Annales scientifiques de l'É.N.S.

Louis Bachelier

Les probabilités cinématiques et dynamiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 30 (1913), p. 77-119

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1913_3_30__77_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1913, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES

PROBABILITÉS CINÉMATIQUES ET DYNAMIQUES

PAR LOUIS BACHELIER.

On dit qu'un problème est relatif aux *probabilités géométriques* lorsqu'il consiste à déterminer la probabilité pour qu'un ensemble de points, de lignes ou de surfaces dépendant d'une certaine façon du hasard possède une propriété géométrique donnée. Par exemple, lorsqu'on détermine la probabilité pour que quatre points pris au hasard à l'intérieur d'un cercle forment un quadrilatère convexe, on résout un problème de probabilité géométrique.

Nous disons qu'un problème est relatif aux *probabilités cinématiques* lorsqu'il consiste à étudier les déplacements d'un point ou d'un système, ces déplacements dépendant en totalité ou en partie du hasard.

Par exemple, un point immatériel étant animé d'une vitesse v dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard, on peut déterminer la probabilité pour que, au bout du temps t, ce point soit à une distance donnée de son point de départ.

Pour ce problème, le mouvement du point considéré dépend uniquement du hasard; dans cette étude nous traiterons un cas plus compliqué où le déplacement du point dépend du hasard et aussi de la position actuelle de ce point.

Nous disons qu'un problème est relatif aux *probabilités dynamiques* lorsqu'il consiste à étudier le mouvement d'un point ou d'un système matériel, les forces qui sollicitent ce point ou ce système dépendant en totalité ou en partie du hasard.

Par exemple, un point matériel étant soumis à l'action d'une force dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard, on peut déterminer la probabilité pour que, à l'époque t, ce point matériel occupe une position donnée de l'espace et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes suivant les axes sont données.

Ce problème de probabilité dynamique est le plus important de notre étude, nous traiterons aussi le cas d'un point matériel qui se meut dans un milieu résistant et celui d'une tige rigide mobile dans un plan.

Dans mes précédents travaux, j'ai fait remarquer l'intérêt que présentait la conception de l'unité du calcul des probabilités. Tous les problèmes comportant de grands nombres doivent être ramenés à une forme unique qui permet à la fois d'apercevoir les propriétés particulières qui les différencient et les caractères généraux qui les unissent. La présente étude contribue à démontrer l'utilité de cette unité de conception.

Les formules que nous obtiendrons sont asymptotiques, il importe de le remarquer une fois pour toutes.

PROBABILITÉS CINÉMATIQUES.

1. *Un point géométrique* M *est animé d'une vitesse v dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard. Le mouvement de* M *étant rapporté à trois axes rectangulaires passant par sa position initiale, quelle est la probabilité pour que, au bout du temps t, le point considéré ait pour coordonnées x, y, z?*

Suivant notre méthode générale, nous imaginons quatre joueurs A, B, C, D et nous faisons correspondre chaque élément de temps à une partie de leur jeu considéré comme continu. Nous supposons que, à chaque partie, les joueurs perdent des sommes respectivement égales aux accroissements de x, y, z, $-x-y-z$ dans l'élément de temps correspondant.

Dans ce qui suit, comme d'ailleurs dans toute la théorie des probabilités continues, les pertes des joueurs sont considérées comme positives; les gains sont donc exprimés par des nombres négatifs.

Pendant un élément de temps, le point M subit un déplacement $v\,dt$ dans une direction quelconque *toutes les directions ayant égale vraisemblance* (c'est, par définition, ce qu'il faut entendre par le terme : direction variant au hasard). Ce déplacement du point M ne dépend en rien des déplacements antérieurs ni de la position actuelle du point.

Soient $\xi\,dt$, $\eta\,dt$, $\zeta\,dt$ les projections du déplacement du point M pendant l'élément de temps dt ; les valeurs moyennes de ξ, η, ζ sont nulles par raison de symétrie. De l'égalité

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = v^2$$

on déduit, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\text{VM}\,\xi^2 + \text{VM}\,\eta^2 + \text{VM}\,\zeta^2 = v^2,$$

et comme ces valeurs moyennes sont égales par raison de symétrie, on a

$$\text{VM}\,\xi^2 = \text{VM}\,\eta^2 = \text{VM}\,\zeta^2 = \frac{v^2}{3}.$$

La valeur moyenne des produits $\xi\eta$, $\xi\zeta$, $\eta\zeta$ est nulle par raison de symétrie; à chaque valeur positive de $\xi\eta$ correspond une valeur négative de même probabilité.

Considérons maintenant le jeu de A à une partie quelconque (la partie d'ordre t, pour fixer les idées), ce joueur perd une somme $\xi\,dt$ indépendante des faits antérieurs du jeu et de sa perte totale actuelle, son jeu admet donc l'indépendance, ce jeu est de plus équitable puisque la valeur moyenne de ξ est nulle.

La valeur moyenne des carrés des pertes de A pour la partie considérée est $\frac{v^2}{3}dt$.

La valeur moyenne du produit $\xi\eta\,dt$ des pertes des joueurs A et B pour cette partie est nulle.

Le jeu considéré de A, B, C, D admettant l'indépendance, le problème proposé qui consiste à chercher la probabilité pour que les joueurs A, B, C perdent respectivement les sommes x, y, z en t parties est un cas particulier de celui qui a été résolu dans mon étude sur *les* *probabilités à plusieurs variables* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 1910, p. 339).

La probabilité a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{1}{\Delta}\left\{\begin{array}{l}(\varphi_2\varphi_3-\chi_{2,3}^2)x^2+(\varphi_3\varphi_1-\chi_{3,1}^2)y^2+(\varphi_1\varphi_2-\chi_{1,2}^2)z^2\\ +2(\chi_{2,3}\chi_{3,1}-\varphi_3\chi_{1,2})xy+2(\chi_{1,2}\chi_{2,3}-\varphi_2\chi_{3,1})xz+2(\chi_{1,3}\chi_{2,1}-\varphi_1\chi_{2,3})yz\end{array}\right\}}}{\pi\sqrt{\pi}\sqrt{\Delta}}\,dx\,dy\,dz,$$

Δ désignant le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix}\varphi_1 & \chi_{1,2} & \chi_{1,3}\\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3}\\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3\end{vmatrix}.$$

Il suffit de calculer les fonctions φ et χ d'après les données du problème.

φ_1 est la fonction d'instabilité relative au jeu de A pour t parties, c'est le double de la somme des valeurs moyennes des carrés des pertes du joueur A pour chaque partie, c'est-à-dire la quantité

$$2\int_0^t \frac{v^2}{3}\,dt,$$

dans le cas général où la vitesse v est une fonction arbitraire donnée du temps et la quantité $\frac{2}{3}v^2 t$ lorsque la vitesse v est constante.

Les fonctions φ_2 et φ_3 ont même valeur que φ_1. Les fonctions χ sont nulles, par exemple $\chi_{1,2}$ est le double de la somme des valeurs moyennes des produits des pertes de A et B pour chaque partie et ces valeurs moyennes sont nulles, comme nous l'avons vu.

Remplaçant dans la formule générale ci-dessus les quantités φ par $\frac{2}{3}v^2 t$ et les quantités χ par zéro, on obtient la probabilité pour que les joueurs A, B, C perdent les sommes x, y, z en t parties, c'est-à-dire *la probabilité pour que, à l'époque t, les coordonnées du point mobile soient x, y, z* :

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2}{3}v^2 t}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}v^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

2. Lorsque la vitesse v, au lieu d'être constante, est une fonction arbitraire donnée du temps, la même probabilité a pour valeur

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2}{3}\int_0^t v^2\,dt}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\int_0^t v^2\,dt\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

3. *La probabilité pour que le point* M *se trouve, à l'époque* t, *à une distance* r *de son point de départ est*

$$\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

La valeur moyenne de r est

$$\int_0^\infty r\,\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}.$$

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\left[\int_0^\infty r^2\,\frac{4r^2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2t\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}.$$

La valeur la plus probable de r s'obtient en annulant la dérivée par rapport à r de la probabilité, on trouve ainsi $\sqrt{\frac{2}{3}v^2t}$.

Si l'on considère une surface sphérique infiniment mince de rayon fixe r, la probabilité sur cette surface sphérique commence par croître avec t jusqu'à ce que $t=\frac{r^2}{v^2}$. Elle décroît ensuite et lorsque $t=\frac{3r^2}{2v^2}$, elle devient maxima relativement aux autres. Le maximum individuel précède le maximum relatif.

La probabilité pour que le point M soit en dehors de la sphère de rayon R est

$$\int_R^\infty \frac{4r^2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}v^2 t}}}{\left(\frac{2}{3}v^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} dr.$$

Les valeurs de R qui correspondent à la même probabilité (écarts isoprobables) sont proportionnels à $\sqrt{\frac{2}{3}v^2 t}$.

Cette dernière intégrale est de la forme $\int \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda$, elle se calcule facilement à l'aide des Tables de Kramp; on a, en effet, en intégrant par parties

$$\int e^{-\lambda^2} d\lambda = \lambda e^{-\lambda^2} + \int 2\lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda,$$

d'où

$$\int \lambda^2 e^{-\lambda^2} d\lambda = -\frac{\lambda e^{-\lambda^2}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

La valeur probable de r est la valeur de R pour laquelle l'intégrale ci-dessus a pour valeur $\frac{1}{2}$. En d'autres termes, cette valeur probable est la distance qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée à l'époque t; cette valeur probable est égale à

$$1,09\ldots\sqrt{\frac{2}{3}v^2 t}.$$

En résumé, dans le cas considéré, le point s'éloigne proportionnellement à la racine carrée du temps.

4. Si la vitesse était variable, les écarts croitraient comme la quantité

$$\left(\int_0^t v^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si la vitesse v décroît indéfiniment lorsque t croît, les écarts peuvent ne pas croître indéfiniment et tendre, lorsque t augmente, vers une valeur asymptote.

Si, par exemple, $v = \frac{1}{t+\alpha}$, on a

$$\int_0^t v^2\,dt = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{t+\alpha},$$

la probabilité pour que le point M soit à une distance r à l'époque t est

$$\frac{4r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{t+\alpha}\right)}}}{\sqrt{\pi}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{t+\alpha}\right)\right]^{\frac{3}{2}}}\,dr,$$

et, le temps croissant indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la *loi finale* exprimée par la formule

$$\frac{4r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2}{3}\alpha}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

5. Si le point M doit se mouvoir dans un plan contenant la vitesse v, la probabilité pour que, à l'époque t, le point M soit à une distance r de son point de départ est

$$\frac{2r e^{-\frac{r^2}{v^2 t}}}{v^2 t}\,dr.$$

La valeur moyenne de r est

$$\int_0^\infty \frac{2r^2 e^{-\frac{r^2}{v^2 t}}}{v^2 t}\,dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{v^2 t}.$$

La valeur moyenne quadratique de r est

$$\left(\int_0^\infty \frac{2r^3 e^{-\frac{r^2}{v^2 t}}}{v^2 t}\,dr\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{v^2 t}.$$

La valeur la plus probable de r est $\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{v^2 t}$ et la valeur probable est $0{,}832\ldots\sqrt{v^2 t}$.

Dans l'ensemble, le point s'éloigne proportionnellement à la racine carrée du temps.

Si le point M doit se mouvoir sur une ligne, la vitesse v pouvant, à chaque instant, avec égale vraisemblance, être dirigée dans un sens ou dans l'autre, la probabilité pour que le point M soit, à l'époque t, à une distance x de son point de départ est

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{2v^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2v^2 t}}\,dx.$$

Les écarts sont, dans l'ensemble, proportionnels à $\sqrt{v^2 t}$.

6. Cas ou le hasard n'agit pas seul. — Dans la question que nous allons étudier le hasard n'agit pas seul ; le point géométrique considéré est animé d'un mouvement qui dépend de sa position actuelle.

Un point M *qui est mobile dans l'espace est attiré par un centre fixe* O *proportionnellement à la distance. Indépendamment du mouvement dû à cette attraction le point* M *est constamment animé d'une vitesse* v *dont la grandeur est constante et dont la direction varie au hasard. Quelle est la probabilité pour que, au bout du temps* t, *le point* M *occupe une position donnée.*

Le point M est considéré comme dépourvu d'inertie.

Il importe de bien préciser les conditions admises pour l'énoncé : Soit, à l'époque t, $OM = r$ la distance du point M au point O ; dans l'intervalle de temps t, $t + dt$ le point M subit deux déplacements : l'un de grandeur $v\,dt$ et de direction quelconque (toutes les directions étant également vraisemblables) et l'autre de grandeur $ar\,dt$ (a étant une constante) dirigé suivant le rayon vecteur MO.

Le mouvement du point M ne dépend, à chaque instant, que de sa distance actuelle au point O et que de l'effet actuel du hasard.

Pour résoudre le problème, on emploie la méthode générale qui consiste à le ramener à l'étude d'un jeu. On est ainsi conduit à une question de probabilités connexes (consulter mon Mémoire sur les probabilités continues, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1906).

Rapportons le mouvement à trois axes rectangulaires passant par O :

La probabilité pour que le point M *qui a pour coordonnées initiales* x_1, y_1, z_1 *ait pour coordonnées* x, y, z *à l'époque* t *est exprimée par la formule*

$$\frac{e^{-\frac{(x-x_1e^{-at})^2+(y-y_1e^{-at})^2+(z-z_1e^{-at})^2}{\frac{\wp^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\pi\sqrt{\pi}\left[\frac{\wp^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

7. L'influence des coordonnées initiales va sans cesse en diminuant lorsque t augmente.

Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la *loi finale* exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{\wp^2}{3a}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{\wp^2}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

La probabilité pour que, finalement, le point M se trouve à une distance du centre attractif O comprise entre r et $r+dr$ est donnée par la formule

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}}\,\frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{\wp^2}{3a}}}}{\left(\frac{\wp^2}{3a}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

La valeur moyenne finale de r est $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\wp}{\sqrt{3a}}$

La valeur moyenne quadratique finale de r est $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,\frac{\wp}{\sqrt{3a}}$.

La valeur de r qui a finalement la plus grande probabilité est $\frac{\wp}{\sqrt{3a}}$.

La valeur probable finale de r est $1{,}09\ldots\frac{\wp}{\sqrt{3a}}$.

8. Supposons que le point M parte initialement du point O ; la probabilité pour que, à l'époque t, il se trouve à une distance r de ce point

est

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{\rho^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\left[\frac{\rho^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}} dr.$$

La probabilité pour que le point M soit en dehors de la sphère de rayon R est

$$\int_{R}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{\rho^2}{3a}(1-e^{-2at})}}}{\left[\frac{\rho^2}{3a}(1-e^{-2at})\right]^{\frac{3}{2}}} dr.$$

Les valeurs de R qui correspondent à la même probabilité (écarts isoprobables) sont proportionnelles à $\frac{\rho\sqrt{1-e^{-2at}}}{\sqrt{3a}}$.

9. *Sphère d'attraction.* — Le hasard tend à éloigner le point M du centre O alors que l'attraction l'en rapproche; il est intéressant de calculer la distance $OM = \rho$ pour laquelle ces deux actions s'équivalent.

En exprimant que les deux actions s'équivalent, on obtient facilement la valeur de ρ, c'est la quantité $\frac{\rho}{\sqrt{3a}}$.

Lorsque le point M est à l'intérieur de la sphère de rayon ρ, l'effet du hasard l'emporte, en moyenne, sur l'attraction et le point a une tendance à s'écarter du centre O.

Au contraire, lorsque le point M est à l'extérieur de la sphère de rayon ρ, l'effet de l'attraction prédomine, en moyenne, et le point M a une tendance à se rapprocher du centre O.

Tout se passe comme si la surface sphérique de rayon ρ attirait le point M; d'où la dénomination de sphère d'attraction.

On peut remarquer que la valeur $\rho = \frac{\rho}{\sqrt{3a}}$ avait été précédemment obtenue pour le rayon de probabilité maxima.

C'est à la sphère d'attraction que correspond finalement la plus grande probabilité.

PROBABILITÉS DYNAMIQUES.

10. Nous allons étudier le mouvement d'un point matériel soumis à l'action d'une force dont la grandeur est constante et dont la direction varie constamment au hasard.

Notre analyse permettrait de supposer que la force varie en grandeur suivant une fonction donnée du temps mais le problème ainsi généralisé serait sans doute moins intéressant parce que la plupart des résultats dépendraient de la forme particulière de la fonction donnée.

Les principaux problèmes que nous résoudrons sont les suivants :

Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel M soit animé d'une vitesse donnée?

Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée?

Calculer la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse donnée.

Calculer la probabilité pour que le point matériel ait une vitesse donnée quand il se meut dans un milieu résistant proportionnellement à la vitesse.

Ces problèmes présentant quelque difficulté, nous étudierons successivement les cas du mouvement dans un espace à une, deux et trois dimensions.

Espace à une dimension.

11. Problème relatif aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait une vitesse donnée v?*

Supposons qu'un joueur A perde, à chaque instant, une somme égale à l'accroissement de la vitesse à cet instant; la probabilité pour que la vitesse soit v à l'époque t est la probabilité pour que le joueur A perde la somme v en t parties.

La force étant constante en grandeur produit, pendant chaque élément de temps, une accélération ou accroissement de vitesse α proportionnelle à cette force elle-même et inversement proportionnelle à la masse du point matériel.

Il y a, par définition, à chaque instant, égale probabilité pour que la force agisse dans un sens ou dans l'autre et par suite égale probabilité pour que α soit positif ou négatif.

Dans chaque élément de temps ou, si l'on veut, à chaque partie, la vitesse peut, avec égale probabilité, augmenter ou diminuer de la quantité α et cette augmentation ou cette diminution est indépendante des faits antérieurs; le joueur A a donc, à chaque partie, égale probabilité de perdre ou de gagner la somme α. Le problème est donc le suivant :

A chaque partie (supposée indépendante des autres) un joueur A a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme α; quelle est la probabilité pour qu'il perde la somme v en t parties?

Ce problème qui suppose à la fois l'indépendance des épreuves successives et leur uniformité ne présente aucune difficulté.

La probabilité pour que la vitesse soit v à l'époque t est

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{2\alpha^2 t}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2 t}}\,dv.$$

Cette formule exprime la probabilité de la vitesse $+v$ ou de la vitesse $-v$; la probabilité pour que la vitesse soit $\pm v$ aurait une valeur double de la précédente.

12. L'amplitude des écarts est mesurée par la quantité $\sqrt{2\alpha^2 t}$; donc :

Les vitesses croissent proportionnellement à la racine carrée du temps.

C'est la loi de croissance ordinaire, conséquence nécessaire de l'uniformité.

Le problème est trop simple pour que nous nous arrêtions aux conséquences qu'on peut déduire de la formule précédente. Dans le cas des probabilités des deuxième et troisième genres la question présenterait déjà beaucoup plus d'intérêt, mais comme elle ne constituerait encore qu'un cas très particulier des théories générales que j'ai exposées antérieurement je ne crois pas utile d'insister sur ce sujet; je citerai seulement, à titre d'exemple, le résultat suivant :

La probabilité pour que la vitesse maxima qui est atteinte dans l'intervalle de temps t soit $\pm v$ est exprimée par la série

$$\frac{4\,dv}{\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2 t}}\left[e^{-\frac{v^2}{2\alpha^2 t}}-3e^{-\frac{(3v)^2}{2\alpha^2 t}}+5e^{-\frac{(5v)^2}{2\alpha^2 t}}-7e^{-\frac{(7v)^2}{2\alpha^2 t}}+\ldots\right].$$

La valeur la plus probable de la vitesse maxima est $0,642\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$.

La valeur probable de la vitesse maxima est $0,8062\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$ et la valeur moyenne de cette vitesse maxima est $\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{2\alpha^2 t}$ ou $0,886\ldots\sqrt{2\alpha^2 t}$.

13. Problème relatif aux positions. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ ?*

L'idée qui se présente le plus naturellement à l'esprit consiste à employer notre méthode générale et à supposer qu'un joueur K perde, à chaque instant, une somme égale à l'accroissement de la distance x pendant cet instant. La probabilité demandée est alors la probabilité pour que le joueur K perde la somme x en t parties.

Ce procédé ne conduit pas à la résolution de la question posée parce que le jeu de K n'admet pas l'indépendance. D'après le principe de l'inertie, le mouvement du point M dans un élément de temps dépend de la vitesse acquise antérieurement et par conséquent le jeu de K pour une partie dépend des faits antérieurs du jeu.

Pour tourner la difficulté, nous considérerons un jeu fictif pour lequel, finalement, à l'époque t, la probabilité d'une perte x sera égale à la probabilité d'un écart de situation x du point matériel M, alors que, pendant l'intervalle de temps compris entre zéro et t, les écarts relatifs à ce jeu ne correspondront pas avec les écarts de situation du point M au même instant.

La coïncidence se produira seulement à l'époque t.

Nous décomposerons l'action de la force considérée en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2\,dt$), ($2\,dt$, $3\,dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt, sous l'action de la force, le point M a parcouru une distance $\alpha\,dt$ (dans un sens ou dans l'autre, les deux sens ayant même probabilité) et, en vertu de l'inertie, ce mouvement se continue jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point matériel la distance αt.

L'action de la force pendant ce premier intervalle a pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance αt.

Considérons le second intervalle de temps (compris entre dt et $2\,dt$); au bout de cet intervalle, la force aura communiqué au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, un second déplacement $\alpha\,dt$ indépendant du premier et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t - dt)$.

L'action de la force pendant ce deuxième intervalle aura pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t - dt)$.

L'action de la force pendant le troisième intervalle aura pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t - 2\,dt)$.

L'action de la force pendant l'intervalle élémentaire correspondant au temps τ aura pour effet de faire parcourir au point matériel, dans un sens ou dans l'autre, la distance $\alpha(t - \tau)$.

L'effet de la force dans un intervalle élémentaire ne dépend pas du mouvement antérieur.

Le point matériel aura finalement pour abscisse à l'époque t la somme des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour abscisse x, est la probabilité pour que la somme des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires ait pour valeur x.

Supposons maintenant qu'un joueur B perde ou gagne, à chaque partie, une somme égale à l'effet produit par la force dans l'élément de temps correspondant; c'est-à-dire que ce joueur ait égale probabilité de gagner ou de perdre : la somme αt à la première partie, la somme $\alpha(t - dt)$ à la deuxième, la somme $\alpha(t - 2\,dt)$ à la troisième, ..., la somme $\alpha(t - \tau)$ à la $\tau^{\text{ième}}$ .... La probabilité pour que le point matériel ait pour abscisse x à l'époque t est la probabilité pour que le joueur B perde la somme x en t parties.

Les parties successives étant indépendantes, cette probabilité s'obtient en appliquant la formule du n° 6 de mon Mémoire sur les probabilités continues

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\int_0^t \varphi'(\tau)\,d\tau}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\int_0^t \varphi'(\tau)\,d\tau}}\,dx,$$

$\varphi'(\tau)$ est le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur B pour la partie élémentaire d'ordre τ. Or, à cette partie, le joueur a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme $\alpha(t-\tau)$; on a donc

$$\varphi'(\tau) = 2\left\{\frac{1}{2}[\alpha(t-\tau)]^2 + \frac{1}{2}[\alpha(t-\tau)]^2\right\},$$

et l'on en déduit

$$\int_0^t \varphi'(\tau)\,d\tau = \frac{2}{3}\alpha^2 t^3.$$

La probabilité pour que le joueur B perde la somme x en t parties, c'est-à-dire *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ est*

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}\,dx,$$

Cette formule est relative à l'écart $+x$ ou à l'écart $-x$; la probabilité pour que l'écart soit $\pm x$ aurait une valeur double de la précédente.

14. *Courbe de probabilité.* — La probabilité peut être représentée par une courbe.

$$y = \frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}};$$

géométriquement cette courbe est bien connue mais sa déformation est beaucoup plus rapide que dans le cas des problèmes classiques, le temps y figurant à la troisième puissance et non à la première.

La courbe présente deux points d'inflexion pour

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\alpha^2 t^3}.$$

Ces points d'inflexion s'éloignent proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

La probabilité relative à une abscisse fixe x commence par croître pour décroître ensuite, elle passe par un maximum quand x est l'abscisse du point d'inflexion de la courbe de probabilité.

15. *L'écart moyen* ou valeur moyenne de l'écart considéré en valeur absolue croît proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

L'écart quadratique, c'est-à-dire la racine carrée de la moyenne des carrés des écarts croît proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

L'écart probable est l'écart qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassé, il est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

Plus généralement, *les écarts croissent proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.*

16. Si l'inertie n'existait pas, les écarts croîtraient, comme dans les problèmes ordinaires du calcul des probabilités, proportionnellement à la racine carrée du temps; ils croîtraient en valeur absolue et décroîtraient en valeur relative (relativement à t).

L'existence de l'inertie change complètement la nature du résultat; les écarts croissent non seulement en valeur absolue mais encore en valeur relative.

17. Les carrés des écarts croissant proportionnellement à la quantité $\frac{2}{3}\alpha^2 t^3$, on pourrait appeler cette quantité fonction d'instabilité, mais elle ne possède pas la propriété d'addition comme lorsqu'il y a indépendance.

La formule qui exprime la probabilité de l'écart de situation x à l'époque t

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2}{3}\alpha^2 t^3}}dx$$

est un cas particulier de la formule

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\varphi(t)}}dx,$$

qui exprime la probabilité de la perte x à l'époque t (probabilité du premier genre) dans le cas le plus général où il y a indépendance. Quoique dans le cas considéré il n'y ait pas indépendance, la similitude de ces formules explique la similitude des résultats qu'on peut en déduire. Mais cette similitude n'existe plus lorsqu'on considère les probabilités des deuxième et troisième genres, c'est-à-dire les probabilités relatives non plus à l'époque t mais aux faits qui peuvent se produire dans l'intervalle de temps t.

D'ailleurs le jeu fictif qui nous a permis d'obtenir la formule des écarts de situation x n'est nullement l'image du mouvement réel du point M pendant le temps t.

Considérons, par exemple, le problème le plus simple des probabilités du second genre : Quelle est la probabilité pour que le point matériel dépasse au moins une fois l'abscisse $+x$ dans l'intervalle de temps t?

Lorsqu'il y a indépendance, nous employons un raisonnement d'une extrême simplicité faisant uniquement appel à des raisons de symétrie (Mémoire *Sur les probabilités continues*, n° 27) et qui, pour le cas étudié, se traduirait ainsi : Lorsque le point matériel franchit l'abscisse x (à l'époque t_1 pour fixer les idées), la probabilité d'un nouvel écart $+y$ (c'est-à-dire d'un écart total $x+y$) à l'époque t est égale à la probabilité d'un nouvel écart $-y$ (c'est-à-dire d'un écart total $x-y$) à la même époque.

Il est évident que ce raisonnement est inexact; lorsque le point matériel dépasse l'abscisse $+x$, sa vitesse est dirigée vers l'extérieur et, par suite de cette vitesse acquise, la probabilité d'un nouvel écart y se produisant pendant le temps $t-t_1$ est plus grande que la probabilité de l'écart $-y$ se produisant dans le même temps.

Les analogies des formules relatives aux probabilités du premier genre ne peuvent se généraliser aux probabilités des genres supérieurs. Le même fait se produit pour d'autres classes de probabilités connexes, par exemple pour celles qui sont étudiées au n° 24 de mon Mémoire : *Sur les probabilités continues*.

18. Problèmes relatifs aux situations et aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit à une distance x de son point de départ et pour qu'il soit animé d'une vitesse v?*

Imaginons trois joueurs A, B, C et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

A chaque instant le joueur A perd une somme égale à l'accroissement de la vitesse v à cet instant.

Le jeu de B est le jeu fictif défini au n° 13. A la partie d'ordre τ ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur B a égale probabilité de gagner ou de perdre la somme $\alpha(t-\tau)$.

Si l'on désigne par x' sa perte totale, x' est différent de l'écart de situation x du point M sauf pour l'époque t.

Lorsqu'il s'agira de probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x' par x mais, s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné. Ce fait se conçoit immédiatement, la partie la plus importante du jeu de B est la première, alors qu'au contraire c'est le dernier élément de temps qui contribue le plus à faire varier l'écart de situation.

Le joueur C fermera le jeu, c'est-à-dire que, à chaque partie, il perdra la somme des gains de ses adversaires; sa perte totale sera $z=-v-x'$.

Le jeu est équitable et les parties successives sont indépendantes; la probabilité pour que les joueurs B et A perdent respectivement les sommes x' et v en t parties est donc exprimée par la formule de la page 348 de mon Mémoire : *Sur les probabilités à plusieurs variables ;* cette probabilité est

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 x'^2 + \varphi_1 v^2 - 2\chi x' v}{\varphi_1 \varphi_2 - \chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1 \varphi_2 - \chi^2}}\, dx'\, dv.$$

φ_1 est la fonction d'instabilité relative à x' (n° 13), c'est-à-dire $\frac{2}{3}\alpha^2 t^3$.

φ_2 est la fonction d'instabilité relative à v (n° 11), c'est-à-dire $2\alpha^2 t$.

χ s'obtient en formant le double de la valeur moyenne de l'augmentation du produit $x'v$ pour une partie et en sommant pour toutes les parties de zéro à t.

Supposons que, à la partie d'ordre τ, les pertes soient x' et v ; le produit de ces pertes est alors $x'v$.

A la partie suivante, il y a probabilité $\frac{1}{2}$ pour que le nouveau déplacement du point matériel soit positif, alors x' augmente de $\alpha(t-\tau)$, v augmente de α et le produit $x'v$ augmente de la quantité

$$[x' + \alpha(t-\tau)][v+\alpha] - x'v = \alpha x' + v\alpha(t-\tau) + \alpha^2(t-\tau).$$

Il y a également probabilité $\frac{1}{2}$ pour que le nouveau déplacement du point matériel soit négatif, alors x' diminue de $\alpha(t-\tau)$, v diminue de α et le produit $x'v$ diminue de la quantité

$$vx' - [x' - \alpha(t-\tau)][v-\alpha] = \alpha x' + v\alpha(t-\tau) - \alpha^2(t-\tau).$$

L'augmentation moyenne de $x'v$ à la partie d'ordre τ est donc $\alpha^2(t-\tau)$; pour l'ensemble des parties elle est

$$\int_0^t \alpha^2(t-\tau)\, d\tau = \frac{\alpha^2 t^2}{2},$$

χ est le double de cette quantité, on a donc

$$\chi = \alpha^2 t^2.$$

La probabilité pour que, en t parties, les joueurs B et A perdent respectivement les sommes x' et v est alors

$$\frac{e^{-\frac{2x'^2-2tvx'+\frac{2}{3}t^2v^2}{\frac{1}{3}\alpha^2t^3}}}{\pi\frac{\alpha^2t^2}{\sqrt{3}}}\,dx'\,dv.$$

A l'époque t, $x'=x$ et, d'après la définition de ces quantités, les probabilités qui leur sont relatives sont égales. Il en résulte que *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel* M *soit à une distance x de son point de départ et pour qu'il soit animé d'une vitesse v est*

$$\frac{e^{-\frac{x^2-tvx+\frac{t^2}{3}v^2}{\frac{\alpha^2t^3}{6}}}}{\pi\frac{\alpha^2t^2}{\sqrt{3}}}\,dx\,dv.$$

19. Cas d'une résistance de milieu. — On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que son expression est mkv, m étant la masse du point. Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait une vitesse v à l'époque t?

Supposons qu'un joueur H perde, à chaque instant, une somme égale à l'accroissement de la vitesse pendant cet instant et que, à l'époque t, la vitesse soit v.

Dans l'intervalle de temps élémentaire suivant, il y a probabilité $\frac{1}{2}$ pour que la vitesse augmente de la quantité $\alpha-kv$ et probabilité $\frac{1}{2}$ pour qu'elle diminue de la quantité $\alpha+kv$.

L'espérance du joueur H pour cet intervalle élémentaire (ou pour cette partie) est donc

$$\frac{1}{2}(\alpha+kv)-\frac{1}{2}(\alpha-kv)=kv.$$

L'espérance mathématique du joueur H est proportionnelle à sa perte actuelle.

La fonction d'instabilité pour la même partie est

$$2\left[\frac{1}{2}(\alpha + kv)^2 + \frac{1}{2}(\alpha - kv)^2 - k^2 v^2\right] = 2\alpha^2.$$

Cette quantité est donc constante.

L'espérance mathématique du joueur H étant proportionnelle à sa perte actuelle et la fonction d'instabilité de son jeu étant constante, nous sommes conduits à un problème de probabilités connexes du premier genre (Consulter mon Mémoire : *Sur les probabilités continues*, au n° 18).

La probabilité pour que, en t parties, le joueur H ait perdu la somme v, c'est-à-dire la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait la vitesse v est

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{\alpha^2 \frac{1-e^{-2kt}}{k}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2 \frac{1-e^{-2kt}}{k}}}dv.$$

20. Lorsque le temps croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{k}}}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{\alpha^2}{k}}}dv.$$

La vitesse moyenne finale est

$$\frac{\alpha}{\sqrt{k}\sqrt{\pi}}.$$

La vitesse probable finale est

$$0,47693\ldots\frac{\alpha}{\sqrt{k}}.$$

21. La théorie des probabilités connexes à laquelle nous avons été conduits permet de résoudre le problème quand la fonction d'instabilité et l'espérance dépendent explicitement du temps (Mémoire : *Sur* *les probabilités continues*, n° 25). Nous pouvons donc calculer la probabilité d'une vitesse v à l'époque t quand la force considérée est égale à une fonction donnée du temps et quand la résistance du milieu est égale au produit de la vitesse par une fonction donnée du temps.

Espace à deux dimensions.

22. *Espace à deux dimensions.* — Nous étudions le mouvement d'un point matériel dans un plan, la force qui sollicite ce point dans le plan étant constante en grandeur et variant pour la direction au hasard, toutes les directions ayant égale vraisemblance.

Le mouvement du point considéré M peut être rapporté à deux axes coordonnés Ox, Oy; l'origine O des coordonnées étant la position occupée par le point à l'origine du temps.

Dire que la direction de la force varie constamment au hasard revient à dire que la probabilité pour qu'à un instant quelconque elle fasse un angle θ avec l'axe des x est $\frac{d\theta}{2\pi}$.

23. Problème relatif aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit animé d'une vitesse dont les composantes sont* X *et* Y ?

On doit supposer que trois joueurs A, B, C perdent, à chaque instant, des sommes égales aux accroissements de X, Y et $(-X-Y)$ à cet instant; la probabilité cherchée est la probabilité pour que A perde la somme X et B, la somme Y en t parties.

Le jeu étant équitable, cette probabilité est donnée par la formule rappelée au n° 18

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 X^2+\varphi_1 Y^2-2\chi XY}{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}\,dX\,dY.$$

En employant le même raisonnement qu'au n° 1, on voit immédiatement que χ est nul par raison de symétrie et que $\varphi_1=\varphi_2=\alpha^2 t$.

La probabilité cherchée est donc

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{\alpha^2 t}}}{\pi\alpha^2 t}\,dX\,dY.$$

La probabilité pour que la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{2v\,e^{-\frac{v^2}{\alpha^2 t}}}{\alpha^2 t}\,dv.$$

La vitesse croît, dans l'ensemble, proportionnellement à la racine carrée du temps.

24. Problème relatif aux positions. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une situation donnée?*

Il s'agit de calculer la probabilité pour que le point M ait pour coordonnées x, y à l'époque t.

Comme dans le cas d'un espace à une dimension, nous décomposerons l'action de la force en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2dt$), ($2dt$, $3dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt et sous l'action de la force, le point M a parcouru une distance $\alpha\,dt$ et il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que ce déplacement fasse un angle θ avec l'axe des x.

En vertu de l'inertie, ce mouvement se continue jusqu'à l'époque t faisant parcourir au point une distance αt dans une direction quelconque.

Considérons le second intervalle de temps (compris entre dt et $2dt$). Au bout de cet intervalle, la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un second déplacement $\alpha\,dt$ indépendant du premier et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point une distance $\alpha(t - dt)$.

Pendant l'intervalle élémentaire correspondant au temps τ, la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un déplacement $\alpha\,dt$ indépendant des précédents et qui, en vertu du principe de l'inertie, se perpétuera jusqu'à l'époque t, faisant parcourir au point une distance $\alpha(t - \tau)$.

Le point matériel aura finalement pour abscisse à l'époque t la somme des projections sur l'axe des x des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour abscisse x et pour ordonnée y est la probabilité pour que les sommes des projections des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires aient respectivement pour valeurs x et y.

Supposons maintenant que trois joueurs A, B, C jouent aux conditions suivantes : A la partie d'ordre τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x, le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y ; le joueur C gagne la somme des pertes de A et de B.

La probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y est la probabilité pour que les sommes des projections considérées soient x et y ou pour que les joueurs A et B perdent respectivement les sommes x et y en t parties.

Le jeu étant équitable, la probabilité cherchée est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{\varphi_2 x^2+\varphi_1 y^2-2\chi xy}{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}}{\pi\sqrt{\varphi_1\varphi_2-\chi^2}}\,dx\,dy.$$

Pour obtenir φ_1 (égal à φ_2 par raison de symétrie), on doit former le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A pour la partie d'ordre τ et intégrer ensuite entre $\tau=0$ et $\tau=t$.

Soient ξ et ζ les projections de la longueur $\alpha(t-\tau)$ sur les axes, c'est-à-dire les pertes de A et de B à la partie d'ordre τ ; on a

$$\xi^2+\zeta^2=\alpha^2(t-\tau)^2,$$

ou, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\mathrm{VM}\,\xi^2+\mathrm{VM}\,\zeta^2=\alpha^2(t-\tau)^2.$$

Ces valeurs moyennes étant égales par raison de symétrie, on a

$$\mathrm{VM}\,\xi^2=\mathrm{VM}\,\zeta^2=\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}.$$

La valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A à la partie d'ordre τ est donc $\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}$, on en déduit

$$\varphi_1 = \int_0^t 2\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{2}\,d\tau = \frac{\alpha^2 t^3}{3}.$$

Pour obtenir χ, on doit former le double de la valeur moyenne du produit $\xi\zeta$ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$. Or la valeur moyenne de $\xi\zeta$ est nulle car, à chaque valeur positive de ce produit, correspond une valeur négative de même probabilité, donc χ est nul.

Remplaçant dans la formule précédente, φ_1 et φ_2 par $\frac{\alpha^2 t^3}{3}$ et χ par zéro, on obtient *la probabilité pour que le point matériel ait pour coordonnées x et y à l'époque t.*

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}}{\pi\frac{\alpha^2 t^3}{3}}\,dx\,dy.$$

On doit remarquer que le jeu considéré n'est nullement l'image du mouvement réel du point M pendant le temps t; il fait seulement connaître l'expression de la probabilité à l'époque t.

25. *La probabilité pour que, au bout du temps t, le point* M *soit à une distance r de l'origine est*

$$\frac{2re^{-\frac{r^2}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}}}{\frac{\alpha^2 t^3}{3}}\,dr.$$

Les écarts de situation croissent proportionnellement à la puissance $\frac{3}{2}$ du temps.

26. Problème relatif aux situations et aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée (x, y) et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X *et* Y ?

Imaginons cinq joueurs A, B, C, D, E et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

Le jeu de A et B est le jeu fictif qui a été défini au n° 24. A la partie d'ordre τ ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x et le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y.

Si l'on désigne par x' la perte totale de A et par y' la perte totale de B, x' et y' sont différents des coordonnées x et y du point M, sauf pour l'époque t.

Lorsqu'il s'agira de probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x' par x et y' par y, mais s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné.

A chaque instant, les joueurs C et D perdent respectivement des sommes égales aux projections sur les axes de l'accroissement de la vitesse à cet instant.

Le joueur E ferme le jeu, il perd, à chaque instant, la somme des gains de ses adversaires; sa perte totale est $u = -x' - y' - X - Y$.

Le jeu est équitable et les parties successives sont indépendantes; la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D perdent respectivement les sommes x', y', X, Y est exprimée par la formule générale de mon Mémoire : *Sur les probabilités à plusieurs variables*, il suffit de changer les notations et de poser

$$x_1 = x', \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = X, \qquad x_4 = Y.$$

Pour appliquer la formule, on doit, en premier lieu, calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & -\chi_{1,4} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \chi_{2,4} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & -\chi_{3,4} \\ -\chi_{4,1} & \chi_{4,2} & -\chi_{4,3} & \varphi_4 \end{vmatrix}.$$

D'après le résultat obtenu au n° 24, on a

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\alpha^2 t^3}{3};$$

on a de même, d'après le n° 23,

$$\varphi_3 = \varphi_4 = \alpha^2 t.$$

Il reste à calculer les fonctions χ. On a d'abord

$$\chi_{1,2} = \chi_{1,4} = \chi_{2,3} = \chi_{3,4} = 0;$$

considérons par exemple $\chi_{2,3}$: cette quantité s'obtient en prenant le double de la variation moyenne de $y'X$ pour la partie d'ordre τ et en intégrant le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, pour toute partie, ou pour tout intervalle élémentaire dt, la valeur moyenne de la variation du produit $y'X$ est nulle car à toute valeur positive de cette variation correspond une valeur négative de même probabilité; on a donc $\chi_{2,3} = 0$.

Nous allons maintenant calculer $\chi_{1,3}$ et $\chi_{2,4}$. Supposons que, à la partie d'ordre τ, les quantités x', y', X, Y aient pour valeurs x'_1, y'_1, X_1, Y_1.

Pour former $\chi_{1,3}$, on doit calculer le double de la valeur moyenne de la variation du produit $x'_1 X_1$ relatif à la partie d'ordre τ et intégrer le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, à la partie d'ordre τ, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que x'_1 augmente de $\alpha \cos\theta (t - \tau)$ et X_1 de $\alpha\cos\theta$; il y a donc probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le produit $x'_1 X_1$ augmente de la quantité

$$[x'_1 + \alpha\cos\theta(t-\tau)][X_1 + \alpha\cos\theta] - x'_1 X_1,$$

c'est-à-dire de la quantité

$$x'_1 \alpha\cos\theta + X_1 \alpha \cos\theta (t - \tau) + \alpha^2 \cos^2\theta (t - \tau).$$

Pour calculer la variation moyenne de $x'_1 X_1$, il faut multiplier l'expression précédente par $\frac{d\theta}{2\pi}$ et intégrer entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi$; le résultat est $\frac{\alpha^2}{2}(t - \tau)$.

Pour obtenir $\chi_{1,3}$, on doit multiplier cette dernière quantité par 2 et intégrer entre les limites $\tau = 0$ et $\tau = t$; on a donc finalement

$$\chi_{1,3} = \chi_{2,4} = \frac{\alpha^2 t^2}{2},$$

et le déterminant a pour valeur $\frac{\alpha^8 t^8}{144}$.

En se reportant à la formule du Mémoire cité précédemment, on obtient l'expression de la probabilité pour que les joueurs A, B, C, D perdent respectivement les sommes x', y', X, Y en t parties; cette expression est

$$\frac{e^{-\frac{(x'^2+y'^2)-t(\mathrm{X}x'+\mathrm{Y}y')+\frac{t^2}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{12}}}}{\frac{\pi^2}{12}\alpha^4 t^4}\,dx'\,dy'\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}.$$

A l'époque t, $x' = x$, $y' = y$ et, d'après la définition de ces quantités, les probabilités qui leur sont relatives sont égales. Il en résulte que : *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x et y et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X *et* Y *est*

$$\frac{e^{-\frac{(x^2+y^2)-t(\mathrm{X}x+\mathrm{Y}y)+\frac{t^2}{3}(\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{12}}}}{\frac{\pi^2}{12}\alpha^4 t^4}\,dx\,dy\,d\mathrm{X}\,d\mathrm{Y}.$$

27. Cas d'une résistance de milieu. — *On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que ses composantes sont mkX et mkY, m étant la masse du point. Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait, à l'époque t, une vitesse dont les composantes sont* X *et* Y?

Supposons que trois joueurs H, K, L perdent, à chaque instant, des sommes respectivement égales aux accroissements de X, Y, $-\mathrm{X}-\mathrm{Y}$ pendant cet instant et que, à l'époque t, les composantes de la vitesse soient X et Y; nous allons étudier les variations de ces quantités dans l'intervalle de temps élémentaire suivant.

Pour cette partie, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le joueur H perde la somme $\alpha\cos\theta - kX$. Son espérance mathématique pour cette partie est donc

$$-\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}(\alpha\cos\theta - kX) = kX,$$

elle est proportionnelle à la perte actuelle X.

La fonction d'instabilité du jeu de H pour la même partie est

$$2\left[\int_0^{2\pi}(\alpha\cos\theta - kX)^2\frac{d\theta}{2\pi} - k^2X^2\right] = \alpha^2.$$

Cette quantité est constante.

On serait conduit au même résultat pour le jeu de K; l'espérance mathématique serait kY et la fonction d'instabilité, α^2.

Il faut maintenant étudier le jeu de L.

Pour la partie considérée, il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que L perde la somme

$$-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY;$$

son espérance mathématique pour cette partie est donc

$$-\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}(-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY) = k(-X - Y);$$

elle est proportionnelle à la perte actuelle $(-X - Y)$.

La fonction d'instabilité du jeu de L pour cette partie est de même

$$2\left[\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}(-\alpha\cos\theta + kX - \alpha\sin\theta + kY)^2 - k^2(-X - Y)^2\right] = 2\alpha^2,$$

elle est constante.

Les espérances étant proportionnelles aux pertes actuelles et les fonctions d'instabilité étant constantes il suffit, pour obtenir la solution du problème proposé, d'appliquer la formule du n° 70 de mon Mémoire : *Sur les probabilités continues*.

La probabilité pour que, en t parties, le joueur H ait perdu la somme X et le joueur K, la somme Y, c'est-à-dire la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour composantes de vitesse X, Y, est

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}}}{\pi\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}\,dX\,dY.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{2v\,e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}}}{\frac{\alpha^2}{2k}(1-e^{-2kt})}\,dv.$$

Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{2v\,e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{2k}}}}{\frac{\alpha^2}{2k}}\,dv.$$

La théorie des probabilités connexes à laquelle nous avons été ramenés nous permettraient de résoudre les mêmes questions en supposant que la résistance est égale au produit de la vitesse par une fonction arbitraire du temps.

Espace à trois dimensions.

28. *Espace à trois dimensions.* — Nous étudions le mouvement d'un point matériel sollicité par une force dont la grandeur est constante et dont la direction varie au hasard, toutes les directions ayant égale vraisemblance.

Le mouvement du point considéré M peut être rapporté à trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, la position initiale du point étant prise pour origine des coordonnées.

29. Problème relatif aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel soit animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z ?

On doit supposer que quatre joueurs A, B, C, D perdent, à chaque instant, des sommes égales aux accroissements de X, Y, Z, $(-X-Y-Z)$ à cet instant; la probabilité cherchée est la probabilité pour que A perde la somme X; B, la somme Y et C, la somme Z en t parties.

Le jeu est équitable et d'ailleurs identique à celui qui a été étudié au n° 1, il suffit de remplacer v par α.

La probabilité cherchée est

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\frac{2\alpha^2 t}{3}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dX\,dY\,dZ.$$

La probabilité pour que, au bout du temps t, le point M ait une vitesse v est

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{2\alpha^2 t}{3}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv.$$

30. *Analogie avec le mouvement de la chaleur.* — L'équation du mouvement de la probabilité dans un espace à trois dimensions (consulter mon Mémoire : *Sur les probabilités à plusieurs variables*, p. 346)

$$\frac{\varphi'_1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\varphi'_2}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\varphi'_3}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}+\frac{\chi'_{1,2}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}+\frac{\chi'_{1,3}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}+\frac{\chi'_{2,3}}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial f}{\partial t},$$

est plus complexe que celle du mouvement de la chaleur, mais elle s'y réduit dans un cas très particulier lorsque, l'uniformité étant supposée, on a en même temps

$$\chi_{1,2}=0,\qquad \chi_{1,3}=0,\qquad \chi_{2,3}=0,$$
$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_3,$$

l'équation du mouvement des probabilités n'est autre alors que l'équation de Fourier

$$\frac{\varphi'_1}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial f}{\partial t}.$$

C'est précisément ce cas particulier que nous avons rencontré dans les problèmes traités aux nos 1 et 29.

Ces problèmes sont analogues à celui qui consiste à déterminer la température à l'époque t du point x, y, z d'un espace indéfini quand, à l'origine du temps, il s'est produit à l'origine des coordonnées une source instantanée de chaleur.

Pareillement, les problèmes traités aux nos 5 et 23 sont analogues à celui qui consiste à déterminer la distribution des températures à l'époque t dans un espace indéfini à deux dimensions lorsque, à l'origine du temps, il s'est produit à l'origine des coordonnées une source instantanée de chaleur.

31. Problème relatif aux positions. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une situation donnée?*

Il s'agit de calculer la probabilité pour que le point M ait pour coordonnées x, y, z à l'époque t.

Comme dans les cas précédents, nous pouvons décomposer l'action de la force en ses actions successives pendant les intervalles de temps (zéro, dt), (dt, $2\,dt$), ($2\,dt$, $3\,dt$), ...

Au bout du premier intervalle dt, sous l'action de la force, le point M a parcouru une distance $\alpha\,dt$ dans une direction quelconque et ce mouvement se perpétue, d'après le principe de l'inertie, avec la même vitesse jusqu'à l'époque t.

Le point parcourt donc une distance αt dans la première direction qui lui est imprimée,

Pendant le second intervalle de temps (compris entre dt et $2\,dt$), la force aura communiqué au point matériel, dans une direction quelconque, un nouveau déplacement $\alpha\,dt$ indépendant du premier et, en vertu de l'inertie, ce second mouvement se perpétuera jusqu'à l'époque t. Le second mouvement fera donc parcourir au point M une distance $\alpha(t - dt)$.

A l'instant τ, la force communiquera au point matériel, dans une direction quelconque, un mouvement indépendant des précédents qui se perpétuera jusqu'à l'époque t et qui fera parcourir au point M la distance $\alpha(t-\tau)$.

La coordonnée x du point M à l'époque t sera la somme des projections sur l'axe des x des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires.

La probabilité pour que, finalement, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z est la probabilité pour que la somme des projections des distances correspondant à chacun des intervalles élémentaires aient respectivement pour valeurs x, y, z.

Supposons maintenant que quatre joueurs A, B, C, D jouent aux conditions suivantes : A la partie d'ordre τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x. Le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y. Le joueur C perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des z. Le joueur D gagne la somme des pertes de A, B, C.

La probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z est la probabilité pour que les sommes des projections considérées soient x, y, z ou pour que les joueurs A, B, C perdent respectivement les sommes x, y, z en t parties.

Le jeu étant équitable et admettant l'indépendance, la probabilité cherchée est exprimée par la formule du n° 1, il suffit de calculer les fonctions φ et χ d'après les données du problème.

Pour obtenir φ_1 (égal à φ_2 et à φ_3 par raison de symétrie), on doit former le double de la valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A pour la partie d'ordre τ et intégrer ensuite entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Soient ξ, η, ζ les projections de la longueur $\alpha(t-\tau)$ sur les axes, c'est-à-dire les pertes de A, B, C à la partie d'ordre τ ; on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2,$$

ou, en désignant par VM la valeur moyenne,

$$\mathrm{VM}\,\xi^2 + \mathrm{VM}\,\eta^2 + \mathrm{VM}\,\zeta^2 = \alpha^2(t-\tau)^2.$$

Ces valeurs moyennes étant égales par raison de symétrie, on a

$$\mathrm{VM}\,\xi^2 = \mathrm{VM}\,\eta^2 = \mathrm{VM}\,\zeta^2 = \frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}.$$

La valeur moyenne des carrés des pertes du joueur A à la partie d'ordre τ est donc $\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}$, on en déduit

$$\varphi_1 = \int_0^t 2\frac{\alpha^2(t-\tau)^2}{3}\,d\tau = \frac{2\alpha^2 t^3}{9}.$$

Pour obtenir $\chi_{1,2}$, par exemple, on doit former le double de la valeur moyenne de $\xi\eta$ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$. Or la valeur moyenne de $\xi\eta$ est nulle, car à chaque valeur positive de ce produit correspond une valeur négative de même probabilité, donc $\chi_{1,2}$ est nul.

Remplaçant, dans la formule du n° 1, les fonctions φ par $\frac{2\alpha^2 t^3}{9}$ et les fonctions χ par zéro, on obtient *la probabilité pour que le point matériel ait pour coordonnées x, y, z à l'époque t* :

$$\frac{e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}}}{\pi\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t^3}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz.$$

La probabilité pour que, au bout du temps t, le point M soit à une distance r de son point de départ est

$$\frac{4r^2 e^{-\frac{r^2}{\frac{2\alpha^2 t^3}{9}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{2\alpha^2 t^3}{9}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dr.$$

32. Problème relatif aux situations et aux vitesses. — *Quelle est la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel occupe une position donnée (x, y, z) et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z ?

Imaginons sept joueurs A, B, C, D, E, F, G et faisons correspondre chaque partie de leur jeu supposé continu à chacun des éléments de temps compris entre zéro et t.

Le jeu de A, de B et de C est le jeu fictif défini au n° 31. A la partie d'ordre τ ou, si l'on veut, à l'instant τ, le joueur A perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des x, le joueur B perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des y et le joueur C perd une somme égale à la projection de la distance $\alpha(t-\tau)$ sur l'axe des z.

Si l'on désigne par x', y', z' les pertes totales de A, B, C, ces quantités sont différentes des coordonnées x, y, z du point M sauf pour l'époque t.

Lorsqu'il s'agira des probabilités relatives à l'époque t, nous pourrons remplacer x', y', z' par x, y, z, mais s'il s'agissait d'une autre époque, la substitution conduirait à un résultat erroné.

A chaque instant les joueurs D, E, F perdent respectivement des sommes égales aux projections sur les axes de l'accroissement de la vitesse à cet instant.

Le joueur G ferme le jeu, il perd, à chaque instant, la somme des gains de ses adversaires, sa perte totale est $u = -x'-y'-z'-X-Y-Z$.

Le jeu étant équitable et les parties successives étant indépendantes, la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D, E, F perdent respectivement les sommes x', y', z', X, Y, Z est exprimée par la formule de la page 348 de mon Mémoire : *Sur les probabilités à plusieurs variables;* il suffit de changer les notations et de poser

$$x_1 = x', \qquad x_2 = y', \qquad x_3 = z', \qquad x_4 = X, \qquad x_5 = Y, \qquad x_6 = Z.$$

Pour appliquer la formule, on doit d'abord considérer le déterminant

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & -\chi_{1,2} & \chi_{1,3} & -\chi_{1,4} & \chi_{1,5} & -\chi_{1,6} \\ -\chi_{2,1} & \varphi_2 & -\chi_{2,3} & \chi_{2,4} & -\chi_{2,5} & \chi_{2,6} \\ \chi_{3,1} & -\chi_{3,2} & \varphi_3 & -\chi_{3,4} & \chi_{3,5} & -\chi_{3,6} \\ -\chi_{4,1} & \chi_{4,2} & -\chi_{4,3} & \varphi_4 & -\chi_{4,5} & \chi_{4,6} \\ \chi_{5,1} & -\chi_{5,2} & \chi_{5,3} & -\chi_{5,4} & \varphi_5 & -\chi_{5,6} \\ -\chi_{6,1} & \chi_{6,2} & -\chi_{6,3} & \chi_{6,4} & -\chi_{6,5} & \varphi_6 \end{vmatrix}.$$

On a, d'après le résultat obtenu au n° 31,

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\alpha^2 t^3}{9},$$

et, d'après le nº 29,

$$\varphi_4 = \varphi_5 = \varphi_6 = \frac{2\alpha^2 t}{3}.$$

Il reste à calculer les fonctions χ.

Les fonctions χ telles que $\chi_{1,5}$ qui correspondent à une quantité x' relative à un axe et à une composante de la vitesse suivant un autre axe sont nulles. Considérons, par exemple, $\chi_{1,5}$; cette quantité s'obtient en prenant le double de la variation moyenne de $x'Y$ pour la partie d'ordre τ et en intégrant le résultat entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Or, pour toute partie ou pour tout intervalle élémentaire dt, la valeur moyenne de la variation du produit $x'Y$ est nulle car, à toute valeur positive de cette variation, correspond une valeur négative de même probabilité; on a donc $\chi_{1,5} = 0$.

Les fonctions telles que $\chi_{1,2}$ relatives à deux quantités de même nature x', y' ou telles que $\chi_{4,5}$ relatives à deux quantités de même nature X, Y sont nulles, comme nous l'avons vu.

Il faut maintenant calculer les fonctions χ telles que $\chi_{1,4}$ qui correspondent à une quantité x' suivant un axe et à une composante de la vitesse X suivant le même axe.

Supposons que, à la partie d'ordre τ, les quantités x', y', z', X, Y, Z aient pour valeurs x'_1, y'_1, z'_1, X_1, Y_1, Z_1.

Pour former $\chi_{1,4}$, on doit calculer le double de la valeur moyenne de la variation du produit $x'_1 X_1$ à la partie d'ordre τ et intégrer entre $\tau = 0$ et $\tau = t$.

Il résulte de l'égale vraisemblance de toutes les directions que la probabilité pour que, dans un intervalle élémentaire de temps, la projection de la vitesse sur l'axe des x s'accroisse de la quantité λ (nécessairement comprise entre $-\alpha$ et $+\alpha$) est $\frac{d\lambda}{2\alpha}$, c'est-à-dire que toutes les valeurs de cet accroissement entre $\pm\alpha$ ont égale vraisemblance.

Si, à la partie d'ordre τ, la composante X augmente de la quantité λ, x' augmente de la quantité $\lambda(t-\tau)$.

Il y a donc, à la partie d'ordre τ, probabilité $\frac{d\lambda}{2\alpha}$ pour que le produit $x'_1 X_1$ augmente de la quantité

$$[x'_1 + \lambda(t-\tau)](X_1 + \lambda) - x'_1 X_1.$$

c'est-à-dire de la quantité

$$\lambda^2(t-\tau)+\lambda[X_1(t-\tau)+x'_1].$$

Pour calculer la variation moyenne de $x'_1 X_1$, on doit multiplier l'expression précédente par $\frac{d\lambda}{2\alpha}$ et intégrer entre les limites $\lambda=-\alpha$ et $\lambda=+\alpha$, le résultat est

$$\frac{\alpha^2}{3}(t-\tau)\,d\tau.$$

Pour obtenir $\chi_{1,4}$, on doit multiplier cette dernière quantité par 2 et intégrer entre les limites $\tau=0$ et $\tau=t$; on a donc finalement

$$\chi_{1,4}=\chi_{2,5}=\chi_{3,6}=\frac{\alpha^2 t^2}{3}.$$

La valeur du déterminant est $\frac{\alpha^{12} t^{12}}{3^9}$.

En se reportant à la formule générale et en y substituant les valeurs trouvées pour les fonctions φ et χ on obtient la probabilité pour que, en t parties, les joueurs A, B, C, D, E, F perdent respectivement les sommes x', y', z', X, Y, Z.

A l'époque t : $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$ et, d'après la définition de ces quantités, les probabilités qui leur sont relatives sont égales, de sorte que la probabilité pour que les joueurs A, B, C, D, E, F perdent les sommes x', y', z', X, Y, Z en t parties est *la probabilité pour que, à l'époque t, le point matériel ait pour coordonnées x, y, z et pour qu'il soit, de plus, animé d'une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z; cette probabilité est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{(x^2+y^2+z^2)-t(Xx+Yy+Zz)+\frac{t^2}{3}(X^2+Y^2+Z^2)}{\frac{\alpha^2 t^3}{18}}}}{\pi^3\frac{\alpha^6 t^6}{(3\sqrt{3})^3}}\,dx\,dy\,dz\,dX\,dY\,dZ.$$

33. Cas d'une résistance de milieu. — *On suppose que la résistance est proportionnelle à la vitesse et que ses composantes sont mkX, mkY, mkZ, m étant la masse du point. Quelle est la probabilité pour que le point matériel ait, à l'époque t, une vitesse dont les composantes sont* X, Y, Z?

Il faut raisonner comme précédemment en assimilant la question posée à un problème relatif à un jeu; on est alors ramené aux probabilités connexes du premier genre et la probabilité demandée est exprimée par la formule

$$\frac{e^{-\frac{X^2+Y^2+Z^2}{\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})}}}{\pi\sqrt{\pi}\left[\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})\right]^{\frac{3}{2}}}\,dX\,dY\,dZ.$$

La probabilité pour que, à l'époque t, la vitesse ait une valeur donnée v est

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})}}}{\sqrt{\pi}\left[\frac{\alpha^2}{3k}(1-e^{-2kt})\right]^{\frac{3}{2}}}\,dv.$$

Lorsque t croît indéfiniment, la distribution des probabilités tend vers la loi finale exprimée par la formule

$$\frac{4v^2 e^{-\frac{v^2}{\frac{\alpha^2}{3k}}}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\alpha^2}{3k}\right)^{\frac{3}{2}}}\,dv.$$

Mécanique du corps solide.

34. Relativement à la mécanique des systèmes, nous étudierons seulement le cas d'un solide plan mobile autour d'un de ses points qui est fixe; un certain nombre de forces dont la direction varie au hasard agissant en des points donnés du solide.

Celui-ci étant initialement animé d'une vitesse angulaire ω_0, quelle est la probabilité pour qu'il devienne immobile pour la première fois à l'époque t?

Imaginons un joueur II qui, dans chaque élément de temps, gagnerait une somme égale à l'augmentation de la vitesse angulaire ou perdrait une somme égale à la diminution de cette vitesse pendant cet élément de temps; le problème proposé se ramène immédiatement au suivant :

Un joueur A possède la fortune ω_0, quelle est la probabilité pour qu'il soit ruiné en jouant exactement t parties ?

C'est un problème de probabilités du second genre qui a été résolu dans le troisième Chapitre de mon Mémoire : *Sur les probabilités continues*.

Toutes les directions de toutes les forces ont égale vraisemblance, c'est ce que nous entendons par le terme de forces variant au hasard.

Dans ces conditions, une augmentation de vitesse angulaire à un instant quelconque a même probabilité qu'une diminution de vitesse égale et le jeu de H est équitable; il suffit alors d'appliquer la formule du n° 28 du Mémoire cité.

La probabilité cherchée est exprimée par la formule

$$\frac{\omega_0 e^{-\frac{\omega_0^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\, t\sqrt{t\varphi_1}}\, dt$$

dans le cas le plus simple où le couple dû au hasard est constant et, plus généralement, par la formule

$$\frac{\omega_0 \varphi'(t) e^{-\frac{\omega_0^2}{\varphi(t)}}}{\sqrt{\pi}\, \varphi(t)\sqrt{\varphi(t)}}\, dt,$$

lorsque le couple varie suivant une fonction donnée du temps.

La valeur du couple se déduit des grandeurs données des forces qui agissent sur chaque point du solide.

Lorsque la fonction $\varphi(t)$ est arbitraire (elle doit être nécessairement positive et croissante), les résultats que l'on peut déduire de l'expression précédente dépendent de la forme de cette fonction; le cas le plus simple, qui correspond à la première formule, conduit à des résultats intéressants.

Le solide finira par s'arrêter car, si l'on intègre l'expression de la probabilité entre $t = 0$ et $t = \infty$, on trouve l'unité pour valeur de l'intégrale, l'arrêt se produira donc nécessairement.

L'époque la plus probable de l'arrêt est

$$t = \frac{2\omega_0^2}{3\varphi_1}.$$

L'époque probable de l'arrêt correspond à la durée qui a autant de chances d'être ou de ne pas être dépassée, cette époque probable est donnée par la formule $t = \frac{4,4\,\omega_0^2}{\varphi_1}$.

L'époque moyenne de l'arrêt est, par définition, l'espérance mathématique d'un joueur K qui devrait toucher une somme proportionnelle au temps que met le solide pour s'immobiliser. Cette espérance est infinie.

35. *Cas d'un frottement.* — Nous avons supposé que le mouvement de rotation se produisait sans frottement; cette hypothèse n'est pas nécessaire à la condition d'admettre que les forces agissantes soient constantes en grandeur et que le point fixe soit un centre de symétrie pour le solide, de sorte que le frottement soit dû uniquement aux forces agissantes.

Le jeu de H auquel nous pouvons toujours ramener le problème proposé quelles que soient les conditions admises n'est plus équitable, mais il est uniforme et il suffit de lui appliquer l'analyse développée au n° 31 de mon Mémoire : *Sur les probabilités continues.*

La probabilité pour que le solide soit immobilisé pour la première fois à l'époque t est

$$\frac{\omega_0 e^{-\frac{(t\psi_1+\omega_0)^2}{t\varphi_1}}}{\sqrt{\pi}\,t\sqrt{t\varphi_1}}\,dt.$$

Le solide est soumis à l'action de deux couples : l'un, dû au hasard, agit indifféremment dans les deux sens; l'autre, dû au frottement, est toujours retardateur. Du fait de ce second couple le jeu de H est désavantageux.

ψ_1 (qui est nécessairement négatif), est proportionnel à la valeur moyenne du couple dû au frottement, c'est-à-dire proportionnel à la résultante de toutes les forces pendant l'élément de temps dt.

φ_1 dépend du couple dû au hasard et du couple dû au frottement pendant l'élément dt.

La probabilité pour que l'immobilité se produise pour la première fois avant l'époque t est

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{\omega_0+t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda + \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{4\omega_0\psi_1}{\varphi_1}}\int_{\frac{\omega_0-t\psi_1}{\sqrt{t\varphi_1}}}^{\infty} e^{-\lambda^2}\,d\lambda.$$

L'immobilité finira nécessairement par se produire puisqu'elle se produirait même si le frottement n'existait pas.

La valeur moyenne du temps au bout duquel se produira pour la première fois l'immobilité n'est plus infinie comme dans le cas étudié précédemment, elle a pour expression $-\frac{\omega_0}{\psi_1}$.

Pour montrer comment on peut calculer ψ_1 et φ_1, nous allons considérer le cas très simple où une seule force F dont la direction varie au hasard est appliquée au point A dont la distance à l'axe O est r.

La pression exercée sur l'axe est constamment égale à F, le couple dû au frottement est donc proportionnel à F (soit par exemple aF son moment) et ψ_1 est proportionnel à aF.

Il y a probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que F fasse, à un instant quelconque, un angle θ avec OA et par suite pour que le couple dû au hasard ait pour moment $\mathrm{F}r\sin\theta$.

Il y a donc, à chaque instant, probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le couple résultant ait pour moment $\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}$.

Lorsque le couple résultant a un moment donné c, la vitesse de rotation du solide augmente de la quantité $\frac{c}{\mathrm{M}k^2}$, k étant le rayon de giration du solide relativement au point O et M sa masse.

Lorsque la vitesse de rotation augmente de la quantité $\frac{c}{\mathrm{M}k^2}$, le joueur A gagne la somme $\frac{c}{\mathrm{M}k^2}$.

Il y a donc, dans chaque élément de temps, probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ pour que le joueur II gagne la somme

$$\frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2};$$

ψ_1 est la valeur moyenne des gains de H dans un élément de temps; on a donc

$$\psi_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2} \frac{d\theta}{2\pi} = -\frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2};$$

φ_1 est, pour un élément de temps, le double de la valeur moyenne des carrés des gains et des pertes de H diminué du double du carré de la valeur moyenne des gains; on a donc

$$\varphi_1 = \int_0^{2\pi} 2\left[\left(\frac{\mathrm{F}r\sin\theta - a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}\right)^2 - \left(\frac{a\mathrm{F}}{\mathrm{M}k^2}\right)^2\right]\frac{d\theta}{2\pi} = \frac{\mathrm{F}^2 r^2}{(\mathrm{M}k^2)^2}.$$

36. Nous voyons, par ce qui précède, que les progrès de la mécanique du hasard doivent être intimement liés à ceux de la théorie des probabilités connexes; c'est cette dernière théorie qui nous a permis de traiter le problème du mouvement d'un point matériel dans un milieu résistant et, inversement, la recherche de la loi des espaces nous a conduits à une nouvelle classe de probabilités connexes que la théorie pure n'eût certainement pas fait connaître.

D'autres problèmes de la mécanique du hasard conduiraient à l'étude de nouvelles sortes de probabilités connexes : reprenons, par exemple, le cas du mouvement d'un solide plan autour d'un point fixe par rapport auquel il est symétrique : le solide part du repos, il est soumis à l'action de forces dépendant du hasard et à l'action du frottement de l'axe. Si l'on veut déterminer la probabilité pour que le solide ait une vitesse angulaire ω à l'époque t, on assimile, suivant notre méthode générale, le problème proposé à une question relative à un jeu. On suppose qu'un joueur H perde, à chaque instant, une somme égale à l'augmentation de la vitesse à cet instant; la probabilité d'une vitesse ω à l'époque t est la probabilité d'une perte ω en t parties.

Le frottement étant toujours retardateur, le jeu considéré est avantageux tant que le joueur perd, c'est-à-dire tant que le corps tourne dans un sens, il devient désavantageux quand la rotation se produit dans l'autre sens, c'est-à-dire quand le joueur gagne. La question proposée conduit ainsi à une nouvelle sorte de connexité.

Considérons toujours le même problème, mais supposons que le solide ne soit pas symétrique relativement à son axe ; le frottement dépendra alors des forces d'inertie, c'est-à-dire du carré de la vitesse. Nous serons ainsi conduits à étudier de nouvelles probabilités connexes telles que l'espérance élémentaire dépende du carré de la perte actuelle.

La mécanique du hasard conduit donc à la considération de nouvelles sortes de probabilités connexes.