ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SERGE BERNSTEIN

Sur les équations du calcul des variations

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 29 (1912), p. 431-485

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1912_3_29__431_0>

SUR LES

ÉQUATIONS DU CALCUL DES VARIATIONS

Par M. Serge BERNSTEIN.

Les principaux résultats du présent Mémoire ont été résumés dans trois Notes des *Comptes rendus* des 28 février, 4 juillet et 18 juillet 1910; il est donc inutile de les rappeler ici. Je veux seulement ajouter qu'un certain nombre des propositions de la première Partie avaient déjà été données en 1908 par M. Hadamard (¹). Mais la méthode que j'emploie diffère essentiellement de celle de M. Hadamard et des autres auteurs qui, après M. Hilbert, abordent directement le problème du calcul des variations en n'utilisant pas, ou presque pas, les équations différentielles classiques. Pour moi, c'est, au contraire, les équations différentielles qui occupent la place centrale; le calcul des variations n'est qu'une application importante de la théorie générale des équations du second ordre, dont l'étude se trouve seulement quelquefois simplifiée par les considérations du calcul des variations. Les deux points de vue me semblent également légitimes, et peut-être l'étude indirecte du problème du calcul des variations rendra-t-elle ce problème plus accessible par les méthodes directes.

(¹) J. Hadamard, *Sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées.*

PREMIÈRE PARTIE.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES DU CALCUL DES VARIATIONS.

CHAPITRE I.

CAS D'UNE SEULE ÉQUATION.

1. Nous verrons plus loin que les équations différentielles ordinaires du calcul des variations se présentent, le plus souvent, sous la forme

$$y_i'' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n') \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

où les f_i sont des fonctions, en général, continues pour toutes valeurs réelles des variables (sauf des valeurs particulières de $x, y_1, \ldots, y_n$) et qui restent inférieures en valeur absolue à $k(y_1'^2 + y_2'^2 + \ldots + y_n'^2)$, lorsque les y_i' croissent indéfiniment, k dépendant seulement de $x, y_1, \ldots, y_n$. Nous appellerons les équations (1) de cette nature *équations* (L). Un cas particulier important est celui où les f_i sont des polynomes du second degré par rapport aux y_i'; c'est la forme sous laquelle on peut mettre toujours les équations de mouvement de Lagrange. Ce cas a été étudié par M. Painlevé (¹) qui supposait, d'ailleurs, les fonctions f_i analytiques. Le résultat fondamental de cette étude est le suivant (²) :

Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ tendent vers des valeurs fixes $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0$, lorsque x tend vers x_1 et que tous les f_i sont réguliers pour ces valeurs de x, y_i, les dérivées y_i' tendent également vers des valeurs finies.

(¹) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*; 1897.

(²) *Loc. cit.*, p. 560.

Pour pouvoir appliquer dans la suite le théorème de M. Painlevé, il est nécessaire de le présenter sous une forme un peu différente : c'est ce que nous allons faire, en en donnant en même temps une nouvelle démonstration, basée sur la méthode des fonctions auxiliaires que j'ai souvent employée dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Étudions ici le cas d'une seule équation et, pour fixer les idées, supposons toujours cette équation analytique.

2. Théorème. — *Si y est une solution analytique bornée, pour $a_0 < x < b_0$, de l'équation*

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{2}$$

où $|f(x, y, y')| < Ay'^2 + B$, pour les valeurs considérées de x, y, la dérivée y' sera également bornée.

En effet, nous pouvons, sans restreindre la généralité, admettre que y s'annule pour $x = a_0$ et $x = b_0$.

Par hypothèse, on a

$$y'' > -Ay'^2 - B; \tag{3}$$

or, posons

$$y = -M + \frac{\log u}{2A},$$

où M est le maximum de $|y|$; donc

$$y' = \frac{u'}{2Au}, \qquad y'' = \frac{u''}{2Au} - \frac{u'^2}{2Au^2}.$$

L'inégalité (3) prend donc la forme

$$\frac{u''}{2Au} > \frac{u'^2}{4Au^2} - B,$$

et, puisque $u \geq 1$, il vient

$$u'' > -2ABu.$$

Il existera certainement un point b, où $y' = u' = 0$. Admettons que, *à gauche* de ce point, u' soit positif; alors on aura

$$u'u'' > -2ABuu'$$

et, en intégrant,

$$-u'^2(x) > -2AB[u^2(b) - u^2(x)],$$

ou

$$u'^2(x) < 2AB\,u^2(b)$$

et

$$y'^2(x) < \frac{B}{2A}\,\frac{u^2(b)}{u^2(x)} < \frac{B}{2A}\,e^{8AM}.$$

Si u' ou (ce qui revient au même) y' était négatif, on n'aurait qu'à remplacer y par $-y$. Le même raisonnement s'appliquera *à droite* de b. Donc, d'une façon générale,

$$(4)\qquad |y'| < \sqrt{\frac{B}{2A}}\,e^{4AM}.$$

Remarque. — On voit ainsi que si, x tendant vers a_0, y ne s'approche pas indéfiniment d'une valeur, qui fait croître f indéfiniment, et ne croît pas indéfiniment, il tendra vers une limite fixe, ainsi que sa dérivée. On voit de même que, si A et B restant finis, quelles que soient les valeurs finies de x, y, le point $x = a_0$ était un point d'indétermination pour y, l'équation $y = N$ aurait une infinité de solutions quel que soit N.

3. La propriété importante que nous venons de trouver des équations (L), dans lesquelles la croissance par rapport à y' du second membre n'est pas supérieure à 2, les distingue de toutes les autres équations du second ordre.

En effet, il est aisé de montrer que, *si la croissance de f par rapport à y' est supérieure à 2, il peut y avoir des solutions bornées dont la dérivée y' croît indéfiniment.*

Supposons, par exemple, que pour $y' > 0$ et assez grand, f puisse se mettre dans le voisinage de $x = x_0$, $y = 0$ sous la forme

$$f = y'^m[A(x, y) + \varepsilon] \qquad (A \gtrless 0),$$

où ε tend vers zéro, lorsque y' croît indéfiniment, et $m > 2$.

Si l'on considère x comme fonction de y, l'équation deviendra

$$(5)\qquad x'' = -x'^{\alpha}[A(x, y) + \varepsilon],$$

où $\alpha = 3 - m$, et ε tend vers zéro avec x' (pour $x' > 0$). Cette équation admet toujours une solution différente de la constante x_0 se réduisant pour $y = 0$ à x_0, et ayant sa dérivée x' nulle en ce point. Pour s'en convaincre, posons $(x')^{1-\alpha} = u$, après avoir remarqué que $1 - \alpha > 0$; l'équation (5) se réduira alors au système

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dy} = \dfrac{-1}{1-\alpha}[A(x, y) + \varepsilon], \\ \dfrac{dx}{dy} = u^{\frac{1}{1-\alpha}}. \end{cases}$$

Le système (5 *bis*) admet certainement au moins une solution [1] différente de $x = x_0$, $u = 0$, prenant ces valeurs initiales pour $y = 0$. La courbe qui correspond à cette solution aura ainsi une tangente parallèle à l'axe des y; y' croîtra donc indéfiniment quoique y est borné.

Je dis, de plus, que *si la croissance de f est supérieure à 2, il existera de tels points P et Q, qu'aucune trajectoire satisfaisant à l'équation ne pourra passer par ces deux points.*

En effet, soit A négatif, pour fixer les idées; nous concluons alors de l'équation (5) que les trajectoires tangentes en $y = y_0$ à la verticale $x = x_0$, ainsi que celles pour lesquelles $x' > 0$ est assez petit, tournent leurs concavités vers la droite. Toutes ces trajectoires commenceront donc par s'éloigner de la droite $x = x_0$, lorsque y croîtra; il y aura, par conséquent, sur la verticale $x = x_0 + \eta$ ($\eta > 0$), pour η suffisamment petit, des points où ne pénétrera aucune des trajectoires sortant de $P(x_0, y_0)$.

4. Revenons aux équations (L) et considérons l'ensemble de points (x, y) qui rendent infini l'un des coefficients A ou B du théorème 2. En entourant tous ces points de petits cercles et en isolant le point de l'infini par un cercle d'un rayon très grand, on obtient un domaine Ω (qui peut ne pas être connexe). Nous dirons qu'une trajectoire qui joint deux points A et B de Ω est régulière entre ces deux points, s'il

---

(1) *Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. II, vol. 3 : *Existence de l'intégrale générale*, par P. Painlevé. La solution sera certainement unique, lorsque $m \leqq 3$.

existe un domaine Ω_1 de même nature que Ω, tel que la trajectoire arrive de A en B sans sortir de Ω_1. Nous dirons, de plus, que la trajectoire est simple entre A et B, s'il est possible de fixer un nombre assez petit ε, tel que deux trajectoires pour lesquelles on a constamment $|y - y_1| < \varepsilon$, $|y' - y'_1| < \varepsilon$ ne se rencontrent pas simultanément à l'intérieur d'un cercle de rayon ρ aussi petit qu'on veut, décrit autour de A comme centre, et à l'intérieur d'un cercle de même rayon décrit autour de B; la trajectoire sera dite *multiple* dans le cas contraire (une trajectoire peut évidemment être simple entre deux points A et B, sans être simple entre deux points A_1 et B_1 compris entre les premiers). Ceci posé, nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soient ω et ω_1 deux domaines simplement connexes situés dans Ω, si toutes les trajectoires satisfaisant à une équation* (L)(¹) *qui vont de ω à ω_1 sont uniformément régulières et simples, le nombre de trajectoires qui joignent un point* A *de ω à un point* B *de ω_1 est le même, quels que soient les points* A *et* B *de ces domaines.*

Le mot *uniformément* exprime évidemment que toutes les trajectoires en question restent à l'intérieur d'un même domaine Ω_1.

Soient B et B_1 deux points de ω_1 qu'on pourra joindre par une ligne polygonale, dont les côtés seront parallèles aux axes, entièrement contenue dans ω_1. Admettons qu'il existe une trajectoire passant par A et B. Puisqu'elle est régulière, elle aura (à cause du théorème 2) une tangente bornée et, en particulier, la valeur de y' en A sera égale à un nombre fixe α_0. En vertu d'un théorème connu, on pourra fixer un nombre *déterminé* ε tel que, pour $|\alpha - \alpha_0| \leqq \varepsilon$ et pour $x_0 < x < x_1 + \varepsilon$ (en désignant par x_0, y_0 et x_1, y_1 les coordonnées de A et B), on puisse représenter la trajectoire AB et les trajectoires voisines passant par A, par l'équation

$$y = \varphi(x, \alpha), \tag{6}$$

où φ est une fonction continue de x et α (holomorphe, si f est supposée analytique). De plus, la trajectoire AB étant simple, φ est mono-

(¹) Pour simplifier les raisonnements on pourra supposer, dans la suite, la fonction f *analytique.*

tone par rapport à α, pour $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2<\rho^2$; cette dernière inégalité, d'ailleurs, peut toujours être supposée réalisée par le choix convenable de ε et de ρ. Ainsi, on aura

$$(7)\qquad \begin{cases} \varphi(x, \alpha_0+\varepsilon)<\varphi(x, \alpha_0), \\ \varphi(x, \alpha_0-\varepsilon)>\varphi(x, \alpha_0) \end{cases}$$

(si l'on suppose φ décroissant pour fixer les idées). Soit alors B le sommet voisin de B de la ligne polygonale BB_1. Je dis que sur le côté BB' il y aura un petit segment BC_1, dont tous les points seront rencontrés par des courbes de la famille (6). En effet, la droite BB' aura pour équation $x=x_1$ ou $y=y_1$; dans le premier cas, il s'agit de résoudre l'équation

$$y=\varphi(x_1, \alpha),$$

pour y voisin de y_1; dans le second cas, l'équation

$$y_1=\varphi(x, \alpha),$$

pour x voisin de x_1.

Dans le premier cas, le point C_1 aura évidemment pour ordonnée $\varphi(x_1, \alpha_0+\varepsilon)$ si, pour fixer les idées, on suppose B' plus bas que B. A partir de C_1, on pourra construire de la même façon un segment C_1C_2, tel qu'il soit rencontré par les trajectoires, dont la dérivée y' en A est comprise entre $\alpha_0+\varepsilon$ et $\alpha_0+2\varepsilon$, et ainsi de suite. On arrivera nécessairement au point B' en répétant un nombre limité de fois la même opération, car, autrement, cela prouverait qu'il existe des trajectoires allant de A en ω_1, dont la dérivée ne serait pas bornée.

Dans le second cas, l'équation $y_1=\varphi(x, \alpha)$ admettra une solution $\alpha(\alpha_0-\varepsilon<\alpha<\alpha_0+\varepsilon)$, pourvu que $|x-x_0|<\varepsilon<\rho$, car les inégalités (7) donnent

$$\varphi(x, \alpha_0+\varepsilon)-y_1<0, \qquad \varphi(x, \alpha_0-\varepsilon)-y_1>0.$$

Cette fois, la grandeur du segment BC_1 est égale au nombre déterminé ε; par conséquent, en répétant la même opération un nombre limité de fois, on arrivera à B'.

On passera ainsi d'un sommet de la ligne polygonale à un autre, jusqu'à ce qu'on arrive à B. Donc une trajectoire régulière AB se transformera, toujours par continuité, en une trajectoire régulière AB_1.

Il serait d'ailleurs impossible que deux trajectoires différentes, passant par A et B, conduisent à une même trajectoire passant par A et B_1, car cela signifierait que la trajectoire AB_1 n'est pas simple. On en conclut que le nombre des trajectoires passant par A et B est le même que celui des trajectoires qui passent par A_1 et B_1. C. Q. F. D.

5. Dans les applications qui vont suivre on supposera, en général, que le domaine Ω se réduit à un cercle de rayon aussi grand qu'on le veut, ce qui signifie que f n'a pas de singularités à distance finie. Nous dirons alors que l'équation (L) est *régulière, si toutes les trajectoires joignant deux points de Ω sont uniformément régulières*. (Il est évident que, malgré la régularité d'une trajectoire entre deux points, celle-ci peut devenir infinie après avoir dépassé ces points.) Si la même propriété a lieu dans un domaine déterminé ω seulement, on pourra aussi dire, pour abréger, que l'équation est régulière dans le domaine ω.

On appellera *classe d'un domaine* ω, par rapport à un point A, le nombre maximum de trajectoires régulières qu'on peut faire passer par A et par un point donné de ω; si ce nombre est fini, quels que soient ω et A, ce sera la classe de l'équation considérée.

En adoptant ces définitions, on déduit du théorème 4 que :

Par deux points donnés, on peut toujours faire passer une et une seule trajectoire régulière satisfaisant à une équation régulière donnée de première classe.

En effet, le nombre des trajectoires sera le même quels que soient A et B; ce nombre ne peut donc être différent de 1.

Pour reconnaître qu'une équation (L) est régulière, il suffira évidemment d'indiquer *a priori* une limite supérieure du module de la solution, quels que soient A et B.

6. *Application.* — Considérons l'équation

$$y'' = f(x, y, y'), \tag{8}$$

où f est fini pour x, y, y' finis et ne croît pas plus rapidement que y'^2 pour y' infini; *si* $f'_y > k > 0$, *il existe toujours une trajectoire unique* *passant par deux points fixes quelconques* (¹). En effet, la différence δ entre deux solutions de l'équation satisfait à une équation linéaire de la forme

$$\delta'' = A\delta' + B\delta, \tag{9}$$

où $B > 0$; on en conclut que δ ne peut pas avoir ni de maximum positif, ni de minimum négatif (la conclusion subsiste, même si B, c'est-à-dire f'_y, s'annule). Par conséquent, il ne passe jamais plus d'une trajectoire par deux points. D'autre part, on peut mettre (8) sous la forme

$$y'' = f(x, 0, y') + y f'_y(x, \theta y, y') \qquad (0 < \theta < 1);$$

donc, si y atteint son maximum positif M, on aura $y'' \leqq 0$, d'où

$$M \leqq \frac{-f(x, 0, 0)}{K} < \frac{L}{K},$$

et, de même, le minimum m satisfait à l'inégalité

$$m \geqq \frac{-f(x, 0, 0)}{K} > -\frac{L}{K},$$

si L est le maximum de $|f(x, 0, 0)|$ dans l'intervalle considéré.

Il est intéressant d'examiner le cas où f'_y peut s'annuler, où la seconde partie du petit raisonnement que nous venons de faire n'est plus valable. Dans ce cas, on verra facilement qu'on pourra donner une limite supérieure de $|y|$, si l'on sait qu'il existe une solution qui passe par deux points qui ont les mêmes abscisses que les points considérés, car il suffira d'envisager la différence entre la solution cherchée et la solution donnée, en se rappelant que le module de cette différence [à cause de (9)] ne peut avoir de maxima. Grâce à cette remarque, il sera, en général, facile de décider si le problème est possible. Il est d'ailleurs certain que les deux cas peuvent se présenter pour $f'_y = 0$. Considérons, par exemple, l'équation

$$y'' = 1 + y'^2$$

qui n'admet pas plus d'une solution passant par deux points fixes;

(¹) Je publie ici, pour la première fois, la démonstration de ces théorèmes que j'avais énoncés, en avril 1904, dans une Note des *Comptes rendus*.

son intégrale générale sera

$$y - y_0 = -\log\cos(x - x_0),$$

et l'on vérifie immédiatement que toutes les solutions passant par l'origine sont données par la formule

$$y = \log\frac{\cos x_0}{\cos(x - x_0)} = \log\frac{1}{\cos x - \alpha \sin x},$$

où α est la dérivée y' à l'origine. On voit qu'on pourra faire passer la trajectoire par n'importe quel second point, dont $|x| < \pi$; mais il sera impossible de la faire passer par un point où $|x| \geqq \pi$, car la valeur de α sera toujours déterminée sans ambiguïté, mais y cesse d'être fini si l'intervalle est égal ou supérieur à π.

Remarque. — Dans la Note que je viens de citer, j'ai donné également la proposition suivante, relative aux équations qui n'appartiennent pas à la classe (L), mais satisfont à la condition $\frac{\partial f}{\partial y} \geqq 0$:

Si l'on peut mener une trajectoire régulière par A *et* B_1 *ainsi que par* A *et* B_2, *les points* B_1 *et* B_2 *ayant les mêmes abscisses, il est également possible de mener une trajectoire* AB *si le point* B *a la même abscisse que* B_1 *et* B_2 *et l'ordonnée comprise entre les ordonnées de* B_1 *et* B_2.

La proposition est une conséquence de ce fait que la trajectoire AB, si elle existe, est nécessairement comprise entre AB_1 et AB_2 (c'est-à-dire, par exemple, $y_1 \leqq y \leqq y_2$) et, de plus, on a aussi

$$y'_1 \leqq y' \leqq y'_2,$$

aux points de mêmes abscisses, puisque chacune des différences entre deux solutions telle que $(y_2 - y)$ partant de la valeur zéro sera nécessairement monotone.

7. Le théorème du paragraphe 5 peut être généralisé d'une façon assez remarquable.

Théorème. — *Toutes les équations régulières sont nécessairement de classe finie et impaire dans un domaine fini quelconque* ω; *si* $2k + 1$ *est la classe d'un domaine* ω *par rapport à un point* A *de ce domaine, le domaine* ω

se décompose en des régions $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2k+1}$ (*séparées par des lignes conjuguées*), *telles qu'il passe un nombre i impair de trajectoires régulières par* A *et par un point quelconque de* ω_i. *Ainsi il passe toujours, par deux points donnés arbitrairement, au moins une trajectoire d'une équation régulière donnée.*

La remarque essentielle sur laquelle repose la démonstration est la suivante : puisque l'équation considérée est régulière, donc la famille des trajectoires passant par un point donné $A(x_0, y_0)$ aura pour équation

$$y = \varphi(x, \alpha),$$

où φ est une fonction analytique de x et α (α est la valeur initiale de la dérivée) qui reste holomorphe tant qu'elle est finie, et qui devient infinie ou tend vers une limite finie, lorsque x tend vers une valeur quelconque x_1. (Les points d'indétermination sont manifestement exclus, car au voisinage d'un point d'indétermination, la dérivée au moins ne serait pas bornée.)

La première conséquence qui en résulte est que le nombre de trajectoires passant par A et B ne peut différer du nombre de trajectoires passant par A et C que si, sur toute ligne joignant B à C, il existe des points D, où l'on a simultanément

$$y = \varphi(x, \alpha) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.$$

Il existera, en effet, un point D (ce point peut être confondu avec B ou C), tel que l'une au moins des trajectoires AD ne soit pas simple et, en ce point, on aura nécessairement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0.$$

Nous sommes ainsi amenés à considérer comme les seules frontières possibles entre les régions, où les nombres des trajectoires sont différents, les ensembles de points satisfaisant aux équations $y = \varphi(x, \alpha)$ et $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0$. La fonction φ étant holomorphe dans le voisinage de x, α, deux cas seulement sont logiquement possibles.

Il pourrait d'abord exister des valeurs isolées de x qui annulent $\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}$

quel que soit α, tant que φ reste holomorphe, et à chacune de ces valeurs de x correspondra alors une valeur bien déterminée de y; toutes les trajectoires correspondant à des valeurs de α d'un intervalle $(\alpha_1 < \alpha < \alpha_2)$ passeraient par ces points isolés; donc, α variant continûment, elles ne quitteraient ces points que pour s'en aller brusquement à l'infini, ce qui est impossible, puisque toutes les trajectoires passant par ces points sont uniformément régulières. Ce cas doit donc être exclu à cause de la régularité de l'équation : *les points conjugués isolés ne peuvent pas se présenter dans le cas des équations régulières*.

Nous devons donc admettre que l'équation analytique $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ définit, dans le voisinage de (x, α), x comme fonction holomorphe de α, car on ne peut avoir en même temps $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha\,\partial x} = 0$ $\left(\text{puisque } \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\right.$ satisfait à l'équation linéaire aux variations$\Big)$. Les équations $y = \varphi(x, \alpha)$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = 0$ définissent donc un arc de courbe analytique $x = \psi_1(\alpha)$, $y = \psi_2(\alpha)$. Cette courbe se prolongera indéfiniment et admettra, à distance finie, des points singuliers isolés (¹), qui ne pourront se présenter que lorsque $\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} = 0$.

Cela étant, si l'on traverse une telle courbe frontière en un point ordinaire $\left(\text{où } \frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} \gtrless 0\right)$, le nombre de trajectoires variera de 2; par conséquent, ce nombre variera de 2, si l'on traverse la frontière en n'importe quel point. Ainsi, tout le plan se décompose en une suite de régions telles que les classes de deux régions voisines (séparées par des lignes) diffèrent de 2.

Or on sait, d'après M. Picard (*Journal de Mathématiques*, 1890) que si les coordonnées (x_1, y) d'un point B diffèrent assez peu des coordonnées (x_0, y_0) du point A on peut obtenir, par la méthode des approximations successives, une trajectoire passant par ces deux

(¹) Ces points singuliers seront nécessairement des points de rebroussement; on vérifiera également que ces courbes, dont l'ensemble constitue la ligne dite *conjuguée du point* A, s'étendent à l'infini de part et d'autre, sans avoir de tangentes verticales; deux branches ne seront jamais tangentes entre elles.

points. De plus, il n'y aura pas d'autre trajectoire remplissant les mêmes conditions et telle que $|y|$ et $|y'|$ restent inférieurs à un certain nombre fixe.

Donc, dans le cas de l'équation régulière, il y aura une certaine petite région près de A telle qu'il y aura une et une seule trajectoire passant par A et par un point B de cette région. En rapprochant cette remarque du résultat que nous venons d'obtenir, on arrive à la conclusion annoncée.

Remarque. — Dans le cas où l'on sait *a priori* que le nombre de solutions ne dépasse jamais 1, on peut conclure réciproquement, du fait que l'équation n'est pas régulière, que le problème de mener une trajectoire par deux points fixes n'est pas toujours possible pour cette équation. Mais, dans le cas où le nombre de solutions peut être quelconque, la réciproque cesse d'être exacte. Il peut être utile alors d'introduire une nouvelle définition.

Si l'on considère toutes les paires de points A et B de Ω par lesquels il passe un nombre quelconque n de trajectoires régulières, on dira que l'équation est relativement régulière si, en choisissant convenablement, pour chaque paire de points A et B, une trajectoire simple (AB), on peut obtenir des trajectoires uniformément régulières. On voit immédiatement que si l'équation est relativement régulière, il existera toujours au moins une trajectoire régulière passant par deux points donnés. Il est très probable que la réciproque de cette proposition est exacte; en tout cas, on se rend compte facilement que si le choix des trajectoires (AB) est impossible, même lorsqu'on n'exige pas que celles-ci soient simples, le problème de mener une trajectoire par deux points donnés ne sera pas toujours possible.

La valeur pratique de cette remarque est cependant assez médiocre, car il n'est pas facile de décider, avant l'intégration, si une équation est relativement régulière.

Au contraire, il est en général facile de reconnaître *a priori* si une équation est régulière, et c'est pour cela que le théorème précédent pourra souvent être utile.

8. Appliquons les résultats qui précèdent à l'équation à laquelle

satisfont nécessairement les extrémales, ou trajectoires, relatives à l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \mathfrak{F}(x, y, y')\,dx \qquad (\mathfrak{F}''_{y'^2} > 0). \tag{10}$$

C'est l'équation bien connue d'Euler qui se met sous la forme

$$y'' = \frac{\mathfrak{F}'_y - \mathfrak{F}''_{y'x} - y'\mathfrak{F}''_{y'y}}{\mathfrak{F}''_{y'^2}} = f(x, y, y'). \tag{11}$$

Cette équation appartiendra, par définition, à la classe (L), si la croissance de l'expression $f(x, y, y')$ pour y' infini n'est pas supérieure à 2.

Il est aisé de voir que *ce cas se présentera toujours, lorsque la croissance α de $\mathfrak{F}$, par rapport à y', sera supérieure à* 1. En effet, admettons que $\mathfrak{F}$ et ses dérivées des deux premiers ordres croissent algébriquement pour y' infini, de sorte que

$$\mathfrak{F}(x, y, y') = |y'|^{\alpha}[A(x, y) + \varepsilon], \quad \mathfrak{F}'_{y'} = \alpha|y'|^{\alpha-1}[A(x, y) + \varepsilon_1], \quad \ldots \quad (A \gtrless 0)$$

où les ε tendent vers zéro avec $\frac{1}{y'}$.

Par conséquent,

$$f(x, y, y') = \frac{|y'|^{\alpha}[B(x, y) + \eta]}{\alpha(\alpha-1)|y'|^{\alpha-2}[A(x, y) + \varepsilon]} = \frac{y'^2}{\alpha(\alpha-1)}[C(x, y) + \varepsilon_1].$$

On voit ainsi que non seulement si $\alpha > 1$, mais aussi, d'une façon générale, si $\alpha \neq 1$, $\alpha \neq 0$, la croissance de f n'est pas supérieure à 2. J'ai surtout signalé le cas de $\alpha > 1$, car c'est celui qui se présente le plus souvent, puisqu'on a nécessairement $\alpha \geqq 1$, lorsque le terme principal de $\mathfrak{F}$ est indépendant du signe de y (la condition $\mathfrak{F}''_{y'^2} > 0$ étant remplie). Mais on voit bien que la conclusion subsiste, si ce terme principal prenait des valeurs différentes pour $+\infty$ et $-\infty$; dans ce cas, l'ordre α de l'une de ces valeurs serait toujours supérieur ou égal à 1, en vertu de la condition $\mathfrak{F}''_{y'^2} > 0$, tandis que l'ordre de la seconde pourrait être quelconque (non négatif). Ainsi, dans tous les cas, pour que l'équation (11) soit de la classe (L), *il suffit* qu'aucun des ordres de croissance de $\mathfrak{F}$ ne soit égal à 0 et à 1.

Cette condition n'est manifestement pas nécessaire, mais, dans ces cas exceptionnels, où l'ordre est 0 ou 1, on pourra toujours examiner directement l'équation d'Euler et voir si elle appartient ou non à la classe (L).

9. Considérons quelques exemples :

1° Soit $\mathcal{F}(x, y, y') = y'^2 + \sin y$. Dans ce cas, $\alpha = 2$; l'équation d'Euler sera donc de la classe (L); en l'écrivant, on a effectivement $y'' = \cos y$.

2° Soit $\mathcal{F}(x, y, y') = e^{y'^2} + \varphi(x, y)$. Dans ce cas, α est infiniment grand et il ne serait pas rigoureux de conclure immédiatement que l'équation d'Euler est de la classe (L). Pourtant il en est bien ainsi, puisqu'elle a la forme $y'' = \dfrac{e^{-y'^2}}{y_{y'^2} + 2} + \varphi'_y$, et il serait facile, sans doute, de préciser les conditions qui permettraient d'appliquer immédiatement le résultat précédent aux cas de croissance transfinie.

Mais, au lieu de nous arrêter sur cette question, considérons deux exemples relatifs au cas limite, où $\alpha = 1$.

3° Soit $\mathcal{F}(x, y, y') = y^2 + \sqrt{1 + y'^2}$. L'équation d'Euler correspondante sera

$$y'' = 2y(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Elle ne rentre pas dans la classe (L).

4° Soit $\mathcal{F}(x, y, y') = \sqrt{1 + y^2 + y'^2}$. Dans ce cas, l'équation d'Euler devient

$$y'' = y(1 + y^2 + y'^2),$$

et l'on voit qu'elle appartient à la classe (L).

Nous voyons que, dans le cas de $\alpha = 1$, l'équation d'Euler n'est pas nécessairement de la classe (L). C'est ce qui se présente dans l'exemple (3) qu'on sait intégrer.

Nous devons donc vérifier ce fait, qui semble paradoxal, qu'il n'existe pas, en général, d'extrémale passant par deux points donnés M_0, M_1, et rendant minima l'intégrale

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[y^2 + \sqrt{1 + y'^2} \right] dx,$$

quoique celle-ci admette toujours, évidemment, une limite inférieure.

Il suffit d'envisager les points $M_0(0, 0)$ et $M_1\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et de remarquer que l'intégrale générale de l'équation

$$y'' = 2y(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}$$

est

$$x = \int \frac{(y^2+C)\,dy}{\sqrt{1-(y^2+C)^2}};$$

de sorte qu'on a, pour déterminer C,

$$\frac{1}{2} = \int_0^2 \frac{(y^2+C)\,dy}{\sqrt{1-(y^2+C)^2}}.$$

Or cette égalité est naturellement impossible, puisque le second membre est complexe quel que soit C. On vérifiera que l'ordonnée maxima b du point M_1, qu'on pourrait joindre à M par une extrémale, est déterminée par l'équation

$$\frac{1}{2} = \int_0^b \frac{y^2}{\sqrt{1-y^4}}\,dy.$$

Nous n'approfondirons pas ici ce cas exceptionnel (¹), où l'équation d'Euler n'appartient pas à la classe (L). Plaçons-nous, au contraire, dans le cas général où elle appartient à la classe (L). Ceci aura lieu, par exemple, si l'on peut fixer un nombre positif k, tel que

$$\mathfrak{F}''_{y'^2} > k > 0,$$

car alors la croissance de $\mathfrak{F}$ est au moins égale à 2. Dans la suite, nous supposerons toujours remplie seulement l'inégalité $\mathfrak{F}''_{y'^2} > 0$.

10. Considérons d'abord le cas de $\alpha > 1$ où l'on sait, d'après ce qui précède, que l'équation d'Euler est nécessairement de la classe (L).

Je dis que *si, dans un domaine Ω déterminé, mais aussi grand qu'on le veut, la croissance α de $\mathfrak{F}(x, y, y')$ par rapport à y' est supérieure à 1; si, de plus, $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}$ admet une borne inférieure pour $y > 0$ et une borne*

(¹) Dans ce cas, et dans ce cas seulement, il est utile de mettre le problème sous la forme paramétrique.

supérieure pour $y<0$, l'équation d'Euler est régulière. Il passe donc toujours un nombre impair d'extrémales par deux points quelconques. En effet, nous pouvons admettre, sans restreindre la généralité, que les points considérés sont sur l'axe des x, et que l'extrémale reste entre ces deux points d'un même côté de l'axe; soit, par exemple, $y>0$. Dans ces conditions, il existe, par hypothèse, un nombre fixe M (en général négatif), tel que $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} > \mathrm{M}$.

Or, de l'équation d'Euler

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right) = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y},$$

on tire, par intégration,

$$(12) \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right)_{x=x_0}^{x=x_1} = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\,dx > \mathrm{M}(b-a),$$

quelles que soient les abscisses x_0 et x_1 des points de l'extrémale. Choisissons ces abscisses de sorte que x_0 corresponde à la plus grande valeur positive de y', et que x_1 $(x_1 > x_0)$ corresponde à $y=0$ (et $y' \leq 0$); la valeur $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}$ au second point sera alors inférieure à un nombre N qu'on peut fixer d'avance $\Big($car si y' croissait indéfiniment par valeurs négatives, $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}$ deviendrait négatif à cause de $\alpha > 1\Big)$. On tirera donc de l'inégalité (12), mise sous la forme

$$(12\ bis) \qquad \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right)_{x=x_0} - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right)_{x=x_1} < -\mathrm{M}(b-a),$$

l'inégalité

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}\right)_{x=x_0} < \mathrm{N} - \mathrm{M}(b-a);$$

et puisque l'ordre de $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y'}$ est $\alpha - 1 > 0$, on en déduit une limite supérieure de y'. On appliquerait le même raisonnement pour obtenir une limite supérieure de $-y'$. De la limite supérieure de $|y'|$ on tire immédiatement une limite supérieure de $|y|$. C. Q. F. D.

Remarque. — On voit que nous avons retrouvé directement une limite supérieure de $|y'|$ sans avoir eu besoin de nous appuyer sur la propriété que l'équation considérée appartient à la classe (L). Mais nous avons utilisé en outre l'hypothèse faite sur $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$.

En particulier, la propriété imposée à $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}$ se trouve, en général, réalisée lorsque $\mathcal{F}$ peut être limitée inférieurement ; ce serait, en effet, une singularité bien spéciale d'une fonction $\varphi(z)$ si, pour $z = +\infty$, on avait $\varphi(z) < M$ et que, en même temps, $\varphi'(z)$ ne soit pas limitée inférieurement (c'est-à-dire puisse prendre des valeurs négatives aussi grandes qu'on veut).

Ainsi, considérons l'exemple (1) du paragraphe 8. Ici

$$\mathcal{F}(x, y, y') = y'^2 + \sin y; \qquad \alpha = 2 \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right| \leqq 1.$$

L'équation d'Euler est donc, dans ce cas, régulière. On vérifiera directement qu'il passe toujours un nombre impair de trajectoires par deux points quelconques.

11. Le cas ou $\mathcal{F}$ est limitée inférieurement, n'est évidemment qu'un cas particulier de notre proposition. Par exemple, si $\mathcal{F}(x, y, y') = y'^2 + y$, on aura aussi $\left|\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y}\right| = 1$, et la conclusion subsiste, quoique $\mathcal{F}$ ne puisse être limitée inférieurement. On peut d'ailleurs démontrer que, dans des cas étendus, *si la croissance de $\mathcal{F}$ par rapport à y' est supérieure à sa croissance par rapport à y*, l'équation d'Euler est *régulière*. Pour simplifier, bornons-nous au cas $\mathcal{F}(x, y, y') = \varphi(x, y') - \psi(x, y)$. Je dis que, *si la croissance $\alpha > 1$ de $\varphi(x, y')$ par rapport à y' est supérieure à la croissance $\beta > 1$ de $\psi(x, y)$ par rapport* [1] *à y, l'équation d'Euler est régulière*. En effet, l'équation d'Euler donne, par intégration

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'}\right)_{x=x_0}^{x=x_1} = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial \psi}{\partial y}\, dx > -k L^{\beta-1}, \tag{13}$$

où k est une constante et L le maximum de y. De là on tire, comme

[1] Naturellement dans le cas où $\psi < 0$ pour $|y|$ très grand, la croissance par rapport à y peut être quelconque.

précédemment

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)_{x=x_0} < k\mathrm{L}^{\beta-1} + \mathrm{N},$$

ou encore

$$k_1 y'^{\alpha-1} < k\mathrm{L}^{\beta-1} + \mathrm{N},$$

k_1 étant une nouvelle constante. Mais, d'autre part, il y a certainement des points où $y' \geqq \frac{\mathrm{L}}{b-a}$. Donc, finalement, L satisfait à une inégalité à coefficients donnés

$$\mathrm{AL}^{\alpha-1} < k\mathrm{L}^{\beta-1} + \mathrm{N}$$

qui conduit à une limite supérieure pour L, puisque $\alpha > \beta$.

Ainsi, soit $\mathcal{F}(x, y, y') = y'^2 - |y|^\beta$. Si $\beta < 2$, l'équation d'Euler est régulière, mais elle ne l'est plus, en général, comme il est facile de le vérifier directement, si $\beta = 2$.

Dans ce dernier cas et, en général, lorsque la croissance par rapport à y est la même que par rapport à y', on pourrait cependant déduire, par le même raisonnement, la régularité uniforme des extrémales, lorsque la région ω est comprise entre deux parallèles à l'axe des y assez voisines, mais déterminées.

Enfin, si la croissance β, par rapport à y, est supérieure à la croissance α par rapport à y', l'équation ne sera régulière, en général, dans aucune région. Ainsi, pour $\mathcal{F}(x, y, y') = y'^2 - y^4$, l'équation d'Euler sera

$$y'' + 2y^3 = 0.$$

L'équation générale des extrémales passant par l'origine sera

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{y_0^4 - y^4}};$$

y est donc une fonction périodique de x variant depuis $-y_0$ à $+y_0$ de période $\mathrm{T} = \frac{2}{y_0}\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Par conséquent, y_0 pouvant être aussi grand qu'on veut, on voit que, parmi l'infinité d'extrémales qui passent par deux points quelconques (aussi voisins qu'on voudra), on pourra toujours en trouver une sur laquelle $|y|$ dépasse tout nombre donné d'avance.

12. Dans le cas où le théorème (10) est applicable, la solution ne sera pas unique, en général. Examinons encore, pour terminer ce Chapitre, le cas où l'on sait *a priori* que la solution (si elle existe) doit être unique. On a alors la proposition suivante :

Si (le nombre de solutions ne pouvant pas être supérieur à 1) *la fonction* $\mathfrak{F}$ *satisfait à l'inégalité* (1)

$$\mathfrak{F}(x, y, y') > k|y'| - \beta(x), \tag{14}$$

où k est un nombre positif fixe et β *une fonction de x bornée lorsque x est borné, la condition nécessaire et suffisante pour que le problème soit toujours possible est que l'équation d'Euler appartienne à la classe* (L).

Remarquons, avant de passer à la démonstration, que l'inégalité (14) est en général remplie, si la condition $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y'^2} > 0$, comme nous le supposons toujours, est vérifiée.

Nous avons vu, au paragraphe 3, que si l'équation n'est pas de la classe (L), on pourra indiquer une paire de points par lesquels il sera impossible de faire passer une extrémale. Il reste donc à démontrer que, réciproquement, le problème est certainement possible si l'équation d'Euler appartient à la classe (L).

En effet, si l'extrémale existe, elle réalise le minimum absolu (2) de l'intégrale

$$I = \int \mathfrak{F}(x, y, y')\, dx$$

entre les limites considérées. Par conséquent si, sur une certaine

(1) Il suffirait même de supposer l'inégalité remplie seulement pour des valeurs de y' d'un signe déterminé, en admettant seulement que $\mathfrak{F}$ reste toujours bornée inférieurement.

(2) Pour s'en assurer, il suffit de remarquer que l'extrémale E donne un minimum relatif fort. Si ce n'était pas un minimum absolu entre les points A et B, on prendrait une courbe C, pour laquelle I serait inférieur. Mais alors en faisant varier continûment le point B′ sur la courbe C, on voit qu'il y aura une extrémale allant de A à ce point variable B′, tant que celle-ci reste comprise entre E et C, et de plus la valeur de l'intégrale le long de AB′B sera supérieure à sa valeur sur E; l'extrémale AB′ ne rencontrera pas E, mais si elle traverse C, en plusieurs points B″, B‴, on pourra répéter le même raisonnement entre deux points consécutifs, et l'on finira ainsi par s'approcher autant qu'on veut de C, sur laquelle l'intégrale serait par conséquent supérieure à ce qu'elle devient sur E.

courbe, on a

$$\int \mathcal{F}(x, z, z')\, dx = \mathrm{H},$$

on aura, sur l'extrémale,

$$\int \mathcal{F}(x, y, y'(\, dx < \mathrm{H}\,;$$

d'où

$$\int k|y'|\, dx < \mathrm{G},$$

G étant une constante bien déterminée.

On en conclut que

$$|y| < \frac{\mathrm{G}}{k},$$

et le théorème est démontré en vertu du paragraphe 5.

Un cas important, où l'on sait *a priori* qu'il ne peut exister plus d'une solution, est celui où

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y\, \partial y'}\right)^2 \geqq 0 \qquad \left(\text{avec } \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y'^2} > 0\right).$$

c'est ce qui se présente dans les exemples (3) et (4) du paragraphe 9.

Conformément à notre théorème, le premier de ces exemples qui conduit à une équation qui n'est pas de la classe (L) n'a pas de solutions dans certains cas. Au contraire, le second exemple, qui conduit à une équation (L), admet toujours une solution.

On vérifiera aussi que, dans le cas où l'on peut fixer un nombre positif k, tel que

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y'^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial y\, \partial y'}\right)^2 > k,$$

le problème aura toujours une solution, puisque l'équation d'Euler est alors de la classe (L).

CHAPITRE II.

CAS GÉNÉRAL.

13. Tous les résultats relatifs à une équation unique que nous venons d'obtenir se retrouvent dans le cas général et par des considérations analogues.

On a d'abord le théorème fondamental de M. Painlevé relatif aux équations L. En se bornant à ces équations on voit donc qu'*une solution bornée entre deux points est régulière entre ces points.*

En conservant les définitions du paragraphe 4, on démontre aussi le théorème de ce paragraphe. On en déduit ensuite la propriété importante des équations régulières de posséder toujours un nombre impair de solutions simples, passant par deux points donnés arbitrairement (sur les frontières formées de surfaces conjuguées, certaines des solutions deviennent multiples).

Enfin, en passant au problème du calcul des variations, on retrouve cette propriété que *les équations d'Euler*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

sont de la classe L, *si la fonction $\mathfrak{F}$ dans l'intégrale* [1]

$$\int \mathfrak{F}(y'_2, y'_2, \ldots, y'_n, y_1, y_2, \ldots, y_n, x)\,dx$$

croissant algébriquement avec y'_i, son ordre de croissance α est supérieur à 1.

14. Considérons, par exemple, l'intégrale de Hamilton relative au

[1] On supposera toujours $\mathfrak{F}$ holomorphe pour les valeurs réelles des variables et, de plus, on admettra que la condition de Legendre est vérifiée identiquement, c'est-à-dire que la forme quadratique $\sum_{i,k} \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y'_i\,\partial y'_k} Z_i Z_k$ est définie.

mouvement libre

$$I = \int_a^b (T + H)\, dx,$$

où

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} y'^2_i$$

et

$$H(x, y_1, \ldots, y_n)$$

est la fonction de forces. Les équations de mouvement

$$y''_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{15}$$

sont particulièrement simples, et la démonstration du théorème de M. Painlevé, dans ce cas, devient intuitive.

Je dis que *si, pour* $|y_i| < M$, H *satisfait aux inégalités*

$$\left|\frac{\partial H}{\partial y_i}\right| < KM^\lambda + K' \tag{16}$$

K *et* K′ *étant des constantes déterminées et* $\lambda < 1$, *les équations du mouvement sont régulières, c'est-à-dire qu'il existe toujours au moins un chemin par lequel on peut arriver d'un point donné* A *à un autre point donné* B *au bout d'un temps* $(b - a)$ *donné arbitrairement.*

En effet, $|y'_i|$ ne peut rester constamment supérieur à un certain nombre fixe N qu'on peut faire nul, en supposant que y_i s'annule aux extrémités. Mais si le maximum de $y_i = M_i$, on a

$$\max. y'_i > \frac{M_i}{b - a};$$

donc, en intégrant chacune des égalités (15), on obtient

$$\frac{M_i}{b - a} < (b - a) \max. \frac{\partial H}{\partial y_i} \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

En désignant par M le plus grand des M_i on a, par conséquent, pour la valeur correspondante de i,

$$\left|\frac{\partial H}{\partial y_i}\right| > \frac{M}{(b - a)^2}$$

et, en vertu de l'inégalité (16),

$$M < (b-a)^2[KM^\lambda + K'],$$

d'où l'on tire une limite supérieure de M, puisque $\lambda < 1$.

Ainsi, dans le cas d'un point pesant, il est toujours possible de le lancer de sorte qu'il arrive à un point déterminé au bout d'un temps donné. Dans ce cas, d'ailleurs, le problème n'admet qu'une *seule* solution, et il en est de même dans le cas général du système

$$(15\ bis) \qquad y_i'' = \varphi_i(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les fonctions φ_i sont holomorphes pour toutes les valeurs réelles des variables, et en outre

$$(16\ bis) \qquad \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \delta_i \delta_k \geqq 0,$$

quels que soient x, y_i et δ_i.

En effet, s'il pouvait exister deux systèmes de solutions prenant les mêmes valeurs aux extrémités, leurs différences δ_i satisferaient au système linéaire

$$\delta_i'' = \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \delta_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Donc

$$\sum_i \delta_i \delta_i'' = \sum_i \sum_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \delta_k \delta_i \geqq 0,$$

et, *a fortiori*,

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \sum_i \delta_i^2 \geqq 0;$$

par conséquent, la courbe qui représente $\sum_i \delta_i^2$ en fonction de x serait composée de droites et d'arcs tournant leur convexité vers le bas, elle se réduit donc à l'axe des x, $\sum_i \delta_i^2 = 0$ identiquement.

On peut aussi substituer alors, à la condition (16), la condition que II admette une limite inférieure, ce qui résulte le plus souvent de l'inégalité (16 *bis*) dans laquelle on fait $\varphi_i = \frac{\partial \mathrm{II}}{\partial y_i}$.

Le seul fait que H admet une limite inférieure ne suffit pas, comme le montre l'exemple (1) du paragraphe 9, pour que la solution soit unique.

SECONDE PARTIE.

ÉTUDE DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU CALCUL DES VARIATIONS.

CHAPITRE III.

ÉTUDE GÉNÉRALE DE L'ÉQUATION DU TYPE ELLIPTIQUE

$$A(p, q, x, y)\,r + 2B(p, q, x, y)\,s + C(p, q, x, y)\,t = D(p, q, x, y, z),$$

LORSQUE $D'_z \geqq 0$.

1. Dans mon Mémoire *Sur la généralisation du problème de Dirichlet*, II (*Mathem. Annalen*, t. LXIX, 1910, § 19), j'ai démontré le théorème suivant :

Si, dans l'équation

$$(1)\qquad A(p, q, x, y)\,r + 2B(p, q, x, y)\,s + C(p, q, x, y)\,t = D(p, q, x, y, z),$$

D *est au plus du second degré par rapport à* p, q, *tandis que* $A - \frac{B^2}{C}$, $C - \frac{B^2}{A}$ et D'_z *ont une limite inférieure positive, le problème de Dirichlet est toujours possible (à l'intérieur d'un cercle quelconque, toutes les données étant analytiques).*

Je me propose de généraliser un peu cette proposition et de lui donner la forme d'une condition *nécessaire et suffisante* pour que le problème soit *toujours* possible. Nous verrons d'ailleurs que la signification du mot *toujours* doit être bien précisée, car il y a des équations qui se comportent différemment vis-à-vis des contours à projection convexe et non convexe. Nous aurons à envisager l'expression

$$E = Ap^2 + 2Bpq + Cq^2 \tag{2}$$

qui jouera un rôle important dans la suite.

Nous supposerons, pour fixer les idées, que E se comporte à l'infini comme un polynome par rapport à p et à q.

Soit m le degré du polynome principal E_m de E,

$$E_m = a_0 p^m + a_1 p^{m-1} q + \ldots + a_m q^m.$$

Si E_m ne peut s'annuler autrement que pour $p = q = 0$, nous dirons que l'expression E ainsi que l'équation correspondante est *définie*.

Dans le cas contraire, l'expression E ainsi que l'expression correspondante est indéfinie. L'ensemble de valeurs (x, y, z, p, q) qui annule E_m vérifie l'équation

$$E_m = 0 \tag{3}$$

qui, en général, sera une équation aux dérivées partielles du premier ordre. Sans insister sur les cas particuliers qui peuvent ici se présenter, remarquons seulement que E_m ne peut changer de signe. Nous bornerons notre étude actuelle aux équations définies.

Il importe, d'autre part, de comparer l'ordre m de croissance de E avec l'ordre de croissance de l'expression

$$I = (A + C)(p^2 + q^2);$$

nous conviendrons d'appeler *genre* de l'équation la différence positive ou nulle entre l'ordre de I et de E.

Remarquons que si l'on pose

$$E_1 = Aq^2 - 2Bpq + Cp^2,$$

on a l'identité

$$E + E_1 = I.$$

Il en résulte que l'une au moins des équations

$$Ar + 2Bs + Ct = D \qquad \text{et} \qquad Cr - 2Bs + At = D$$

est de genre zéro.

Il est quelquefois commode de poser

$$A = 1 + P^2, \qquad B = PQ, \qquad C = 1 + Q^2,$$

ce qu'on peut toujours faire en multipliant l'équation par un facteur convenable. Alors

$$(2\ bis) \qquad \begin{cases} E = p^2 + q^2 + (pP + qQ)^2, \\ E_1 = p^2 + q^2 + (pQ - qP)^2, \\ I = (p^2 + q^2)(2 + P^2 + Q^2). \end{cases}$$

Nous dirons enfin que l'équation

$$Ar + 2Bs + Ct = D$$

appartient à la classe (L), si l'on peut fixer un nombre K, tel que, x, y, z étant bornés, on ait

$$(4) \qquad \frac{|D|}{E} < K,$$

lorsque $p^2 + q^2 > 1$.

Dans le cas des équations définies, on peut remplacer la condition (4), pour qu'une équation appartienne à la classe (L), par la condition que l'ordre de croissance [1] de D ne soit pas supérieur à l'ordre m de E. [Dans le cas où E est indéfinie, il faudrait en outre que la même inégalité (4) subsiste, lorsque le terme principal de E est nul.]

Voici une proposition importante relative aux équations (L).

2. Théorème. — *Si une équation*

$$(5) \quad A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q),$$

où $D'_z \geqq 0$ *est de la classe* L, *il est possible de limiter supérieurement* $p^2 + q^2$ (*et, par conséquent, les dérivées de tous les ordres*) *à l'intérieur d'un contour convexe* [2] C, *si* z *s'annule sur le contour et reste bornée à l'intérieur du contour.*

---

[1] Nous supposerons toujours que la croissance (par rapport à p, q) de D'_x, D'_y, D'_z n'est pas supérieure à celle de D. L'absence de cette condition qui se trouve, en général, réalisée, conduirait à certains endroits à des complications inutiles.

[2] On suppose seulement la courbure du contour C bornée en chaque point.

La démonstration se fait, comme à l'endroit cité, par la méthode des fonctions auxiliaires. Il s'agit d'abord de limiter supérieurement le module de la dérivée normale $\frac{\partial z}{\partial n}$ sur le contour. Il suffira d'indiquer un nombre R tel que

$$\frac{\partial z}{\partial n} > -R,$$

car on pourra appliquer le même raisonnement à $-z$.

A cet effet, posons

$$z = -M + \alpha \log u,$$

où M est le maximum de $|z|$. On aura alors

$$p = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad r = \frac{\alpha}{u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\alpha}{u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad \cdots\cdot$$

Donc u satisfait à l'équation

$$(6) \qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{u}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{u}{\alpha}D.$$

Par conséquent, si E_m est l'ensemble des termes de degré m le plus élevé (¹) dans E, et D_m l'ensemble (qui pourrait être nul) des termes du même degré dans D, le second membre Q de l'équation (6) aura pour terme principal

$$\frac{\alpha^{m-2}}{u^{m-1}}\left[E_m\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \alpha D_m\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right].$$

En vertu de l'inégalité (4), on pourra choisir α assez petit pour avoir

$$\alpha |D_m| < \frac{1}{2} E_m.$$

Or, du moment que α sera ainsi fixé, on pourra indiquer un nombre positif N tel que

$$Q > -N.$$

(¹) On supposera, sans restreindre la généralité, $m \geqq 2$ et A et C limités inférieurement.

Posons ensuite

$$u' = u + \frac{N}{\mu}(x^2 + y^2).$$

où μ est une limite inférieure de $2(A+C)$. Donc

$$A\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} > 0.$$

Par conséquent, la surface $u'(x, y)$ ne peut être convexe vers le haut, puisque cela exigerait qu'on ait en même temps

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} < 0.$$

Donc, si en un point M du bord on mène, par la tangente en ce point, un plan assez incliné pour qu'il reste au-dessus du bord (ce qui sera possible à cause de la convexité du contour C), le plan tangent en ce point à la surface u' sera certainement au-dessous de ce plan. On pourra donc fixer un nombre S tel que

$$\frac{\partial u'}{\partial n} > -S,$$

d'où l'on déduit immédiatement un nombre R tel que $\dfrac{\partial z}{\partial n} > -R$ sur C. En appliquant le même raisonnement à $-z$, on a

$$\left|\frac{\partial z}{\partial n}\right| < R.$$

Il reste à déterminer une limite supérieure de p^2+q^2 en un point *intérieur* où cette fonction atteint son maximum.

A cet effet, nous allons également reprendre le raisonnement du Mémoire cité (p. 125) en le complétant, pour nous débarrasser de certaines restrictions inutiles.

Nous avons établi qu'en un point M, où $w = p^2 + q^2$ est maximum, doit avoir lieu l'inégalité

$$(7) \qquad (p^2+q^2)\left(\frac{D^2}{Aq^2 - 2Bpq + Cp^2} + \frac{\partial D}{\partial z}\right) + p\frac{\partial D}{\partial x} + q\frac{\partial D}{\partial y} \leqq 0.$$

Dans un grand nombre de cas, cette inégalité suffit pour obtenir une limite supérieure de p^2+q^2; il en est bien ainsi, en particulier, si

$$\frac{\partial D}{\partial z} > 0$$

et que son ordre de croissance, par rapport à (p, q), n'est pas inférieur à celui de $\frac{\partial D}{\partial x}$ et $\frac{\partial D}{\partial y}$. C'est à ce cas que nous voulons ramener le cas général par un changement de fonction convenable.

Posons

$$z = -M - h + \alpha \log(e^u + 1)$$

où

$$u = \log\left(e^{\frac{z+M+h}{\alpha}} - 1\right);$$

de sorte que z variant de $-M$ à $+M$, e^u varie de $e^{\frac{h}{\alpha}} - 1$ à $e^{\frac{2M+h}{\alpha}} - 1$.

De plus,

$$p = \alpha \frac{e^u}{e^u+1} \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad r = \alpha \frac{e^u}{e^u+1} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{e^u}{(e^u+1)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad \dots$$

Donc u satisfait à l'équation

$$\begin{aligned} &A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ &\quad = -\frac{1}{e^u+1}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{e^u+1}{\alpha e^u} D. \end{aligned}$$

Ici, le terme du plus haut degré en $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ sera

$$I_m = \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-2)u}}{(e^u+1)^{m-1}}(-E_m + \alpha e^u D_m).$$

Donc

$$\frac{\partial I_m}{\partial u} = \frac{\alpha^{m-2} e^{(m-1)u}}{(e^u+1)^m}\left\{[1-(m-2)e^{-u}]E_m + \alpha(m-1)D_m + \alpha^2 e^u \frac{\partial D_m}{\partial z}\right\}.$$

On déterminera d'abord $\frac{h}{\alpha}$ par la condition que $e^{\frac{h}{\alpha}} \geqq 2m-3$, grâce à quoi on aura

$$1-(m-2)e^{-u} > \frac{1}{2}$$

et, par conséquent,

$$(7\ bis)\qquad \frac{\partial \mathrm{I}_m}{\partial u} > \frac{\alpha^{m-2}\, e^{(m-1)u}}{(e^u+1)^m}\left[\frac{1}{2}\mathrm{E}_m + \alpha(m-1)\,\mathrm{D}_m + \alpha^2 e^u \frac{\partial \mathrm{D}_m}{\partial z}\right]$$
$$\geqq \frac{\alpha^{m-2}\, e^{(m-1)u}}{(e^u+1)^m}\left[\frac{1}{2}\mathrm{E}_m + \alpha(m-1)\,\mathrm{D}_m\right],$$

puisque $\frac{\partial \mathrm{D}_m}{\partial z} \geqq 0$. Nous pouvons donc choisir α assez petit pour que

$$\frac{\partial \mathrm{I}_m}{\partial u} > \frac{\alpha^{m-2}\, e^{(m-1)u}}{4(e^u+1)^m}\,\mathrm{E}_m.$$

L'inégalité (7), appliquée à la fonction u, fournira alors une limite supérieure du maximum de $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$.

La démonstration est ainsi achevée.

Remarque. — La démonstration subsiste également pour les équations indéfinies pourvu qu'on adopte, comme définition des équations (L), l'inégalité (4).

3. Dans le cas où $\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}$ a une limite inférieure positive, il est possible d'indiquer *a priori* une limite supérieure de $|z|$ (*loc. cit.*, § 19). On a donc la proposition :

Le problème de Dirichlet pour une équation (L), *dans laquelle* $\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial z}$ *a une limite inférieure positive, est toujours possible à l'intérieur d'un contour convexe.* [Cela résulte du fait que le lemme fondamental (p. 115) du Mémoire cité se démontre sans modification, si le cercle est remplacé par un contour convexe.]

Il est clair que cette proposition est plus générale que le théorème indiqué au début (sans parler du contour), puisque, en introduisant dans une équation (L) un facteur nécessaire pour que $\mathrm{A} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{C}}$ et $\mathrm{C} - \frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}$ aient des limites inférieures positives, on pourra rendre la croissance de D supérieure à 2. Cela arrive, par exemple, pour l'équation

$$(8)\qquad (1+p^2)\,r + 2pqs + (1+q^2)\,t = z(1+p^2+q^2)^2,$$

qui est une équation (L), car

$$\mathrm{E} = (1+p^2)\,p^2 + 2p^2q^2 + (1+q^2)\,q^2 = p^2+q^2+(p^2+q^2)^2$$

et

$$A - \frac{B^2}{C} = 1 + \frac{p^2}{1+q^2}, \qquad C + \frac{B^2}{A} = 1 + \frac{q^2}{1+p^2};$$

de sorte qu'il n'est pas possible de diviser l'équation par un facteur qui abaisse l'ordre de D, sans que les limites inférieures de $A - \frac{B^2}{C}$ et $C - \frac{B^2}{A}$ deviennent nulles. Ainsi, en vertu du théorème qui vient d'être établi, le problème de Dirichlet, pour cette équation, est possible; mais cela ne résulte pas de mon ancien théorème.

Dans le cas où $D'_z \geqq 0$, on ne peut plus, en général, indiquer *a priori* une limite supérieure de $|z|$. Pourtant, si l'on connaît une certaine solution de la même équation à l'intérieur du contour considéré, on peut également limiter $|z|$. Dans ce cas, on a donc cette proposition :

Si une équation (L), *dans laquelle* $D'_z \geqq 0$ *admet une solution avec des données déterminées sur un contour convexe, elle admet aussi une solution, si les données sont quelconques sur ce contour.*

Ainsi il pourra arriver, dans le cas de $D'_z = 0$, que le problème de Dirichlet ne sera pas toujours possible; on en trouvera un exemple dans le Mémoire *Sur les surfaces définies*, etc. (*Ann. de l'Éc. Norm.*, 1910).

4. D'après ce qui précède, on voit que les équations

$$Ar + 2Bs + Ct = D \tag{5}$$

de la classe (L) se comportent, au point de vue du problème de Dirichlet, d'une façon identique dans le cas du cercle et des contours convexes quelconques. Il n'en est plus de même lorsqu'il s'agit des contours non convexes.

Il est clair qu'on pourra toujours ramener, par un changement de variables, le cas d'un contour quelconque (qu'on peut supposer analytique) à celui du cercle; il suffira, par exemple, de faire la représentation conforme sur le cercle de l'aire limitée par ce contour.

Soient donc x et y les nouvelles variables

$$x_1 = \varphi_1(x, y), \qquad y_1 = \psi_1(x, y).$$

où φ_1 et ψ_1 seront des fonctions régulières de x, y, et inversement,

$$x = \varphi(x_1, y_1), \qquad y = \psi(x_1, y_1),$$

où φ et ψ seront des fonctions régulières de x, y.

En différentiant, on trouve

$$p = p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x}, \qquad q = p_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + q_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

$$r = r_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2 s_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + t_1 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + p_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + q_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2},$$

$$s = r_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + s_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) + t_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \ldots,$$

$$t = r_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + 2 s_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \ldots.$$

L'équation transformée sera

$$A_1 r_1 + 2 B_1 s_1 + C_1 t_1 = D_1.$$

Mais l'expression E est invariante. On a

$$E_1 = A_1 p_1^2 + 2 B_1 p_1 q_1 + C_1 q_1^2 = E.$$

En effet,

$$A_1 = A \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2 B \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2,$$

$$B_1 = A \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) + C \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y},$$

$$C_1 = A \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 + 2 B \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} E_1 = \quad & A \left[p_1^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2 p_1 q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial x} + q_1^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right)^2 \right] \\ & + 2 B \left[p_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + p_1 q_1 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right) + q_1^2 \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right] \\ & + \quad C \left[p_1^2 \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2 + 2 p_1 q_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} + q_1^2 \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial y}\right)^2 \right] = A p^2 + 2 B pq + C q^2 = E. \end{aligned}$$

Ainsi *l'expression* E *est un invariant*; mais D aura changé. On aura, en effet,

$$D_1 = D + D',$$

où

$$D' = -\left[A\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2} + q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2}\right)\right.$$
$$\left. + 2B\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\,\partial y} + q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x\,\partial y}\right) + C\left(p_1\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} + q_1\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y^2}\right)\right].$$

Si la croissance de D' ne dépasse pas la croissance de E, la transformation ne changera pas la classe de l'équation.

Cela aura lieu certainement si l'équation donnée est de genre inférieur ou égal à 1 et, en particulier, si elle est de genre zéro, c'est-à-dire si l'ordre de croissance de E n'est pas inférieur à celui de $(A + C)(p^2 + q^2)$. Mais cela n'aura plus lieu, en général, lorsque le genre est supérieur [1] à 1.

On a donc ce théorème :

Théorème. — *Une équation de genre non supérieur à 1 se comporte, au point de vue de la possibilité du problème de Dirichlet, identiquement par rapport aux contours de forme quelconque; il en est en général autrement, si le genre est supérieur à 1.*

Par conséquent, *on pourra remplacer, dans les énoncés précédents, les contours convexes par des contours quelconques, lorsqu'il s'agira d'équations de genre non supérieur à 1.*

Ainsi, le problème de Dirichlet est *toujours* possible pour l'équation (8)

$$(1 + p^2)r + 2pqs + (1 + q^2)t = z(1 + p^2 + q^2)^2,$$

qui est de genre zéro.

Il en sera de même aussi pour toutes les équations linéaires qui sont évidemment de genre zéro.

Au contraire, si l'on prend, par exemple, l'équation des surfaces minima

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0,$$

on voit immédiatement qu'elle est de genre 2 puisque, dans ce cas,

$$E = p^2 + q^2$$

---

(1) Dans le cas où E se comporte à l'infini comme un polynome, le genre est, en général, un nombre pair.

et

$$(A + C)(p^2 + q^2) = (2 + p^2 + q^2)(p^2 + q^2).$$

On ne peut donc pas affirmer l'existence d'une surface minima telle que z soit une fonction uniforme de x, y passant par un contour à projection non convexe. Nous verrons, en effet, qu'une telle surface n'existe pas, en général. Au contraire, il résulte des théorèmes généraux qu'une surface minima existe nécessairement lorsque la projection des contours sur un certain plan est convexe.

5. Dans le cas des équations de genre supérieur à 1, la question de la possibilité du problème se ramène, pour les contours non convexes, à la question de la possibilité du problème pour une équation qui n'est pas de la classe (L).

Il importe donc de démontrer le théorème suivant, qui peut être considéré comme réciproque des théorèmes du paragraphe 3 : du premier, lorsque $D'_z > k > 0$, et du second, lorsque $D'_z \geqq 0$:

THÉORÈME. — *Si une équation*

$$(5) \qquad Ar + 2Bs + Ct = D$$

n'appartient pas à la classe (L), *il est possible d'indiquer des contours* (¹) *convexes pour lesquels le problème de Dirichlet est en général impossible.*

Je vais me borner à considérer le cas le plus fréquent, celui où le genre ne dépasse pas 2.

Je me propose de démontrer d'abord qu'il est possible de trouver une solution z de l'équation (5) s'annulant sur un arc C analytique convexe $x = \varphi(y)$ et qui, en étant holomorphe dans le voisinage de

(¹) Ces contours sont formés de deux arcs analytiques qui se raccordent avec un contact d'ordre aussi élevé qu'on veut; ils sont ainsi de la nature de ceux pour lesquels le problème est certainement possible, si l'équation est de la classe (L) avec

$$D'_z \geqq k > 0 \ (\S\ 3).$$

Il n'est pas douteux, d'ailleurs, qu'en complétant convenablement la démonstration on trouverait que tous les contours jouissent de la même propriété.

l'arc C, du côté où il tourne sa concavité, s'approche de l'arc C avec des valeurs de p^2+q^2 infiniment grandes.

En nous bornant au cas où D et E se comportent à l'infini par rapport à p et à q comme des polynomes, nous pouvons dire que si, dans le voisinage de (x_0, y_0, z_0) et pour $k_1 < \frac{q}{p} < k_2$, le rapport $\frac{D}{E}$ croît indéfiniment avec p^2+q^2, le rapport $\frac{D}{Ep}$ ne tendra pas vers zéro, mais restera borné ou croîtra aussi indéfiniment.

Nous allons nous placer d'abord dans l'hypothèse où $\frac{D}{Ep}$ reste borné; en d'autres termes, nous supposons d'abord que l'ordre m de croissance de E est d'une unité inférieur à celui de D.

Ainsi, par hypothèse, dans le voisinage de x_0, y_0, z_0, o, k $(k \gtrless 0)$, la fonction $\frac{D}{Ep}$ est développable en série suivant les puissances de $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$, $\frac{1}{p}$, $\frac{q}{p}$, sa valeur initiale étant égale à un nombre $L \gtrless 0$.

Ceci posé, transformons l'équation donnée en considérant x comme fonction de y et z. Alors

$$\frac{\partial x}{\partial z} = p_0 = \frac{1}{p} \quad \text{ou} \quad p = \frac{1}{p_0},$$
$$\frac{\partial x}{\partial y} = q_0 = -\frac{q}{p} \quad \text{ou} \quad q = -\frac{q_0}{p_0}.$$

Posons ensuite

$$r_0 = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}, \qquad s_0 = \frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial z}, \qquad t_0 = \frac{\partial^2 x}{\partial y^2};$$

donc

$$r = -\frac{r_0}{p_0^3},$$
$$s = \frac{r_0 q_0}{p_0^3} - \frac{s_0}{p_0^2},$$
$$t = -\frac{1}{p_0^3}(r_0 q_0^2 - 2 s_0 p_0 q_0 + t_0 p_0^2).$$

Par conséquent l'équation devient

$$-r_0(A - 2Bq_0 + Cq_0^2) + 2s_0 p_0(-B + Cq_0) - t_0 p_0^2 C = p_0^3 D.$$

D'où

$$(9) \qquad r_0 = \frac{-p_0 D}{E} - \frac{t_0 C}{E} - \frac{2s_0(Bp + Cq)}{E}.$$

Le second membre est holomorphe dans le voisinage de $p_0 = 0$, $q_0 = -k$ (puisque le genre ne dépasse pas 2). Par conséquent, en vertu de la théorie classique de Cauchy, il existera une fonction analytique x de z, y parfaitement déterminée qui, pour $z = 0$, se réduit à $x = \varphi(y)$ et dont la dérivée $\frac{\partial x}{\partial z} = p_0 = 0$ en même temps. On pourra choisir la fonction $\varphi(y)$ de sorte que $t_0 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ n'ait pas le signe de L et soit, en valeur absolue, assez petit pour que la valeur initiale de r_0 soit aussi de signe contraire à L; alors r_0 aura, au début, le même signe que t_0, de sorte que la surface correspondante existera du côté de l'arc $x = \varphi(y)$, où celui-ci tourne sa concavité.

En complétant une partie suffisamment petite de l'arc $x = \varphi(y)$ par un arc convexe suffisamment rapproché qui s'y raccorde avec l'ordre de contact qu'on voudra, on formera un contour convexe C_1, sur lequel la fonction z est bornée et pourtant, le long de toute la partie C de C_1, on aura $p^2 + q^2 = \infty$.

Pour fixer les idées, on peut supposer, par exemple, que $z < 0$ à l'intérieur de C_1.

Or, considérons le problème de Dirichlet relatif au contour C_1, en nous donnant sur ce contour les valeurs suivantes de la solution z_1 de l'équation : sur C, $z_1 = 0$, et sur le reste de C_1, $z_1 \leqq z$. Dans ces conditions, si la solution z_1 existait, on aurait, à l'intérieur de C_1, également

$$z_1 \leqq z,$$

car la différence $\delta = z_1 - z$ satisfait à une équation linéaire elliptique de la forme

$$ar + 2bs + ct + 2dp + 2eq + fz = 0 \qquad (f \leqq 0),$$

et, par conséquent, δ ne pouvant avoir de maxima positifs, on aura constamment $\delta \leqq 0$.

Donc, en tous les points de C, le plan tangent à z_1 ne saurait être moins incliné que celui de z; les plans tangents à z_1, tout le long de C, seraient donc également verticaux. Mais, en revenant alors à l'équation (9) en x, on verrait qu'elle admet deux solutions différentes correspondantes aux mêmes conditions initiales de Cauchy, ce qui est impossible.

Il nous reste encore à examiner le cas où $\frac{pE}{D}$ croît indéfiniment dans le voisinage des valeurs considérées de x, y, z, $\frac{1}{p}$, $\frac{q}{p}$. Ce cas (ainsi que celui où le genre est supérieur à 2) présente des difficultés spéciales qui proviennent de ce que le second membre de l'équation (9) cesse d'être holomorphe.

Voici la remarque qui peut être alors utilisée.

Soient deux équations

$$Ar + 2Bs + ct = D \qquad \text{et} \qquad Ar + 2Bs + ct = D_1,$$

si, quels que soient x, y, z, p, q, on a $D \geqq D_1$ et $D'_z \geqq 0$, et si la solution z de la première équation et z_1 de la seconde prennent les mêmes valeurs sur un contour fermé, on a

$$z \leqq z_1,$$

à l'intérieur du contour (¹).

Par conséquent, si, la croissance de D étant quelconque, il est possible d'indiquer une fonction D_1, $D_1 \leqq D$, telle que sa croissance dépasse celle de E d'une unité, on pourra considérer la solution z_1 qu'on a trouvée plus haut et dont les plans tangents le long de C sont verticaux (rappelons qu'on peut supposer que la surface z_1 va en descendant à l'intérieur du contour). La solution z, qui prendra les mêmes valeurs sur le contour C, devra, par conséquent, si elle existe, avoir aussi des plans tangents verticaux le long de C. *A fortiori*, il en sera de même de toutes les solutions qui, le long de C, prennent les mêmes valeurs en prenant des valeurs inférieures en tous les autres points du contour. Le fait que l'équation (9) n'est pas holomorphe ne nous permet pas d'en conclure (comme plus haut) l'impossibilité du problème de Dirichlet avec ces données. Ainsi nous pourrions

(¹) Cette propriété peut souvent servir pour établir l'existence d'une solution avec des données particulières sur le contour. On en trouvera des exemples dans le Mémoire déjà cité, paru dans ce journal, en 1910.

affirmer seulement que le problème de Dirichlet n'admet pas, dans tous ces cas, de solution régulière. Pour démontrer également l'impossibilité de solutions irrégulières avec des données convenablement choisies, on raisonnera comme il suit :

En diminuant les valeurs de z sur la partie du contour C_1 différente de C, on arrivera à rapprocher la surface correspondante autant qu'on veut du cylindre à génératrices verticales passant par C; on pourrait donc, dans le voisinage de C, rendre $r_0 = \frac{\partial^2 x}{\partial z^2}$ aussi voisin de zéro que possible. Mais ceci se trouve en contradiction avec l'équation (9), dont le second membre ne contient qu'un seul terme de signe déterminé devenant infiniment grand.

Un raisonnement analogue peut être appliqué si l'inégalité $D_1 \leqq D$ n'a lieu que dans le voisinage de $x_0, y_0, z_0, \frac{p}{q} = k, \frac{1}{p} = 0$.

Remarque. — Dans le cas où l'équation est de la classe (L) et de genre 2, on voit que l'équation (9) est holomorphe et fournit une valeur de r_0 de signe contraire à celui de t_0. On en conclut qu'on pourra, dans ce cas, construire un contour non convexe, sur lequel la solution du problème de Dirichlet est irrégulière et l'on en déduit, comme précédemment, qu'il y aura des problèmes de Dirichlet qui seront impossibles sur ces contours. Ainsi l'on a cette proposition :

Si une équation (L) *est de genre* 2, *il existe des contours non convexes relativement auxquels le problème de Dirichlet n'est pas toujours possible.*

Ceci a lieu, en particulier, dans le cas des surfaces minima. Le problème de Plateau, relatif à des contours dont la projection sur le plan des x, y n'est pas convexe, n'aura pas, en général, de solution z qui se présente comme une fonction uniforme de x, y à l'intérieur du contour considéré.

CHAPITRE IV.

APPLICATION AU CALCUL DES VARIATIONS.

6. On sait que si une fonction z, admettant des dérivées finies et continues des deux premiers ordres, réalise un extremum relatif de l'intégrale double

$$\text{(10)} \qquad I = \int\int f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

elle satisfait nécessairement à l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial p} + \frac{d}{dy}\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

ou

$$\text{(11)} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} r + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\, \partial q} s + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} t + \frac{\partial^2 f}{\partial p\, \partial z} p + \frac{\partial^2 f}{\partial q\, \partial z} q + \frac{\partial^2 f}{\partial p\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial q\, \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Cette équation est du type elliptique, si nous supposons le problème régulier, c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p\, \partial q}\right)^2 > 0.$$

Dans le cas particulier où f est indépendant de x, y, z, l'équation devient

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} r + 2\frac{\partial^2 f}{\partial p\, \partial q} s + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} t = 0.$$

On sait que cette équation admet toujours une solution unique du problème de Dirichlet à l'intérieur d'un contour convexe (*Math. Ann.*, t. LXIX, p. 127).

D'après ce que nous avons vu au paragraphe 4, le problème sera également possible à l'intérieur d'un contour non convexe, si le genre de l'équation est zéro; au contraire il deviendra impossible, en général, pour les contours non convexes, si le genre est égal à 2 (Remarque du paragraphe 5). Or nous allons démontrer que *le genre de l'équation de*

Lagrange est égal à zéro, si la croissance α de la fonction $f(x, y, z, p, q)$ par rapport à p, q est supérieure à 1.

En effet, supposons que, pour (p, q) très grands, on puisse développer f en série deux fois dérivables

$$f(x, y, z, p, q) = f_\alpha(x, y, z, p, q) + f_{\alpha_1}(x, y, z, p, q) + \ldots,$$

où f_{α_i} désigne une fonction [1] holomorphe par rapport aux variables réelles x, y, z et homogène et de degré α_i par rapport à p, q; de plus, $\alpha > \alpha_1 > \alpha_2, \ldots$. Dans ces conditions,

$$\mathrm{E} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2} p^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial p \, \partial q} pq + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} q^2 = \alpha(\alpha - 1) f_\alpha + \alpha_1(\alpha_1 - 1) f_{\alpha_1} + \ldots.$$

Par conséquent, *l'ordre de* E *est égal à l'ordre α de f pourvu qu'on ait $\alpha > 1$*; mais l'ordre de

$$(\mathrm{A} + \mathrm{C})(p^2 + q^2) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial q^2}\right)(p^2 + q^2)$$

ne peut, évidemment, être supérieur à α. Donc le genre de l'équation de Lagrange est égal à zéro.

Au contraire [2], si $\alpha = 1$, le degré de E s'abaisse. Le genre de l'équation de Lagrange est alors supérieur à zéro.

Par conséquent, *si la croissance de f est supérieure à* 1, *l'équation* (12) *admet une solution, même à l'intérieur d'un contour non convexe. Au contraire, si la croissance de f est égale à* 1, *l'équation* (12), *tout en admettant une solution dans le cas d'un contour convexe quelconque, pourra ne pas admettre de solution à l'intérieur d'un contour non convexe.*

---

[1] Il convient de préciser la nature de ces fonctions homogènes f_{α_i}, en ajoutant que $f_{\alpha_i} = (p^2 + q^2)^{\frac{\alpha_i}{2}} \varphi_0$, la fonction homogène φ_0 de degré 0 restant bornée quel que soit $\frac{p}{q}$. D'ailleurs pour que l'équation de Lagrange soit définie, il faut admettre que le terme principal f_α ne s'annule pas sans que $p = q = 0$.

[2] En vertu de la condition $\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} \frac{\partial^2 f}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial p \, \partial q}\right)^2 > 0$, on aura nécessairement $\alpha \geqq 1$, si f se met sous la forme indiquée.

7. Abordons à présent l'étude de l'équation générale de Lagrange. Voici d'abord une proposition générale :

Théorème. — *Si la croissance α de f est supérieure à* 1, *l'équation de Lagrange appartient à la classe* (L).

En effet, l'ordre de E, nous l'avons vu, est égal à α; d'autre part,

$$D = \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial p\,\partial z}p - \frac{\partial^2 f}{\partial q\,\partial z}q,$$

et, par conséquent, l'ordre de D est aussi, au plus, égal à α.

On a donc les théorèmes suivants, en particularisant la forme de f :

8. Théorème. — *Si*

$$f(x, y, z, p, q) = \mathfrak{F}(x, y, p, q) + \varphi(x, y, z), \tag{13}$$

le problème de Dirichlet sera possible quel que soit le contour (convexe ou non), si la croissance de $\mathfrak{F}$ est supérieure à 1 *et que* $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} > K > 0$.

Cela résulte du premier des théorèmes (3). D'ailleurs, on sait que le nombre de solutions ne dépasse jamais 1.

Le théorème subsiste si $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \geq 0$ *et, en particulier, lorsque φ est identiquement nul.* Mais la démonstration n'est pas aussi immédiate. Dans certains cas, on pourra utiliser la seconde des propositions (3); ainsi, par exemple, cela aura lieu si

$$D = \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial q\,\partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial p\,\partial x}$$

s'annule lorsqu'on y fait $z = p = q = 0$, et l'on conclura que le problème de Dirichlet, pour cette équation, est toujours possible.

Je signalerai encore un cas où l'on pourra éviter le raisonnement assez long qui va suivre : c'est celui où $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = -\infty$, pour $z = -\infty$, et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = +\infty$ pour $z = +\infty$.

On tire alors immédiatement de l'équation (11), en y faisant $p = q = 0$, que la solution z de cette équation ne peut avoir de maxima positifs et de minima négatifs supérieurs en valeur absolue à un nombre fixe donné d'avance. (On voit que la limitation de $|z|$ se fait, dans ce cas, sans faire intervenir l'hypothèse de $\alpha > 1$.) Mais, lorsque $\varphi = 0$, je ne vois pas de moyen simple pour limiter $|z|$.

Pour arriver à un résultat plus général, nous devrons nous appuyer sur le fait suivant, qui résulte immédiatement de la considération de la variation seconde du problème correspondant du calcul des variations : si z est une solution prenant des valeurs données sur un contour C de l'équation de Lagrange qui correspond à l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int\int_{\mathrm{C}} [\mathcal{F}(x, y, p, q) + \varphi(x, y, z)]\, dx\, dy \quad (\mathcal{F}''_{p^2} > 0,\ \mathcal{F}''_{p^2}\mathcal{F}''_{q^2} - (\mathcal{F}''_{p,q})^2 > 0,\ \varphi''_{z^2} \geqq 0),$$

la solution z réalise *le minimum absolu* de I.

En substituant donc à la place de z une fonction quelconque u qui prend les mêmes valeurs sur C, on obtiendra une limite supérieure M de l'extrémum de l'intégrale I.

Supposons, de plus, que φ a une limite inférieure, de sorte qu'on pourra affirmer que, si la solution z existe, on a nécessairement

$$(14) \qquad \int\int \mathcal{F}(x, y, p, q)\, dx\, dy < \mathrm{N},$$

N étant une constante fixée *a priori*.

En vertu de la théorie générale, on pourra affirmer l'existence de la solution, si l'on sait limiter *a priori* son module, et il suffira d'envisager un contour convexe (circulaire si l'on veut). On pourra y parvenir par la considération de l'inégalité (14) seulement, si l'on peut fixer un nombre K tel que pour $p^2 + q^2 > 1$ on ait

$$|\mathcal{F}(x, y, p, q)| < \mathrm{K}(p^2 + q^2)^{1+\alpha},$$

avec $\alpha > 0$.

En effet, l'inégalité (14) donne alors

$$\mathrm{H} = \int\int (p^2 + q^2)^{1+\alpha}\, dx\, dy < \mathrm{L},$$

L étant une nouvelle constante. Or, prenons comme origine de coordonnées polaires un point quelconque intérieur à C, où $|z| = m$.

Alors, *a fortiori*,

$$\iint \left|\frac{\partial z}{\partial \rho}\right|^{2+\alpha} \rho\, d\rho\, d\theta < \mathrm{L}.$$

Faisons ensuite le changement de variables

$$\rho^\alpha = \rho_1^{\alpha+1}, \qquad \frac{\alpha\, d\rho}{\rho} = \frac{(\alpha+1)\, d\rho_1}{\rho_1};$$

d'où

$$\iint \left(\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right)^{2+\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^{1+\alpha} d\rho_1\, d\theta < \mathrm{L}.$$

Mais, en supposant, comme nous le pouvons, sans restreindre la généralité, que z s'annule sur le contour, on voit que

$$\mathrm{G} = \iint \left|\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right| d\rho_1\, d\theta \geqq 2m\pi.$$

Soit, d'autre part,

$$\iint d\rho_1\, d\theta = \Omega,$$

et posons $\left|\dfrac{\partial z}{\partial \rho_1}\right|^{2+\alpha} = \mathrm{A}$.

Donc

$$2m\pi \leqq \mathrm{G} = \iint \mathrm{A}^{\frac{1}{2+\alpha}} d\rho_1\, d\theta$$

et

$$\mathrm{H}_1 = \iint \left|\frac{\partial z}{\partial \rho_1}\right|^{2+\alpha} d\rho_1\, d\theta = \iint \mathrm{A}\, d\rho_1\, d\theta < \left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)^{1+\alpha} \mathrm{L}.$$

Par conséquent, en décomposant l'intégrale G en deux parties : la première, où $\mathrm{A} \geqq \dfrac{(1+\alpha)\mathrm{H}_1}{\Omega}$, et la seconde, où $\mathrm{A} < \dfrac{(1+\alpha)\mathrm{H}_1}{\Omega}$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{G} &< \left[\frac{\Omega}{(1+\alpha)\mathrm{H}_1}\right]^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}} \iint \mathrm{A}\, d\rho_1\, d\theta + \left[\frac{(1+\alpha)\mathrm{H}_1}{\Omega}\right]^{\frac{1}{2+\alpha}} \Omega \\ &= \frac{2+\alpha}{(1+\alpha)^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}}\, \Omega^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\, \mathrm{H}_1^{\frac{1}{2+\alpha}}. \end{aligned}$$

D'où, enfin,

$$2m\pi < \frac{(2+\alpha)(1+\alpha)^{\frac{(1+\alpha)^2}{2+\alpha}}}{\alpha^{1+\alpha}}\, \Omega^{\frac{1+\alpha}{2+\alpha}}\, \mathrm{L}^{\frac{1}{2+\alpha}}.$$

Remarquons qu'il n'est pas possible de tirer une limite supérieure de $|z|$ de la considération seule de l'inégalité (14) dans le cas où $\alpha \leqq 0$. Dans ce cas, c'est-à-dire lorsque la croissance de $\mathcal{F}$ ne dépasse pas 2, il est nécessaire de considérer en même temps l'équation de Lagrange. Le procédé que nous emploierons est emprunté au paragraphe 7 de mon Mémoire des *Math. Ann.*, t. LXIX.

Nous allons, en effet, faire usage de l'inégalité

$$\int\int_C \frac{1+(1-\alpha)(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{1+\alpha}}(rt-s^2)\,dx\,dy \geqq 0 \tag{15}$$

qui a lieu à l'intérieur d'un contour convexe quelconque pour toute fonction qui s'annule sur ce contour.

Il suffira, d'après ce qui a été dit plus haut, de supposer le contour C circulaire.

Soit

$$P = \int\int \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^\alpha}\,dx\,dy.$$

En intégrant par partie, on a

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{rt\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} \\
&= \int \frac{pt\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} - \int\int \frac{p\dfrac{\partial t}{\partial x}\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha\int\int \frac{pt(pr+qs)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}} \\
&= -\int \frac{rq\,dx}{(1+p^2+q^2)^\alpha} - \int\int \frac{q\dfrac{\partial r}{\partial y}\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha\int\int \frac{rq(ps+qt)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int\int \frac{s^2\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} \\
&= -\int \frac{ps\,dx}{(1+p^2+q^2)^\alpha} - \int\int \frac{p\dfrac{\partial s}{\partial y}\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha\int\int \frac{ps(ps+qt)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}} \\
&= \int \frac{qs\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} - \int\int \frac{q\dfrac{\partial s}{\partial x}\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha\int\int \frac{qs(pr+qs)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P} &= \int \frac{p\,dq}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha \iint \frac{p^2(rt-s^2)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}} \\
&= -\int \frac{q\,dp}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + 2\alpha \iint \frac{q^2(rt-s^2)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{p\,dq-q\,dp}{(1+p^2+q^2)^\alpha} + \alpha \iint \frac{(p^2+q^2)(rt-s^2)\,dx\,dy}{(1+p^2+q^2)^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{1}{2}\int \frac{p\,dq-q\,dp}{(1+p^2+q^2)^\alpha} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 d\theta}{\left[1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2\right]^\alpha} \geqq 0.$$

Donc (¹), pour $0 \leqq \alpha \leqq 1$,

$$\iint \frac{1+(1-\alpha)(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{1+\alpha}}(rt-s^2)\,dx\,dy > 0.$$

Nous emploierons cette inégalité en y faisant $\alpha = \frac{1}{2}$, d'où

$$\iint \frac{1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}(rt-s^2)\,dx\,dy > 0. \tag{15 bis}$$

Cela posé, reprenons l'équation

$$\mathrm{A}r + 2\mathrm{B}s + \mathrm{C}t = \mathrm{D};$$

élevons ses deux membres au carré et multiplions-les par

$$\frac{1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)}.$$

(¹) Le signe d'égalité peut être rejeté, si z n'est pas identiquement nul. On peut remarquer que pour $\alpha = 1$, on a $0 \leqq \iint \frac{dx\,dy}{\mathrm{RR}_2} \leqq \Pi$, R et R_1 étant les rayons de courbure principaux, puisque dans ce cas il vient

$$\iint \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int \frac{\left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}{1+\left(\dfrac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2}\,d\theta.$$

On a donc

$$\iint \frac{(\mathrm{A}r + 2\mathrm{B}s + \mathrm{C}t)^2 \left[1 + \frac{1}{2}(p^2+q^2)\right]}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

$$= \iint \frac{\mathrm{D}^2\left[1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)\right]}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

et, à cause de l'inégalité (15 *bis*),

$$\iint \frac{1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{(\mathrm{A}r+2\mathrm{B}s+\mathrm{C}t)^2}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2} + 2(s^2-rt)\right]dx\,dy$$

$$< \iint \frac{\mathrm{D}^2\left[1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)\right]}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

En développant le premier membre, on a

$$\iint \frac{1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{\left(\mathrm{A}r+2\mathrm{B}s+\frac{\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}}t\right)^2}{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2} + 2\left(s+\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}t\right)^2 + \frac{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)}{\mathrm{A}^2}t^2\right]dx\,dy$$

$$< \iint \frac{\mathrm{D}^2\left[1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)\right]}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy$$

et, *a fortiori*,

$$(16)\qquad \iint \frac{1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,\frac{\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2}{\mathrm{A}^2}\,t^2\,dx\,dy < \iint \frac{\mathrm{D}^2\left[1+\frac{1}{2}(p^2+q^2)\right]}{(\mathrm{AC}-\mathrm{B}^2)(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy.$$

Appliquons cette inégalité à l'équation de Lagrange (11), en supposant que le terme principal f_α, de degré $\alpha > 1$, est non seulement différent de zéro, mais que $\delta = \frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p^2}\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 f_\alpha}{\partial p\,\partial q}\right)^2 > 0$ (pour $p^2+q^2>0$). Cela étant, le degré de δ sera $2\alpha-4$, mais l'ordre de $\mathrm{A} = \frac{\partial^2 f}{\partial p^2}$

sera $\alpha - 2$; par conséquent, on pourra fixer un nombre K tel que

$$\frac{AC - B^2}{A^2} > \frac{1}{K}, \qquad \frac{D^2}{AC - B^2} < K(1 + p^2 + q^2),$$

puisque l'ordre de D^2 est, au plus, égal à $2\alpha - 2$, dans le cas où $f(x, y, z, p, q)$ a la forme (13).

On a donc

$$\int\int \frac{1 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} t^2\,dx\,dy < K^2 \int\int (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy < \frac{1}{2} N_1,$$

la constante N_1 étant déterminée à cause de l'inégalité (14). D'où

$$\int\int \frac{t^2\,dx\,dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} < N_1.$$

Et enfin

$$\left[\int\int |t|\,dx\,dy\right]^2 < \int\int \frac{t^2\,dx\,dy}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}} \int\int (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}\,dx\,dy < \frac{N_1^2}{K^2}$$

ou

$$\int\int |t|\,dx\,dy < \frac{N_1}{K}.$$

On trouvera, par le même procédé,

$$\int\int |r|\,dx\,dy < \frac{N_1}{K}, \qquad \int\int |s|\,dx\,dy < \frac{N_1}{K}.$$

Or ces inégalités conduisent immédiatement à une limite supérieure de $|z|$.

Corollaire. — *Le problème du calcul des variations relatif à l'intégrale*

$$\int\int [\mathcal{F}(x, y) + \varphi(x, y, z)]\,dx\,dy, \quad \text{où} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \geqq 0$$

admettra toujours une solution quel que soit le contour (convexe ou non), si l'on peut fixer un nombre K, *tel que*

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^2}\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p\,dq}\right)^2 > K > 0.$$

En effet, dans ce cas, la croissance α de $\mathcal{F}$ est au moins égale à 2.

9. Il nous reste à examiner le cas où *la croissance* $\alpha = 1$. Cette fois, l'équation de Lagrange n'est plus nécessairement de la classe (L) et *n'est jamais de genre zéro.*

La seconde propriété prouve que, pour les contours *non convexes*, le problème de Dirichlet sera, en général, impossible. Mais pour les contours *convexes* il sera nécessaire, pour que le problème soit toujours possible, que l'équation appartienne à la classe (L).

Considérons l'exemple suivant, que j'ai donné dans une Note des *Comptes rendus* (18 juillet 1910) :

Soit

$$\mathrm{I} = \int\int \sqrt{(1 + x^2 + y^2)(1 + p^2 + q^2)}\, dx\, dy. \tag{17}$$

Dans ce cas l'équation de Lagrange $\left[\text{après la multiplication par } \dfrac{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$ a la forme

$$r(1 + q^2) - 2pqs + (1 + p^2)t = -\frac{(px + qy)(1 + p^2 + q^2)}{1 + x^2 + y^2}.$$

Cette équation n'appartient pas évidemment à la classe (L), puisque $\mathrm{E} = p^2 + q^2$, tandis que l'ordre de D est égal à 3. Le problème de l'extrémum de cette intégrale n'admet donc pas, en général, de solution régulière (§ 5).

Ce problème, qui diffère si peu du problème de Plateau, rend compte, il me semble, des difficultés qu'on a dû rencontrer en cherchant des démonstrations directes de l'existence d'une surface minima passant par un contour donné.

Ainsi, *la condition que l'équation de Lagrange appartienne à la classe* (L) *sera nécessaire et suffisante* [1] *pour que le problème soit possible à l'intérieur des contours convexes, si l'une des deux circonstances suivantes se présente : ou bien il existe au moins une solution régulière*

---

[1] L'inégalité $\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^2}\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial q^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \mathcal{F}}{dp\, dq}\right)^2 > 0$ est naturellement supposée vérifiée.

quelconque dans toute région donnée, ou bien, pour $z = +\infty$, *on a* $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = +\infty$ *et, pour* $z = -\infty$, *on a* $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = +\infty$, *ou encore* $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \geqq \mathrm{K} > 0$.

Je ne connais pas d'exemple où la première de ces circonstances ne se présente pas (lorsque l'équation provient d'un problème régulier du calcul des variations), mais il serait intéressant de savoir si l'on peut se débarrasser de cette restriction.

Considérons le second exemple de la même Note

$$\mathrm{I} = \int\int \sqrt{1 + x^2 + y^2 + p^2 + q^2}\, dx\, dy. \tag{18}$$

L'équation de Lagrange [après la multiplication par

$$\sqrt{(1 + x^2 + y^2 + p^2 + q^2)^3}\,]$$

a la forme

$$(1 + q^2 + x^2 + y^2)\, r - 2pqs + (1 + p^2 + x^2 + y^2)\, t = px + qy.$$

On voit que cette équation est de la classe (L), puisque

$$\mathrm{E} = (1 + x^2 + y^2)(p^2 + q^2)$$

et, de plus, elle admet la solution $z = 0$. Dans ce cas, il existe donc toujours une surface extrémale passant par un contour à projection convexe quelconque.

10. Pour pouvoir faire une étude analogue du cas général où la fonction $f(x, y, z, p, q)$, sous le signe d'intégration, n'a pas la forme spéciale $\mathcal{F}(x, y, p, q) + \varphi(x, y, z)$, nous devrons reprendre la théorie des équations du type elliptique, que nous allons considérer sous la forme la plus générale

$$\mathrm{F}(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad 4\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial t} - \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial s}\right)^2 > 0.$$

Le lemme fondamental de la théorie (*loc. cit.*, p. 115) avait été établi sous la condition que $\mathrm{F}'_z \leqq 0$ $\left(\text{comme toujours, on suppose le signe de F ainsi choisi que } \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial r} > 0\right)$. Mais en reprenant l'analyse qui conduit à ce lemme, on voit qu'il subsiste dans des conditions plus générales.

L'équation qui joue un rôle essentiel est l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial r} r_1 + \frac{\partial F}{\partial s} s_1 + \frac{\partial F}{\partial t} t_1 + \frac{\partial F}{\partial p} p_1 + \frac{\partial F}{\partial q} q_1 + \frac{\partial F}{\partial z} z_1 = 0, \tag{19}$$

à laquelle satisfont, en particulier, les dérivées successives de la solution z par rapport à un paramètre quelconque λ, dont dépendent les données sur le contour. On donne quelquefois à l'équation (19) le nom d'*équation aux variations*. On dira que la solution z est *simple* à l'intérieur d'un contour C, lorsque la solution z_1 de l'équation aux variations ne peut être nulle sur ce contour sans être nulle identiquement. Le lemme généralisé peut s'énoncer comme il suit :

Si z_0 est une solution analytique simple de l'équation analytique du type elliptique

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t, \lambda) = 0$$

correspondant à $\lambda = \lambda_0$, qui s'annule sur la circonférence C *et admet des dérivées bornées des deux* [1] *premiers ordres sur* C *comme à son intérieur, il existe pour toute valeur de λ satisfaisant à l'inégalité $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ une solution z de l'équation jouissant des mêmes propriétés que z_0.*

En effet, le lemme sera évidemment démontré si nous retrouvons dans le cas général les inégalités (23) du paragraphe 12 du Mémoire cité. Or, en refaisant les raisonnements par lesquels celles-ci avaient été obtenues, on constate que le seul endroit où l'on a utilisé la condition $F'_z \leqq 0$ est celui où on limite supérieurement par l'inégalité (13) du paragraphe 7 (p. 95) le module de la solution z qui s'annule sur la circonférence C de l'équation linéaire

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y} + 2D\frac{\partial z}{\partial x} + 2E\frac{\partial z}{\partial y} + Fz = M \qquad (F \leqq 0).$$

D'ailleurs, si l'on remarque que la réduction d'une équation linéaire à la forme canonique est indépendante du terme Fz, on voit que les inégalités (23) seront vraies dans tous les cas où l'on aura pour l'équation réduite de l'équation aux variations

$$r + t + ap + bq + cz = M, \tag{20}$$

(1) *Voir* les paragraphes 15 et 20 du Mémoire cité.

une inégalité équivalente à l'inégalité (13) mentionnée plus haut. Or cette inégalité peut être donnée dans tous les cas où la solution de l'équation (20), pour $M = 0$, s'annulant sur le contour C, est nulle identiquement; cela résulte, en particulier, du Mémoire de M. Picard [*Sur quelques applications de l'équation de Fredholm*, § 16 (*Rendiconti del Circolo Math. di Palermo*, t. XXII)], ou bien de la formule de Green généralisée.

11. On déduit, en particulier, du lemme généralisé le théorème suivant :

Théorème. — *Si une équation du type elliptique*

$$Ar + 2Bs + Ct = D$$

n'admet que des solutions simples, le problème de Dirichlet sera toujours (à l'intérieur d'un cercle ou d'un contour convexe) possible, toutes les fois où il sera possible de limiter a priori $|z|$, $|p|$ et $|q|$.

Par conséquent, on retrouve aussi la propriété des équations (L) :

Si une équation (L) n'admet que des solutions simples, le problème de Dirichlet, à l'intérieur d'un contour convexe, est toujours possible lorsqu'on sait limiter a priori $|z|$.

Il faut cependant remarquer que la démonstration de cette proposition, donnée au paragraphe 2, a besoin d'être complétée dans le cas où la croissance de $\frac{\partial D}{\partial z}$ (supposé de signe quelconque) serait égale à celle [1] de E; ce cas, dont l'étude peut être faite par les mêmes méthodes, ne se présentera pas si l'on suppose que le terme principal f_α de f est indépendant de z.

12. Abordons à présent le problème général de l'extrémum de

---

[1] Dans le cas où la croissance de $\frac{\partial D}{\partial z}$ est inférieure à celle de E, l'inégalité (7 *bis*) subsiste puisque $\frac{\partial D_m}{\partial z} = 0$.

l'intégrale

$$\iint f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy,$$

lorsque *la croissance* α *est supérieure à* 1.

On sait que, dans ces conditions, *l'équation de Lagrange est à la fois de la classe* (L) *et de genre zéro.*

Nous arrivons ainsi au théorème suivant :

Théorème. — *Si la fonction f est telle que la forme quadratique*

$$(21) \qquad f''_{z^2}\delta_1^2 + f''_{p^2}\delta_2^2 + f''_{q^2}\delta_3^2 + 2f''_{zp}\delta_1\delta_2 + 2f''_{zq}\delta_1\delta_3 + 2f''_{pq}\delta_2\delta_3$$

est définie et que, de plus, on a, quel que soit z, $|f| < K(1+p^2+q^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, K *étant une constante fixe et* $\alpha > 1$, *il existe toujours une surface extrémale passant par un contour donné (à projection convexe ou non).*

En effet, la condition (21) est suffisante pour que la solution, lorsqu'elle existe, soit simple, et réalise l'extrémum absolu; pour limiter $|z|$, on peut donc reproduire le raisonnement du paragraphe 8.

Remarque. — Si $\alpha = 1$, le problème ne sera plus toujours possible. La condition nécessaire pour l'existence d'une solution est que l'équation de Lagrange soit de la classe (L). Cette condition est, aussi, suffisante, si l'on suppose, en outre, que pour $|z|$ très grand, $z(f'_z - f''_{px} - f''_{qy}) \geqq 0$, lorsque $p = q = 0$; cette supposition, qui permet de donner immédiatement une limite supérieure de $|z|$, pourrait être remplacée par d'autres hypothèses analogues plus ou moins restrictives (comparer avec le paragraphe 9). Ainsi, on vérifiera que tandis que le problème est, en général, impossible pour l'intégrale

$$\iint \left(\sqrt{1+p^2+q^2} + z^2\right) dx\, dy,$$

qui conduit à l'équation

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 2z(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}},$$

il admet, au contraire, toujours (à l'intérieur des contours convexes) une solution dans le cas de l'intégrale

$$\iint \sqrt{1+p^2+q^2+z^2}\,dx\,dy;$$

dans ce dernier cas, en effet, l'équation de Lagrange est

$$(1+z^2+q^2)r - 2pqs + (1+z^2+p^2)t = z(z^2+2p^2+2q^2+1).$$

13. Il importe de souligner le fait suivant :

Dans le cas où la forme quadratique (21) *est définie, il n'existe pas d'autre surface ayant des dérivées finies et continues du premier ordre qui réalisent le minimum absolu de l'intégrale* $\iint f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$, *que la solution correspondante de l'équation de Lagrange.*

Ainsi, quoique la méthode ordinaire du calcul des variations pour établir l'équation de Lagrange suppose, *a priori*, que la solution admette des dérivées secondes, on reconnaît, *a posteriori*, qu'il ne peut exister de surfaces sans dérivées secondes réalisant le *minimum absolu.*

Un second point qu'il faut noter est, qu'*il résulte de la méthode même par laquelle la solution de l'équation de Lagrange est obtenue, que la surface extrémale est analytique.*

Ainsi, sans aucune restriction :

Une surface qui réalise le minimum absolu de l'intégrale

$$\iint f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy,$$

sous la condition (21) *et lorsque le problème de Dirichlet correspondant est possible, est nécessairement analytique.*

Remarquons pourtant qu'il ne résulte pas, de ce qui précède, que des minima *relatifs* ne puissent exister pour des surfaces sans dérivées secondes. Mais dans les cas considérés (par exemple pour les surfaces minima), cela est également impossible. Pour le voir, il est indispensable de nous appuyer sur une proposition dont la démonstration sera publiée prochainement dans un Mémoire consacré à diverses généralisations des propriétés des fonctions harmoniques ([1]).

Nous avions toujours supposé les données sur le contour analytique. L'application du théorème de Weierstrass, comme il est facile de le vérifier et comme je l'ai montré dans mon Mémoire russe (Communic. de la Soc. Math. de Kharkow, 1908), permet de remplacer les fonctions analytiques sur le contour par des fonctions dérivables un certain nombre de fois. Mais par des considérations que j'ai résumées dans la Note citée, on arrive à cette proposition plus générale dont nous avons besoin en ce moment :

Si le problème de Dirichlet est toujours possible pour toute fonction analytique sur un contour convexe, il est également possible si la fonction est supposée seulement continue sur le contour.

On pourrait donc découper, sur la surface qui réaliserait un minimum relatif, une partie suffisamment petite, au moyen d'un cylindre circulaire, pour que la surface extrémale passant par le même contour (et qui existe d'après le théorème énoncé) se trouve dans le domaine du minimum de la surface considérée, ce qui est impossible.

---

(1) *Voir* ma Note des *Comptes rendus* du 10 octobre 1910.