \psi(\nu) \quad \text{pour} \quad \nu \geq \alpha.$$

Étudions le reste R_{2n+1} . A cause de la dernière inégalité, on peut se borner à considérer l'intégrale suivante :

$$Q'_n = \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-r\psi(\nu)} |H_1(re^{i\nu})| \frac{d\nu}{r \cos 2\nu}.$$

Soit β le plus grand des nombres β_1 et $\beta_2 - 1$. On sait trouver une constante C telle que

$$(48) \quad Q'_n < C \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} r^\beta e^{-r[\psi(\nu)-\mu(\nu)]} \frac{d\nu}{\cos 2\nu}.$$

Mais on peut aisément se rendre compte comment cette intégrale se comporte pour les valeurs très grandes de n . On a en effet

$$\begin{aligned} \mu''(\nu) &= -\mu(\nu), \\ \psi''(\nu) &= -\psi(\nu) + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\nu}}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$\psi''(\alpha) - \mu''(\alpha) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}}.$$

En développant $\psi - \mu$ suivant les puissances de $\nu - \alpha$, on trouvera donc

$$\psi(\nu) - \mu(\nu) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\alpha}} (\nu - \alpha)^2 + \dots$$

En prenant η suffisamment petit, on sait trouver un nombre positif c tel que

$$\psi(\nu) - \mu(\nu) > \frac{c(\nu - \alpha)^2}{\sqrt{\cos 2\nu}},$$

si

$$|\nu - \alpha| < \eta.$$

Je suppose en outre que le nombre positif η a été choisi aussi petit que

$$\frac{\pi}{4} > \alpha + \eta > \alpha - \eta > -\frac{\pi}{4}.$$

Cela posé, on conclut de l'inégalité (48) que

$$\begin{aligned} Q'_n &< C_1 n^\beta \int_{\alpha-\eta}^{\alpha+\eta} e^{-cn(\nu-\alpha)^2} d\nu = C_1 n^\beta \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-cn\nu^2} d\nu \\ &= C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-c\nu^2} d\nu < C_1 n^{\beta-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c\nu^2} d\nu, \end{aligned}$$

C_1 étant une constante. Si $\beta < \frac{1}{2}$, l'intégrale Q'_n tendra donc vers zéro quand n augmente indéfiniment. Il en est par conséquent de même pour le reste R_{2n+1} . *La série de Stirling sera donc convergente si*

$$\beta_1 < \frac{1}{2}, \quad \beta_2 < \frac{3}{2}.$$

On voit de la même manière que la série de Bessel convergera si

$$\beta_1 < \frac{3}{2}, \quad \beta_2 < \frac{1}{2}$$

et que les séries de Gauss convergeront si

$$\beta_1 < \frac{1}{2}, \quad \beta_2 < \frac{1}{2}.$$

S'il y a, dans les intervalles $\frac{\pi}{4} > |\nu| \geq 0$, $\pi \geq |\nu| > \frac{3\pi}{4}$, un nombre fini de points α de la nature que nous venons d'indiquer, la convergence aura lieu si les inégalités correspondantes, relativement à chacun de ces points, sont satisfaites. En faisant $H(z) = t^{2z}$ dans la série de Gauss, on trouvera

$$\begin{aligned} (49) \quad t^{2z} &= 1 + \binom{z}{1} t \left(t - \frac{1}{t} \right) + \binom{z}{2} \left(t - \frac{1}{t} \right)^2 + \binom{z+1}{3} t \left(t - \frac{1}{t} \right)^3 + \dots \\ &\quad + \binom{z+n-1}{2n} \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2n} + \binom{z+n}{2n+1} t \left(t - \frac{1}{t} \right)^{2n+1} + \dots \end{aligned}$$

De la série de Stirling, on obtient de même

$$(50) \quad t^{2z} + t^{-2z} = 2 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z^2(z^2-1^2)\dots[z^2-(s-1)^2]}{(2s)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s},$$

$$(51) \quad t^{2z} - t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{z(z^2-1^2)\dots(z^2-s^2)}{(2s+1)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}.$$

La série de Bessel nous donne enfin les deux développements suivants :

$$(52) \quad t^{2z} + t^{-2z} = \left(t + \frac{1}{t}\right) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s},$$

$$(53) \quad t^{2z} - t^{-2z} = 2z \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left[z^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] \left[z^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] \dots \left[z^2 - \left(s - \frac{1}{2}\right)^2\right]}{(2s+1)!} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{2s+1}.$$

De ce que nous venons de dire, il résulte que ces séries convergent et représentent les fonctions au premier membre si le point t est situé sur le contour AFCBA, en exceptant les points A et C. En effet, les fonctions $t^{2z} \pm t^{-2z}$ admettent deux points α de la nature susdite et pour toute autre valeur de ν on aura $h(\nu) < \psi(\nu)$. Pour les points du contour AFCBA, on aura

$$\left|t - \frac{1}{t}\right| = 2$$

et, dans le domaine limité par ce contour et couvert de hachures, on aura

$$\left|t - \frac{1}{t}\right| < 2.$$

On en conclut que les cinq dernières équations sont valables dans tout ce domaine. D'autre part, elles cessent d'être vraies, quand t est extérieur au domaine indiqué. En effet, quand le point t appartient au domaine limité par le contour AECDA, les séries convergent, mais elles ne représentent pas les fonctions au premier membre, car si l'on remplace t par $-t$ les séries restent inaltérées ou bien elles changent de signe. Si le point t est situé à l'extérieur des deux domaines que

j'ai couvert de hachures, on aura

$$\left| t - \frac{1}{t} \right| > 2$$

et les séries divergeront par conséquent. Enfin, si t est situé dans un des points A ou C, l'équation (50) se réduit à l'équation (45), et l'équation (53) se réduit à l'équation (46). Ces deux équations restent donc vraies pour $t = \pm i$, mais ce n'est plus le cas pour les trois autres équations.

La formule d'interpolation de Newton.

9. Considérons maintenant la formule de Newton

$$(1) \quad \Phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{1.2.3\dots s},$$

qui peut servir à trouver les valeurs d'une fonction quand on connaît ses valeurs dans les points $z = 1, 2, 3, \dots$. Nous allons voir que cette série converge dans des cas beaucoup plus étendus que ne le font les séries que nous venons d'étudier. Commençons par rappeler quelques propriétés connues. J.-L.-W.-V. Jensen ⁽¹⁾ et I. Bendixson ⁽²⁾ ont fait remarquer que le domaine de convergence de la série (1) est un demi-plan limité à gauche par une droite parallèle à l'axe imaginaire. Il existe donc un nombre réel λ tel que la série converge ⁽³⁾, si $\sigma > \lambda$, et diverge, si $\sigma < \lambda$. Si $\lambda = -\infty$, la série converge dans tout le plan. I. Bendixson démontre, en outre, que la série converge uniformément dans tout domaine fini situé à l'intérieur du demi-plan de

⁽¹⁾ *Om Räkners Konvergens* [Tidsskrift for Mathematik (Copenhague), 5^e série, t. II, 1884, p. 70-72].

⁽²⁾ *Sur une extension à l'infini de la formule d'interpolation de Gauss* (*Acta mathematica*, t. IX, 1887, p. 15-34).

⁽³⁾ σ désigne la partie réelle de z .

convergence. Posons

$$(2) \quad z = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=0}^{n-1} a_s \right|}{\log n},$$

$$(3) \quad k = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=n}^{\infty} a_s \right|}{\log n}.$$

E. Cahen ⁽¹⁾, E. Landau ⁽²⁾ et S. Pincherle ⁽³⁾ ont démontré que l'abscisse de convergence λ se détermine de la manière suivante : Si $\lambda \geq 0$, on a $\lambda = z$; mais, si $\lambda < 0$, on a $\lambda = k$.

En général, la série (1) n'est pas absolument convergente pour toute valeur de z qui satisfait à l'inégalité $\sigma > \lambda$. Mais I. Bendixson a démontré que le domaine de convergence absolue est aussi un demi-plan. Il existe donc un nombre réel μ tel que la série converge absolument pour $\sigma > \mu$ et non pour $\sigma < \mu$. L'abscisse de convergence absolue μ satisfait à l'inégalité $\lambda \leq \mu \leq \lambda + 1$ et elle se détermine par les expressions (2) et (3) si l'on y remplace a_s par sa valeur absolue. Considérons, par exemple, la série

$$(4) \quad (1 + \rho)^{z-1} = \sum_{s=0}^{\infty} \rho^s \binom{z-1}{s},$$

où $|\rho| = 1$ et $\rho \neq -1$. On a ici $\lambda = 0$ et $\mu = 1$. La série est donc simplement convergente dans la bande $0 < \sigma < 1$.

Nous ne ferons pas ici un historique complet, mais nous devons pourtant mentionner les travaux qu'ont publiés Ch. Hermite ⁽⁴⁾, S. Pin-

⁽¹⁾ Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues (*Ann. Éc. Norm.*, 3^e série, t. XI, 1894, p. 75-164).

⁽²⁾ Ueber die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen (*Sitzungsber. Akad. München*, t. XXXVI, 1906, p. 151-218).

⁽³⁾ Alcune spigolature nel campo delle funzioni determinanti (*Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, 1909, vol. II, p. 45); Quelques remarques sur les fonctions déterminantes (*Acta math.*, t. XXXVI, 1913, p. 270-280).

⁽⁴⁾ Sur la formule d'interpolation de Lagrange (*J. reine angew. Math.*, t. LXXXIV, 1878, p. 70-79; *Œuvres*, t. III, Paris, 1912, p. 432-443).

cherle (1), N. Nielsen (2), G. Faber (3) et R.-D. Carmichael (4) sur ce sujet.

En particulier, S. Pincherle montre que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction admette un développement de la forme (1), c'est qu'elle puisse se représenter par une certaine intégrale définie. Tout récemment, F. Carlson (5) a publié un Mémoire important où il présente cette condition sous une forme plus commode. Posons, pour abréger,

$$(5) \quad \psi(\nu) = \cos \nu \log(2 \cos \nu) + \nu \sin \nu.$$

F. Carlson démontre que la convergence de la série (1) entraîne que la fonction qu'elle représente satisfait à l'inégalité

$$(6) \quad |\Phi(\alpha + r e^{i\nu})| < e^{r\psi(\nu)} \frac{(1+r)^{\lambda + \frac{1}{2} + \varepsilon(r)}}{\sqrt{1+r \cos \nu}}$$

pour $\frac{\pi}{2} \geq \nu \geq -\frac{\pi}{2}$. Ici $\alpha > \lambda$, et $\varepsilon(r)$ désigne une fonction qui tend uniformément vers zéro quand r augmente indéfiniment. Et inversement, si la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe pour $\sigma \geq \alpha$ et satisfait à l'inégalité (6), elle admet un développement de la forme (1) qui converge dans un certain demi-plan.

Dans le paragraphe suivant, nous démontrerons la dernière partie

(1) *Sopra un problema d'interpolazione* (Rend. Circ. mat. Palermo, t. XIV, 1900, p. 142-144); *Sur les fonctions déterminantes* (Ann. Éc. Norm., 3^e série, t. XXII, 1905, p. 1-68).

(2) *Sur la multiplication de deux séries de coefficients binomiaux* (Atti R. Accad. Lincei, Rendic., 4 décembre 1904); *Sur quelques applications intégrales des séries de coefficients binomiaux* (Rend. Circ. mat. Palermo, t. XIX, 1905, p. 129-139); *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig, 1906, p. 124-127 et 225-234).

(3) *Beitrag zur Theorie der ganzen Funktionen* (Math. Ann., t. LXX, 1911, p. 48-68).

(4) *On a general class of series of the form $\sum c_n g(x+n)$* (Trans. Amer. Math. Soc., t. XVII, 1916, p. 207-232); *Examples of a remarkable class of series* (Bull. Amer. Math. Soc., t. XXIII, 1917, p. 407-425); *On the asymptotic character of functions defined by series of the form $\sum c_n g(x+n)$* (Amer. J. Math., t. XXXIX, 1917, p. 385-403); *On the representation of functions in series of the form $\sum c_n g(x+n)$* (Amer. J. Math., t. XL, 1918, p. 113-126).

(5) *Sur les séries de coefficients binomiaux* (Nova Acta R. Soc. Scient. Upsaliensis, 4^e série, t. IV, 1915, n^o 3).

de ce théorème par une nouvelle méthode qui est plus directe que celle de F. Carlson et qui permet d'aller un peu plus loin que ne l'a fait cet auteur.

Il peut arriver que la somme de la série de Newton soit égale à zéro dans tout point situé à l'intérieur de son domaine de convergence. G. Frobenius ⁽¹⁾ et S. Pincherle ⁽²⁾ ont attiré l'attention sur le rôle que jouent ces développements de zéro. Considérons la série

$$\Psi_1(z) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \binom{z-1}{s},$$

ayant l'abscisse de convergence $\lambda = 1$. On obtient cette série en faisant tendre ρ vers -1 dans l'équation (4). Le premier membre tend vers zéro, si $\sigma > 1$. La somme de la série $\Psi_1(z)$ est donc égale à zéro si $\sigma > 1$. Pour $z = 1$, la série se réduit à son premier terme, sa somme est, par conséquent, égale à 1, et, pour toute autre valeur de z , la série diverge. De la série Ψ_1 , S. Pincherle a déduit une infinité d'autres développements de zéro. Soit r un entier positif. Posons pour abrégé

$$\Psi_{r+1}(z) = \binom{z-1}{r} \psi_1(z-r).$$

La série

$$\Psi_{r+1}(z) = \sum_{s=r}^{\infty} (-1)^{s-r} \binom{s}{r} \binom{z-1}{s},$$

ayant l'abscisse de convergence $\lambda = r + 1$, est donc égale à zéro pour $\sigma > r + 1$. Elle diverge pour $\sigma \leq r + 1$ en exceptant les points $z = 1, 2, 3, \dots, r + 1$.

On a enfin

$$\begin{aligned} \Psi_{r+1}(s) &= 0 & (s = 1, 2, 3, \dots, r), \\ \Psi_{r+1}(r+1) &= 1. \end{aligned}$$

On aura ainsi une infinité de séries ayant zéro pour somme. Par conséquent le développement (1) n'est pas unique. Si une fonction admet

⁽¹⁾ *Ueber die Entwicklung analytischer Functionen in Reihen, die nach gegebenen Functionen fortschreiten* (*J. reine angew. Math.*, t. LXXIII, 1871, p. 1-30).

⁽²⁾ *Sulle serie di fattoriali* (*Atti R. Accad. Lincei, Rendic.*, 5^e série, t. XI, 1902, p. 139-144 et 417-426).

un développement de cette forme, elle en admet une infinité qui diffèrent l'un de l'autre par un développement de zéro. Et le domaine de convergence sera altéré si l'on ajoute à la série un développement de zéro convenablement choisi. C'est là un inconvénient dont nous allons nous débarrasser en faisant une convention convenable. Supposons d'abord que l'abscisse de convergence λ est < 1 . Posons successivement $z = 1, 2, 3, \dots$ dans l'équation (1). On trouvera les équations suivantes :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(1) = a_0, \\ \Phi(2) = a_0 - a_1, \\ \Phi(3) = a_0 - 2a_1 + a_2, \\ \dots\dots\dots, \\ \Phi(n+1) = a_0 - \binom{n}{1}a_1 + \binom{n}{2}a_2 - \dots + (-1)^n a_n. \end{array} \right.$$

Ces équations déterminent *uniquement* les coefficients a_n , et en les résolvant on trouvera

$$(8) \quad (-1)^n a_n = \Delta^n \Phi(1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

On a donc, si $\lambda < 1$,

$$(9) \quad \Phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \Delta^s \Phi(1) \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots s}.$$

Par conséquent, si une série de Newton, ayant l'abscisse de convergence < 1 , représente zéro, tous les coefficients de la série sont nuls. Les seconds membres des équations (8) sont en effet nuls.

Si $\lambda < 0$, on trouve, en posant $z = 0$ dans l'équation (1),

$$\Phi(0) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s.$$

D'autre part, des équations (8), on déduit que

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} = \Phi(0) - (-1)^n \Delta^n \Phi(0).$$

Par conséquent,

$$\sum_{s=0}^{\infty} a_s = (-1)^n \Delta^n \Phi(0).$$

En rapprochant cette équation à l'équation (3), on voit que l'abscisse de convergence λ , si elle est négative, se déterminera par la limite

$$(10) \quad \lambda = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\Delta^n \Phi(0)|}{\log n}.$$

Supposons maintenant que $p \leq \lambda < p + 1$, p étant un entier positif.

Désignons par c_1, c_2, \dots, c_p les valeurs de la série dans les points $z = 1, 2, \dots, p$. Au lieu des équations (7) on aura

$$c_{n+1} = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_s \quad (n < p),$$

$$\Phi(n+1) = \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} a_s \quad (n \geq p).$$

En résolvant ces équations on trouvera

$$(11) \quad a_\nu = \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{\nu}{n} c_{n+1} + \sum_{n=p}^{\nu} (-1)^n \binom{\nu}{n} \Phi(n+1).$$

En particulier, si la fonction $\Phi(z)$ est égale à zéro, on aura

$$a_\nu = \sum_{n=0}^{p-1} (-1)^n \binom{\nu}{n} c_{n+1}.$$

Par conséquent, tout développement de zéro est de la forme (1)

$$c_1 \Psi_1(z) + c_2 \Psi_2(z) + \dots + c_p \Psi_p(z),$$

c_1, c_2, \dots, c_p étant des constantes quelconques. De plus, si la série de Newton admet l'abscisse de convergence $\lambda (p \leq \lambda < p + 1)$, on peut, sans changer la somme de la série, donner à p coefficients des valeurs quelconques. Si λ est un entier il arrive qu'on peut augmenter le domaine de convergence en choisissant convenablement les constantes c_n .

Soit α le plus petit nombre tel que la fonction $\Phi(z)$ est holomorphe

(1) PINCHERLE, *loc. cit.*

pour $\sigma > \alpha$. Je dis que la série de Newton est réduite si l'on a choisi les coefficients α_s tels que la somme de la série est égale à la valeur de la fonction $\Phi(z)$ pour toute valeur entière de z qui est plus grande que α . Dans ce qui suit, nous parlerons le plus souvent de la série réduite. Si $\alpha \geq 1$, la série dépend encore des constantes arbitraires $c_s (s = 1, 2, 3, \dots, [\alpha])$. On peut égaler c_s à $\Phi(s)$ si la fonction $\Phi(z)$ est encore holomorphe dans le point $z = s$.

De l'équation (11) on déduit que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} = - \sum_{s=1}^{s=p} (-1)^s \binom{n}{s} c_s - \sum_{s=p+1}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \Phi(s).$$

Si la série est réduite, on a donc

$$\begin{aligned} \alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} &= - \sum_{s=0}^n (-1)^s \binom{n}{s} \Phi(s) + O(n^p) \\ &= - \Delta^n \Phi(0) + O(n^p), \end{aligned}$$

p désignant le plus grand des nombres 0 et $[\alpha]$. Mais en rapprochant cette équation de l'équation (2) et en remarquant qu'on a nécessairement $\lambda \geq \alpha$ on voit que l'abscisse de convergence λ de la série réduite se déterminera toujours par la limite (10). Bien entendu, il arrive que les symboles $\Phi(0), \Phi(1), \dots$ n'ont pas de sens. Mais dans l'expression $\Delta^n \Phi(0)$ on peut remplacer $\Phi(s)$ par zéro si $s \leq \alpha$.

Soit par exemple

$$\Phi(z) = \frac{1}{z - \alpha},$$

α étant un nombre quelconque qui n'est pas un entier positif. En résolvant les équations (7) on trouvera la série réduite

$$\frac{1}{z - \alpha} = - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-s-1)},$$

ayant l'abscisse de convergence égale à la partie réelle de α . Mais si α est égal à un entier positif p , cette série n'a pas de sens. En ce cas on peut donner à un des coefficients de la série une valeur quelconque.

En prenant $\alpha_{p-1} = 0$ on trouvera la série réduite

$$\frac{1}{z-p} = - \sum_{s=0}^{p-2} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{(p-1)(p-2)\dots(p-s-1)} + \sum_{s=p}^{\infty} (-1)^{s-p} \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{(p-1)!(s+1-p)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{s+1-p} \right),$$

ayant l'abscisse de convergence p . Cette équation est valable en dehors du demi-plan de convergence pour toute valeur entière et positive de z en exceptant $z = p$.

10. Ces préliminaires posés, nous allons étudier le rapport qu'il y a entre le domaine de convergence de la série (1) et les propriétés analytiques de la fonction qu'elle représente. Nous désignerons, comme plus haut, la partie réelle de z par σ . Soit $\psi(\nu)$ la fonction définie par l'équation (5) (1). Soit $\Phi(z)$ une fonction analytique, holomorphe dans le demi-plan $\sigma \geq \alpha$ et y satisfaisant à l'inégalité

$$(13) \quad |\Phi(\alpha + re^{i\nu})| < e^{\nu \psi(\nu)} (1+r)^{\beta + \varepsilon(r)}, \quad \frac{\pi}{2} \geq \nu \geq -\frac{\pi}{2},$$

où $\varepsilon(r)$ désigne une fonction qui tend uniformément vers zéro quand r augmente indéfiniment. Je vais d'abord démontrer que la fonction $\Phi(z)$ admet un développement de la forme (1) dont l'abscisse de convergence est égale ou inférieure au plus grand des nombres (2) α et $\beta + \frac{1}{2}$.

(1) La fonction $\psi(\nu)$ est évidemment positive et croissante dans l'intervalle $0 \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}$.

Comme $\psi(\nu) = \psi(-\nu)$, elle est positive et décroissante dans l'intervalle $-\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq 0$ avec un minimum dans le point $\nu = 0$. Puisque

$$\psi(0) = \log 2, \quad \psi\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2},$$

il en résulte que la fonction $\psi(\nu)$ satisfait aux inégalités

$$\log 2 \leq \psi(\nu) \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \nu \leq \frac{\pi}{2}.$$

(2) Comme nous l'avons déjà dit, F. Carlson a démontré (*loc. cit.*, p. 53) un théorème voisin de celui que nous venons d'énoncer, mais cet auteur n'arrive pas à la valeur précise de l'abscisse de convergence. Il démontre que la série converge pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + 1$. La démonstration que nous allons donner est toute différente de celle de F. Carlson et elle présente des avantages essentiels

Reprenons l'identité (7), paragraphe 3, et posons $a_n = n$. Il vient

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - 1} + \frac{z - 1}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)} + \frac{(z - 1)(z - 2)}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)(\zeta - 3)} + \dots + \frac{(z - 1)(z - 2)\dots(z - n + 1)}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)\dots(\zeta - n)} + \frac{(z - 1)(z - 2)\dots(z - n)}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)\dots(\zeta - n)} \frac{1}{\zeta - z}.$$

Admettons que $\sigma > \alpha$. Multiplions les deux membres de cette équation par $\Phi(\zeta)$ et intégrons le long d'une courbe fermée, parcourue en sens positif et située dans le demi-plan $\Re(\zeta) \geq \alpha$. Nous supposons en outre que le chemin d'intégration renferme le point z et ceux des points 1, 2, 3, ..., n qui sont situés dans le demi-plan $\Re(\zeta) \geq \alpha$. On obtient ainsi la formule de Newton :

$$(14) \quad \Phi(z) = \sum_{s=0}^{n-1} a_s \binom{z-1}{s} + R_n,$$

où

$$(15) \quad a_s = \frac{s!}{2\pi i} \int \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)\dots(\zeta - s - 1)},$$

$$R_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{(z - 1)(z - 2)\dots(z - n)}{(\zeta - 1)(\zeta - 2)\dots(\zeta - n)} \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

On voit aisément que la série (14) sera la série réduite si l'on a choisi le nombre α suffisamment petit. En particulier, si $\alpha < 1$, on aura (cf. § 3)

$$a_s = \Delta^s \Phi(1),$$

dans l'expression (15) je remplace la variable ζ par $\zeta + \alpha$. Le reste R_n peut alors s'écrire sous la forme suivante :

$$(16) \quad R_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^n}{\Gamma(1-z)} \int \frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(\alpha+\zeta-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta)} \frac{\Phi(\alpha+\zeta)}{\zeta - (z-\alpha)} d\zeta$$

$$(17) \quad = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\Gamma(1-z)} \int \frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} \frac{\Phi(\alpha+\zeta)}{\zeta - (z-\alpha)} d\zeta.$$

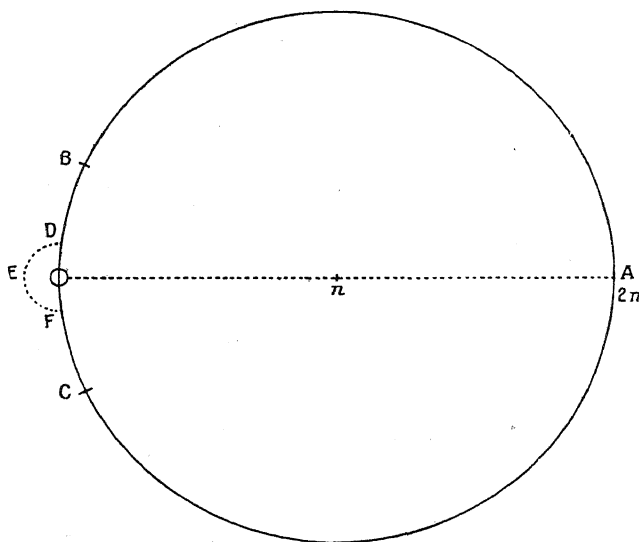
Je prends comme chemin d'intégration un cercle ayant pour centre le point n et avec le rayon égal à n . On aura donc

$$(18) \quad \zeta = 2n \cos \varphi e^{i\varphi},$$

et ζ parcourt la ligne d'intégration quand φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ jusqu'à $+\frac{\pi}{2}$.

Comme $\sigma > \alpha$, on peut toujours choisir n aussi grand que le point $z - \alpha$ est situé à l'intérieur de ce cercle. Si en particulier α est un entier positif, le point $\zeta = 0$ sera un pôle pour la fonction sous le signe. En ce cas j'évite ce point à l'aide d'un petit demi-cercle ayant le point $\zeta = 0$ pour centre et avec un rayon assez petit pour que la fonction $\Phi(\alpha + \zeta)$ soit holomorphe à l'intérieur de et sur ce cercle (cf. fig. 3).

Fig. 3.



Notre chemin d'intégration est donc le cercle OCABO ou, si α est un entier positif, la courbe EFCABDE.

Soit φ_n le plus petit nombre positif qui satisfait à l'équation

$$\cos \varphi_n = \frac{\log n}{2n}.$$

Le nombre φ_n tend évidemment vers $\frac{\pi}{2}$ quand n augmente indéfiniment. De plus, on aura, pour $n > 1$,

$$(19) \quad 0 < \frac{\pi}{2} - \varphi_n < \frac{\log n}{n}.$$

Supposons que les droites OB et OC forment l'angle φ_n avec l'axe des nombres positifs OA. Alors la distance des points B et C de l'origine

est égale à $\log n$ et ces points s'éloignent par conséquent indéfiniment quand $n \rightarrow \infty$. Je décompose l'intégrale R_n en deux parties

$$R_n = Q_n + P_n,$$

où l'intégrale Q_n est étendue le long de l'arc CAB pendant que l'intégrale P_n est étendue le long de l'arc BOC ou, s'il a lieu, le long de BDEFC. Soit ζ un point sur l'arc CAB. On aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\zeta) \zeta^\alpha}{\zeta(\alpha + \zeta)} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha + \zeta - n)}{\Gamma(\zeta - n)(\zeta - n)^\alpha} = 1$$

et cela uniformément pour toute valeur de ζ sur l'arc CAB. On en déduit que

$$(20) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\alpha + \zeta - n)}{\Gamma(\alpha + \zeta)} \frac{\Gamma(\zeta)}{\Gamma(\zeta - n)} \left(\frac{\zeta}{\zeta - n} \right)^\alpha = 1.$$

De l'expression asymptotique de la fonction gamma [(35), § 6] on déduit que

$$(21) \quad \frac{\Gamma(n+1-z)\Gamma(\zeta-n)}{\Gamma(\zeta)} = \sqrt{2\pi} e^z (n-z)^{n-z+\frac{1}{2}} (\zeta-n)^{\zeta-n-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}-\zeta} [1+\varepsilon(n)],$$

$$= \sqrt{2\pi} e^z \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n (n-z)^{\frac{1}{2}-z} \left(\frac{\zeta-n}{\zeta}\right)^{\zeta-\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{\zeta-n}\right)^n [1+\varepsilon(n)],$$

où $\varepsilon(n)$ désigne une fonction qui tend uniformément vers zéro quand n augmente indéfiniment. Mais de l'équation (18) il résulte que

$$\zeta - n = n e^{2i\nu}.$$

Par conséquent on aura

$$\left| \frac{\zeta - n}{n} \right| = 1$$

et

$$\frac{\zeta - n}{\zeta} = \frac{1}{2 \cos \nu} e^{i\nu}.$$

Mais on en conclut que

$$\left| \left(\frac{\zeta - n}{\zeta} \right)^{\zeta - \frac{1}{2}} \right| = \sqrt{2 \cos \nu} e^{-2n \cos \nu \psi(\nu)},$$

où

$$\psi(\nu) = \cos \nu \log(2 \cos \nu) + \nu \sin \nu.$$

Cela posé, il résulte des équations (20) et (21) qu'on sait trouver une constante C telle que

$$\left| \frac{\Gamma(n+1-\varepsilon)\Gamma(\alpha+\zeta-n)}{\Gamma(\alpha+\zeta)} \right| < C n^{\frac{1}{2}-\sigma} (\cos \nu)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-2n \cos \nu \psi(\nu)},$$

ζ étant un point quelconque sur l'arc CAB. En remarquant que

$$\begin{aligned} d\zeta &= 2in e^{2i\nu} d\nu, \\ \left| \frac{d\zeta}{d\nu} \right| &= 2n \end{aligned}$$

on obtient, de l'expression (16), pour l'intégrale Q_n l'inégalité suivante :

$$|Q_n| < C_1 n^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} (\cos \nu)^{-\frac{1}{2}-\alpha} e^{-2n \cos \nu \psi(\nu)} |\Phi(\alpha + 2n \cos \nu e^{i\nu})| d\nu.$$

En tenant compte de l'inégalité (13) on en déduit

$$\begin{aligned} |Q_n| &< C_2 n^{\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma} \int_{-\nu_n}^{+\nu_n} (\cos \nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} d\nu \\ &= 2C_2 n^{\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma} \int_0^{\nu_n} (\cos \nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} d\nu, \end{aligned}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes. Décomposons la dernière intégrale en deux parties et observons que

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\nu_n} (\cos \nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} d\nu &< 2 \int_{\frac{\pi}{3}}^{\nu_n} (\cos \nu)^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} \sin \nu d\nu \\ &= 2 \int_{\cos \nu_n}^{\frac{1}{2}} x^{\beta+\varepsilon-\frac{1}{2}-\alpha} dx \\ &= \frac{2^{\alpha-\beta-\varepsilon+\frac{1}{2}}}{\beta+\varepsilon+\frac{1}{2}-\alpha} \left[1 - \left(\frac{n}{\log n} \right)^{\alpha-\beta-\varepsilon-\frac{1}{2}} \right]. \end{aligned}$$

On sait donc trouver deux constantes c_2 et c_3 telles que

$$|Q_n| < c_2 n^{\beta+\frac{1}{2}+\varepsilon-\sigma} + c_3 n^{\alpha-\sigma} (\log n)^{\alpha-\beta-\varepsilon-\frac{1}{2}}.$$

Mais puisqu'on peut rendre ε aussi petit que l'on veut en prenant n suffisamment grand, on conclut de cette inégalité que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n = 0$$

pourvu que $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$.

Passons à l'intégrale P_n . Le point ζ sera donc maintenant situé sur l'arc BOC. Posons $\zeta = \xi + i\eta$, nous aurons

$$(22) \quad 0 \leq \xi < \left(\frac{\log n}{n}\right)^2,$$

$$(23) \quad |\eta| < \log n.$$

Je vais étudier comment se comporte la fonction

$$\frac{\Gamma(n+1-z)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)}$$

quand $n \rightarrow \infty$. Remarquons d'abord que

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\zeta)} = \left(\frac{n}{n-\zeta}\right)^{n+\frac{1}{2}} (n-\zeta)^\zeta e^{-\zeta} [1 + \varepsilon(n)],$$

où $\varepsilon(n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Mais

$$|(n-\zeta)^\zeta| = n^\xi e^{|\eta|(\pi-2|\nu|)}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\zeta)} \right| &= n^\xi e^{2|\eta|(\frac{\pi}{2}-|\nu|)} e^{-\xi} |1 + \varepsilon(n)| \\ &= e^{\xi \log n - \xi + 2|\eta|(\frac{\pi}{2}-|\nu|)} |1 + \varepsilon(n)|. \end{aligned}$$

De l'inégalité (19) on conclut que

$$0 \leq \frac{\pi}{2} - |\nu| < \frac{\log n}{n},$$

puisque ζ est un point sur l'arc BOC. On aura par conséquent

$$0 \leq |\eta| \left(\frac{\pi}{2} - |\nu|\right) < \frac{(\log n)^2}{n}.$$

En tenant compte de cette inégalité et de l'inégalité (22), on obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\zeta)} \right| = 1.$$

De plus, on aura

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1-\zeta)n^{-\alpha}}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(n+1-s)}{\Gamma(n+1)n^{-s}} = 1.$$

On en conclut que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\Gamma(n+1-s)n^{\sigma-\alpha}}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} \right| = 1.$$

De l'expression asymptotique de la fonction gamma on obtient l'inégalité suivante:

$$|\Gamma(1-\zeta-\alpha)| < \text{const.} e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|} (1+|n|)^{-\zeta+\frac{1}{2}-\alpha}.$$

Cela posé, il résulte des inégalités (22) et (23) qu'on sait trouver une constante C telle que

$$\left| \frac{\Gamma(n+1-s)\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} \right| < C n^{\alpha-\sigma} (1+\log n)^{1-\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}|\eta|}$$

quel que soit ζ sur l'arc BOC. On aura enfin

$$\begin{aligned} |\Phi(\alpha + re^{i\nu})| &< e^{\nu r \sin \nu} (1+r)^{\beta+\varepsilon} \\ &< e^{\frac{\pi}{2}|\eta|} (1+n)^{\beta+\varepsilon} \\ &< e^{\frac{\pi}{2}|\eta|} (1+\log n)^{\beta+\varepsilon}. \end{aligned}$$

De l'expression (17) on obtient donc, relativement à l'intégrale P_n , l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} |P_n| &< \frac{n}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\nu_n} \left| \frac{\Gamma(n+1-s)\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(1-s)\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} \frac{\Phi(\alpha+\zeta)}{\zeta-s+\alpha} \right| d\nu \\ &+ \frac{n}{2\pi} \int_{\nu_n}^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\Gamma(n+1-s)\Gamma(1-\zeta-\alpha)}{\Gamma(1-s)\Gamma(n+1-\zeta-\alpha)} \frac{\Phi(\alpha+\zeta)}{\zeta-s+\alpha} \right| d\nu \\ &< \frac{C}{2\pi |\Gamma(1-s)|} n^{\alpha+1-\sigma} (1+\log n)^{\beta+1-\alpha+\varepsilon} 2 \left(\frac{\pi}{2} - \nu_n \right). \end{aligned}$$

Mais, puisque

$$\frac{\pi}{2} - \nu_n < \frac{\log n}{n},$$

il en résulte que

$$|P_n| < \frac{C}{\pi |\Gamma(1-z)|} n^{\alpha-\sigma} (1 + \log n)^{\beta+2-\alpha+\varepsilon}.$$

Comme $\sigma > \alpha$, on aura donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = 0.$$

Nous avons ainsi démontré que la série (1) converge si $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$.

11. Posons

$$(24) \quad h(\nu) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |\Phi(\alpha + r e^{i\nu})|}{r}.$$

Si l'on a

$$(25) \quad h(\nu) < \psi(\nu), \quad \text{pour } \frac{\pi}{2} \geq \nu \geq -\frac{\pi}{2},$$

il résulte *a fortiori* de ce que nous venons de démontrer que l'abscisse de convergence de la série (1) est inférieure ou égale à α . Elle est égale à α s'il y a, sur la droite $\sigma = \alpha$, un point singulier pour la fonction $\Phi(z)$. En ce cas l'abscisse de convergence λ est donc le plus petit nombre tel que la fonction est holomorphe pour $\sigma > \lambda$.

Si $h(\nu) = \psi(\nu)$ pour une infinité de valeurs de ν nous n'avons rien à ajouter à ce que nous venons de dire. Mais il arrive assez souvent que $h(\nu)$ atteigne sa limite supérieure $\psi(\nu)$ seulement dans un nombre fini de points. En ce cas, nous pouvons préciser notre condition de convergence. Montrons d'abord par un exemple que cette circonstance peut effectivement se présenter. Considérons la fonction entière de z

$$\Phi(z) = t^z.$$

Si $|t-1| < 1$, l'inégalité (25) est satisfaite quel que soit ν et la série (1) convergera pour toute valeur de z . Si $|t-1| > 1$, on aura $h(\nu) > \psi(\nu)$ pour certaines valeurs de ν dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \geq \nu \geq -\frac{\pi}{2}$. Par conséquent, la série (1) n'est convergente pour aucune valeur de z . Le cas intéressant pour nous est donc celui où l'on a $|t-1| = 1$. Posons

$$t = 1 + e^{2i\varphi}, \quad z = r e^{i\nu}.$$

Puisque

$$1 + e^{2i\varphi} = 2 \cos \varphi e^{i\varphi},$$

on trouvera

$$|t^z| = e^{r\lambda(\varphi)},$$

où

$$\lambda(\varphi) = \cos \nu \log(2 \cos \varphi) - \varphi \sin \nu.$$

En dérivant par rapport à φ on trouve

$$\lambda'(\varphi) = -\cos \nu \operatorname{tang} \varphi - \sin \nu.$$

Admettons que $\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}$. La dérivée $\lambda'(\varphi)$ s'annule dans un et un seul point dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} > \varphi > -\frac{\pi}{2}$, savoir pour $\varphi = -\nu$, et cette valeur de φ correspond à un maximum de $\lambda(\varphi)$, car

$$\lambda''(\varphi) = -\frac{\cos \nu}{\cos^2 \varphi} < 0.$$

On a donc

$$\lambda(\varphi) \leq \psi(\nu) = \cos \nu \log(2 \cos \nu) + \nu \sin \nu$$

et le signe d'égalité subsiste seulement dans le point $\varphi = -\nu$.

Soit maintenant γ un point dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} > \gamma > -\frac{\pi}{2}$. En faisant $\varphi = -\gamma$ on aura

$$|t^z| = |(1 + e^{-2i\gamma})^z| = e^{r\mu(\nu)},$$

où

$$\mu(\nu) = \cos \nu \log(2 \cos \gamma) + \gamma \sin \nu.$$

En dérivant par rapport à ν on trouve

$$\mu'(\nu) = -\sin \nu \log(2 \cos \gamma) + \gamma \cos \nu,$$

$$\psi'(\nu) = -\sin \nu \log(2 \cos \nu) + \nu \sin \nu.$$

On a donc

$$\mu(\gamma) = \psi(\gamma), \quad \mu'(\gamma) = \psi'(\gamma),$$

et nous venons de démontrer que

$$\mu(\nu) < \psi(\nu), \quad \text{si } \nu \geq \gamma.$$

Cela posé, admettons que $\Phi(z)$ soit une fonction analytique holomorphe pour $\sigma \geq \alpha$ et satisfaisant à l'inégalité

$$|\Phi(\alpha + re^{i\nu})| < e^{r\mu(\nu)} (1+r)^{\beta+\varepsilon(r)},$$

dans le voisinage immédiat du point $\nu = \gamma$, c'est-à-dire pour $|\nu - \gamma| \leq \eta$,

η étant un nombre positif et très petit. Admettons en outre que

$$h(\nu) < \psi(\nu), \quad \text{si} \quad \nu \geq \gamma.$$

En étudiant le terme complémentaire de la série (14) on peut se borner à considérer l'intégrale suivante :

$$Q_n = n^{\frac{1}{2}-\sigma} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} (\cos \nu)^{\frac{1}{2}-\alpha} e^{-r\psi(\nu)} |\Phi(\alpha + r e^{i\nu})| d\nu.$$

Supposons qu'on ait choisi η aussi petit que

$$\frac{\pi}{2} > \gamma + \eta > \gamma - \eta > -\frac{\pi}{2}.$$

Notre inégalité entraîne que

$$Q'_n < C n^{\frac{1}{2}-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} e^{-r[\psi(\nu)-\mu(\nu)]} d\nu,$$

C étant une constante. On a maintenant

$$\begin{aligned} \mu''(\nu) &= -\mu(\nu), \\ \psi''(\nu) &= -\psi(\nu) + \frac{1}{\cos \nu}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\psi''(\gamma) - \mu''(\gamma) = \frac{1}{\cos \gamma}.$$

En développant la fonction $\psi - \mu$ suivant les puissances de $\nu - \gamma$, on aura

$$\psi(\nu) - \mu(\nu) = \frac{1}{2 \cos \gamma} (\nu - \gamma)^2 + \dots$$

En prenant η suffisamment petit, on sait donc trouver une constante positive c telle que

$$\psi(\nu) - \mu(\nu) > \frac{c(\nu - \gamma)^2}{2 \cos \nu}, \quad \text{si} \quad |\nu - \gamma| \leq \eta.$$

On aura donc

$$r[\psi(\nu) - \mu(\nu)] > cn(\nu - \gamma)^2$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} Q'_n &< Cn^{\frac{1}{2}-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{\gamma-\eta}^{\gamma+\eta} e^{-cn(\nu-\gamma)^2} d\nu = Cn^{\frac{1}{2}-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{-\eta}^{+\eta} e^{-cn\nu^2} d\nu \\ &= Cn^{-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{-\eta\sqrt{n}}^{+\eta\sqrt{n}} e^{-c\nu^2} d\nu < Cn^{-\sigma+\beta+\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-c\nu^2} d\nu. \end{aligned}$$

De cette inégalité il résulte que Q'_n tend vers zéro si $\sigma > \beta$.

G. Q. F. D.

La série (1) sera donc convergente pour $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta$. Il va sans dire que ce raisonnement s'applique encore s'il y a, dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}$, un nombre fini de points γ de la nature susdite. En rapprochant le résultat que nous venons d'obtenir de l'inégalité de F. Carlson (1), on voit que notre condition est aussi précise que possible. Elle nous permet, dans le cas actuel, de déterminer l'abscisse de convergence; celle-ci dépend uniquement de propriétés analytiques simples de la fonction $\Phi(z)$, savoir les affixes des points singuliers et l'ordre de grandeur de la fonction dans le demi-plan en question.

Si $\gamma = \pm \frac{\pi}{2}$ nous ne pouvons pas démontrer un théorème semblable. Admettons que $h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ et que $h(\nu) < \psi(\nu)$ dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}$. De ce que nous avons dit dans le paragraphe 10 il résulte seulement que la série converge si $\sigma > \alpha$, $\sigma > \beta + \frac{1}{2}$. Mais si $\beta + \frac{1}{2} > \alpha$, on peut pourtant affirmer quelque chose de plus. Soit p un nombre positif. L'inégalité (13) entraîne que

$$|\Phi(\alpha + p + i\tau)| < C e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\beta+\varepsilon-p},$$

C étant une constante. Déterminons p de sorte que

$$\alpha + p = \beta + \frac{1}{2} - p.$$

On aura donc

$$p = \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{1}{4},$$

(1) L'inégalité (6), § 9.

et il résulte de notre théorème que la série converge si

$$\sigma > \beta + \frac{1}{2} - p = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4}.$$

12. Considérons à titre d'exemple la fonction

$$a^z z^\beta (\log z)^{\beta_1}.$$

Si $|a - 1| < 1$, on a $h(\nu) < \psi(\nu)$ et la série de Newton converge. L'abscisse de convergence est en général égale à zéro qui est un point singulier; mais si $\beta_1 = 0$ et si β est un entier non négatif, la série converge dans tout le plan.

Si $|a - 1| = 1$ et $a \neq 0$, nous sommes dans le cas du paragraphe précédent avec un et un seul point de contact entre les courbes $h(\nu)$ et $\psi(\nu)$; l'abscisse de convergence est donc égale au plus grand des nombres β et zéro. Si β est un nombre complexe, il faut dans cet énoncé remplacer β par la partie réelle de β .

Considérons en second lieu la fonction entière

$$(26) \quad \Phi(z) = \int_0^1 t^{z-1} e^{i\gamma(\log t)^2} dt,$$

γ étant un nombre positif ⁽¹⁾. Dans un Mémoire antérieur ⁽²⁾ nous avons démontré que cette fonction se représente par une série de facultés de la forme

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\alpha_s s!}{z(z+\omega) \dots (z+s\omega)}, \quad \omega > 0,$$

ayant l'abscisse de convergence égale à $\frac{\pi\gamma}{\omega}$. Quand ω croît, la droite de convergence s'approche à l'axe imaginaire. Nous allons voir que la série de Newton converge dans un domaine plus étendu que ne le fait cette série.

Pour trouver la fonction $h(\nu)$ qui correspond à notre fonction fai-

(1) L'intégrale (26) converge absolument pour $\sigma > 0$.

(2) *Sur les séries de facultés* (*Acta math.*, t. XXXVII, 1914, p. 374).

sons d'abord $\iota = e^{-\zeta}$. Il vient

$$\Phi(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\zeta + i\gamma\zeta^2} d\zeta.$$

Admettons pour un moment que $z > 0$. Sans changer la valeur de cette intégrale on peut déformer la ligne d'intégration et intégrer le long d'un rayon vecteur formant l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec l'axe des nombres positifs.

Posons donc $\zeta = \xi \sqrt{\frac{i}{\gamma}}$. On trouvera

$$\Phi(z) = \sqrt{\frac{i}{\gamma}} \int_0^{\infty} e^{-z\xi \sqrt{\frac{i}{\gamma}} - \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{i}{\gamma}} e^{x^2} \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi,$$

où

$$x = \frac{z}{2} \sqrt{\frac{i}{\gamma}}.$$

Cette expression montre d'abord que $\Phi(z)$ est une fonction entière.

L'intégrale de Laplace

$$L(x) = \int_x^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

admet, dans l'angle $\frac{3\pi}{4} > \arg x > -\frac{3\pi}{4}$, le développement asymptotique

$$L(x) = \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{\pi}} \left[\sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) x^{-2s-1} + R_n \right].$$

On a donc, asymptotiquement dans cet angle,

$$(27) \quad L(x) \sim \frac{1}{2x} e^{-x^2}.$$

Pour voir comment la fonction se comporte en dehors de cet angle remarquons qu'on a

$$L(x) + L(-x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \sqrt{\pi}.$$

On a donc asymptotiquement

$$L(x) \sim \sqrt{\pi} + \frac{1}{2x} e^{-x^2}$$

dans l'angle $\frac{5\pi}{4} \geq \arg x \geq \frac{3\pi}{4}$. Revenons à la fonction $\Phi(z)$. De l'égalité asymptotique (27) il résulte que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\Phi(z) = 1,$$

z tendant vers l'infini le long d'un rayon vecteur situé dans l'angle $\frac{\pi}{2} > \arg z > -\pi$. Mais dans l'angle $\pi \geq \arg z \geq \frac{\pi}{2}$ on a asymptotiquement

$$(28) \quad \Phi(z) \sim \frac{1}{z} + \sqrt{\frac{i\pi}{\gamma}} e^{\frac{iz^2}{4\gamma}}.$$

Soit $z = \sigma + i\tau$; on trouvera

$$\left| e^{\frac{iz^2}{4\gamma}} \right| = e^{-\frac{\sigma\tau}{2\gamma}}.$$

Cela posé, je vais choisir le nombre α de la manière suivante :

$$\alpha = -\pi\gamma + \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Avec cette détermination de α , on aura

$$h(\nu) = 0, \quad \frac{\pi}{2} > \nu \geq -\frac{\pi}{2},$$

$$h\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\varepsilon}{2\gamma}.$$

Par conséquent $h(\nu) < \psi(\nu)$, pour $\frac{\pi}{2} \geq \nu \geq -\frac{\pi}{2}$. La série de Newton qui représente la fonction $\Phi(z)$ converge donc pour $\sigma > \alpha$. D'autre part de l'inégalité de F. Carlson il résulte que la série diverge si $\sigma < -\pi\gamma$. Elle admet donc l'abscisse de convergence $\lambda = -\pi\gamma$.

Soit ω un nombre positif. De l'égalité (28), on déduit que

$$\Phi(\omega z) \sim \frac{1}{\omega z} + \sqrt{\frac{i\pi}{\gamma}} e^{\frac{i\omega^2 z^2}{4\gamma}}.$$

Mais

$$\left| e^{\frac{i\omega^2 z^2}{4\gamma}} \right| = e^{-\frac{\omega^2 \sigma\tau}{2\gamma}}.$$

On en conclut que la fonction $\Phi(\omega z)$ admet un développement de la

forme

$$\Phi(\omega z) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{s!}$$

ayant l'abscisse de convergence égale à $-\frac{\pi\gamma}{\omega^2}$. Par conséquent la fonction entière, définie par l'intégrale (26), se représente par la série de Newton :

$$\Phi(z) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{(z-\omega)(z-2\omega)\dots(z-s\omega)}{s!}$$

dont l'abscisse de convergence est égale à $-\frac{\pi\gamma}{\omega}$. Quand ω tend vers zéro, l'abscisse de convergence décroît et tend vers $-\infty$. On peut donc prolonger la fonction analytiquement dans tout le plan en prenant ω suffisamment petit.

Considérons, en dernier lieu, la fonction entière

$$(29) \quad \Phi(z) = \frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)},$$

a étant un nombre positif. Est-ce que cette fonction satisfait à nos conditions? Pour en décider, il faut d'abord déterminer la fonction $h(\nu)$. Dans ce but, remarquons qu'on a

$$\left| \frac{1}{\Gamma(re^{i\nu})} \right| = \sqrt{\frac{r}{2\pi}} e^{-r \log r \cos \nu + r(\cos \nu + \nu \sin \nu) + \varepsilon(r)}.$$

Sur cette expression, on voit immédiatement que la fonction $h(\nu)$ qui appartient à (29) est égale à $-\infty$ à l'intérieur de l'intervalle

$$\frac{\pi}{2} > \nu > -\frac{\pi}{2}.$$

Mais ce n'est plus le cas pour les deux extrémités de l'intervalle. En effet, posons $z = \sigma + i\tau$ et admettons que σ reste fixe pendant que $|\tau|$ augmente indéfiniment. De l'expression asymptotique de la fonction gamma, on conclut que

$$(30) \quad \left| \frac{a^z}{\Gamma(z)} \right| = \frac{a^\sigma}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{\pi}{2}|\tau|} |\tau|^{\frac{1}{2}-\sigma} [1 + \varepsilon(\tau)],$$

où $\varepsilon(\tau) \rightarrow 0$ quand $|\tau| \rightarrow \infty$. Mais il en résulte que

$$h\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

La fonction (29) satisfait donc à nos conditions et elle admet par conséquent un développement de la forme

$$(31) \quad \frac{\alpha^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s c_s \binom{z-1}{s}.$$

En se reportant au théorème du paragraphe 10, on voit que cette série, si elle est réduite, converge pour $\sigma > \frac{1}{2}$. En effet, l'équation (30) montre que le nombre β , qui figure dans l'inégalité (13), est égale à zéro, si l'on prend $\alpha = \frac{1}{2}$.

Mais nous ne pouvons pas affirmer que l'abscisse de convergence de la série (31) est égale à $\frac{1}{2}$, car nous sommes ici dans le cas où

$$h(\nu) = \psi(\nu)$$

dans les deux extrémités de l'intervalle, cas que nous avons dû laisser de côté dans le paragraphe 11. Pour voir où il en est, je vais tirer parti d'une relation asymptotique due à L. Fejér (1) et dont une nouvelle démonstration a été donnée par O. Perron (2). Soient ρ un nombre réel et a un nombre positif; ces auteurs démontrent que les coefficients de la série de puissances

$$\frac{e^{\frac{ax}{1-x}}}{(1-x)^\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n x^n$$

satisfont à la relation remarquable

$$(32) \quad \gamma_n = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{\alpha^{\frac{\rho-1}{2}-\frac{1}{4}} \sqrt{\pi}} \frac{\sin \left[2\sqrt{an} + \left(\frac{3}{4} - \frac{\rho}{2} \right) \pi \right]}{n^{\frac{3}{4}-\frac{\rho}{2}}} + O\left(\frac{1}{n^{1-\frac{\rho}{2}}}\right).$$

(1) *Asymptotikus értékek meghatározásáról* (*Mathematikai és természettudományi értesítő*, t. XXVII, 1909, p. 1-33); *Sur une méthode de Darboux* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 147, 1908, p. 1040-1042).

(2) *Ueber das infinitäre Verhalten der Koeffizienten einer gewissen Potenzreihe* (*Archiv Math. Phys.*, 3^e série, t. XXII, p. 329-340).

Cette relation va nous donner l'abscisse de convergence λ de la série réduite (31). Nous avons déjà démontré que $\lambda \leq \frac{1}{2}$. On aura donc

$$(33) \quad (-1)^n c_n = \Delta^n \Phi(1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Je définis une fonction $\varphi(t)$ par la série

$$(34) \quad \varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi(n)}{t^n}.$$

En y appliquant la transformation d'Euler (1), on trouvera

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n \Phi(1)}{(t-1)^{n+1}}.$$

On peut immédiatement évaluer la série (34), on trouvera en effet

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{t^n} \frac{1}{(n-1)!} = \frac{1}{t} e^{\frac{a}{t}}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{t} e^{\frac{a}{t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(1-t)^{n+1}}.$$

En posant $\frac{1}{1-t} = x$, on obtient

$$(35) \quad \frac{1}{1-x} e^{\frac{ax}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

On a donc $c_n = \gamma_n$, si $\rho = 1$. En faisant $\rho = 1$ dans l'équation (32), on en conclut sans peine que l'abscisse de convergence absolue de la série (31) est égale à $\frac{3}{4}$. En divisant les deux membres de l'équation (35) par $1-x$, on obtient

$$\frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{ax}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} (c_0 + c_1 + c_2 + \dots + c_n) x^n.$$

(1) Cf. mon Mémoire sur le calcul aux différences finies (*Acta math.*, t. XLIV, 1922, p. 203).

En faisant $\rho = 2$ dans l'équation (32), on trouvera donc

$$\sum_{s=0}^n c_s = \frac{e^{\frac{a}{2}}}{a^{\frac{3}{4}} \sqrt{\pi}} n^{\frac{1}{4}} \sin \left[2\sqrt{an} - \frac{\pi}{4} \right] + O(1).$$

En rapprochant cette équation de l'équation (2), on voit que l'abscisse de convergence de la série (31) est égale à $\frac{1}{4}$. Cette série est donc simplement convergente dans la bande $\frac{3}{4} > \sigma > \frac{1}{4}$. Les coefficients c_n s'expriment d'ailleurs par les polynômes de Laguerre (1). On définit ces polynômes par l'équation

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n(x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

L'expression (33) des c_n peut s'écrire comme il suit :

$$c_n = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{a^\nu}{\nu!}.$$

En comparant les seconds membres de ces deux équations et en effectuant la différentiation, on vérifie que

$$c_n = L_n(a).$$

On a donc

$$(31') \quad \frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s L_s(a) \frac{(z-1)(z-2)\dots(z-s)}{1.2.3\dots s}.$$

Les polynômes de Laguerre ont été étudiés par un grand nombre d'auteurs. On trouve des remarques intéressantes sur ces polynômes et une Bibliographie dans deux Mémoires récents de H. Hamburger (2) et S. Wigert (3).

(1) Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^{-x} dx}{x}$ (Bull. Soc. math. de France, t. VII, 1879, p. 72-81; Œuvres, t. I, Paris, 1898, p. 428-437).

(2) Zur Konvergenztheorie der Stieltjesschen Kettenbrüche (Math. Z., t. IV, 1919, p. 200-205).

(3) Contributions à la théorie des polynômes d'Abel-Laguerre [Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik (Stockholm), t. XV, 1921, n° 23]. Dans ce Mémoire, S. Wigert a étudié la série (31') d'un autre point de vue, en supposant z réel et > 1 , et en considérant a comme la variable.

J'ai encore quelques remarques à ajouter au sujet de la série (31). Soit p un entier positif. Posons

$$\Phi(z) = \frac{\alpha^{z-p-1}}{\Gamma(z-p)}$$

et considérons la série réduite

$$(36) \quad \frac{\alpha^{z-p-1}}{\Gamma(z-p)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s c'_s \binom{z-1}{s}.$$

On a ici $\Phi(1) = \Phi(2) = \dots = \Phi(p) = 0$, et par conséquent $c'_s = 0$ pour $s < p$. La fonction $\varphi(t)$ définie par l'équation (34) est égale à

$$\varphi(t) = \sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{\alpha^{n-p-1}}{t^n} \frac{1}{(n-p-1)!} = t^{-p-1} e^{\frac{\alpha}{t}}.$$

La fonction génératrice des coefficients $c'_p, c'_{p+1}, c'_{p+2}, \dots$ est donc égale à

$$\frac{1}{(x-1)^{p+1}} e^{\frac{\alpha x}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_{n+p} x^n.$$

Divisons les deux membres de cette équation par $1-x$. On trouvera

$$\frac{1}{(x-1)^{p+2}} e^{\frac{\alpha x}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (c'_p + c'_{p+1} + \dots + c'_{p+n}) x^n.$$

On en conclut, en faisant $\rho = p+2$ dans la relation (32), qu'on aura

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=p}^{s=n} c'_s \right|}{\log n} = \frac{\rho}{2} + \frac{1}{4}.$$

L'abscisse de convergence de la série (36) est donc égale à $\frac{\rho}{2} + \frac{1}{4}$. De même, en faisant $\rho = p+1$, on obtient la valeur asymptotique des c'_n et l'on en conclut que l'abscisse de convergence absolue de la série (36) est égale à $\frac{\rho}{2} + \frac{3}{4}$.

Considérons enfin la fonction

$$\Phi(z) = \frac{a^{z+p-1}}{\Gamma(z+p)}$$

qui admet le développement

$$(37) \quad \frac{a^{z+p-1}}{\Gamma(z+p)} = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s c_s'' \binom{z-1}{s}.$$

La fonction génératrice est ici égale à

$$\varphi(t) = \sum \frac{a^{n+p-1}}{t^n} \frac{1}{(n+p-1)!} = t^{p-1} \left[e^{\frac{a}{t}} - 1 - \frac{a}{t} - \dots - \frac{a^{p-1}}{t^{p-1}} \frac{1}{(p-1)!} \right].$$

Par conséquent

$$(38) \quad -(x-1)^{p-1} e^{\frac{ax}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n'' x^{n+p} + Q_{p-1}(x),$$

$Q_{p-1}(x)$ étant un polynome du degré $p-1$. On en déduit aisément que

$$-(x-1)^{p-2} e^{\frac{ax}{x-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+p} (c_{n+1}'' + c_{n+2}'' + c_{n+3}'' + \dots) + Q_{p-2}(x).$$

En faisant $\rho = 2 - p$ dans l'égalité (32) on trouvera donc

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left| \sum_{s=n+1}^{\infty} c_s'' \right|}{\log n} = \frac{1}{4} - \frac{\rho}{2}.$$

L'abscisse de convergence de la série (37) est donc égale à $\frac{1}{4} - \frac{\rho}{2}$. De même, on conclut de l'équation (38) que l'abscisse de convergence absolue est égale à $\frac{3}{4} - \frac{\rho}{2}$. En résumé, la série (31) peut se transformer en une série de la forme

$$\frac{a^{z-1}}{\Gamma(z)} = \sum_{s=0}^{\infty} a_s \frac{(z+p-1)(z+p-2)\dots(z+p-s)}{1.2.3\dots s},$$

p étant un entier positif ou négatif quelconque. Cette série con-

verge pour $\sigma > \frac{1}{4} - \frac{p}{2}$, elle est simplement convergente dans la bande $\frac{3}{4} - \frac{p}{2} > \sigma > \frac{1}{4} - \frac{p}{2}$ et absolument convergente dans le demi-plan $\sigma > \frac{3}{4} - \frac{p}{2}$. En augmentant la valeur de p on augmente le domaine de convergence.

(*A suivre.*)