ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

D.-R. CURTISS

Sur la théorie des fonctions hypergéométriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 23 (1906), p. 121-143
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1906_3_23__121_0>

SUR LA THÉORIE

DES

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES,

PAR M. D.-R. CURTISS.

Le Mémoire fondamental de Riemann sur les fonctions hypergéométriques (¹) a son intérêt principal dans ses méthodes puissantes et originales qui ont conduit aux résultats des plus importants dans la théorie moderne des équations différentielles linéaires. Mais dans ces considérations l'illustre géomètre a exclu les cas où les exposants d'un point singulier diffèrent par un nombre entier, et dans ses conclusions il y a une inexactitude quand certaines sommes des exposants sont des entiers. M. Schilling (²) a examiné le groupe de monodromie dans ces cas par des méthodes géométriques et M. Ritter (³) a aussi traité ces questions, toutefois avec un manque de rigueur signalé par M. Schilling. Dans la thèse de l'auteur (⁴) on peut trouver une généralisation des méthodes de Riemann qui s'applique non seulement aux familles hypergéométriques, mais aussi bien aux familles d'une

---

(¹) *Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe* $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *darstellbaren Functionen*. Werke, 1857, p. 67. *Voir* aussi le cours lithographié de M. KLEIN sur les fonctions hypergéométriques, 1893-1894.

(²) *Math. Ann.*, t. XLVI, 1895, p. 538.

(³) *Math. Ann.*, t. XLVIII, 1896, p. 1.

(⁴) *Harvard University*. Imprimée dans les *Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences*, t. XIII, 1904, nº 1.

classe beaucoup moins restreinte. C'est de cette source que j'ai tiré la plus grande partie de ce qui suit, tout en faisant quelques changements et additions.

Nous n'essaierons pas une discussion de toutes les questions considérées par Riemann, l'étude du groupe de monodromie étant notre but principal.

1. Une famille hypergéométrique, dans le sens que nous donnons à ce terme, est formée par l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$\begin{aligned}(1)\quad & \frac{d^2P}{dx^2}+\left(\frac{1-\lambda'-\lambda''}{x-a}+\frac{1-\mu'-\mu''}{x-b}+\frac{1-\nu'-\nu''}{x-c}\right)\frac{dP}{dx}\\ &+\left[\frac{\lambda'\lambda''(a-b)(a-c)}{x-a}+\frac{\mu'\mu''(b-a)(b-c)}{x-b}\right.\\ &\left.+\frac{\nu'\nu''(c-a)(c-b)}{x-c}\right]\frac{P}{(x-a)(x-b)(x-c)}=\end{aligned}$$

où λ', λ'', μ', μ'', ν', ν'' sont assujettis à la seule condition

$$\lambda'+\lambda''+\mu'+\mu''+\nu'+\nu''=1.$$

De l'équation (1) on peut tirer les propriétés d'une telle famille. Cependant Riemann a préféré partir d'une définition explicite et nous le suivrons dans cette voie.

On peut donner à la définition de Riemann la forme suivante :

I. Toute fonction de la famille est holomorphe dans tout le plan, exception faite de trois points a, b, c.

II. P', P'', P''' étant trois branches quelconques appartenant à la famille, elles satisfont à une équation

$$c'P'+c''P''+c'''P'''=0$$

où c', c'', c''' sont des constantes.

III. Il existe des nombres λ' et λ'' dont la différence n'est pas un entier et des branches $P^{(\lambda')}$, $P^{(\lambda'')}$ ayant pour développements autour de a

$$P^{(\lambda')} = (x-a)^{\lambda'} \sum_{n=0}^{n=+\infty} g'_n (x-a)^n, \qquad g'_0 \neq 0,$$

$$P^{(\lambda'')} = (x-a)^{\lambda''} \sum_{n=0}^{n=+\infty} g''_n (x-a)^n, \qquad g''_0 \neq 0.$$

De plus il y a des branches $P^{(\mu')}$, $P^{(\mu'')}$ ayant des développements analogues autour de b et $P^{(\nu')}$, $P^{(\nu'')}$ avec des propriétés semblables relatives à c.

IV. Les nombres λ', λ'', μ', μ'', ν', ν'' sont liés par la relation

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 1.$$

Afin d'admettre les cas où $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$, $\nu' - \nu''$ sont des entiers, nous remplaçons III et IV ci-dessus par les définitions suivantes :

III'. Il existe deux branches linéairement indépendantes, P' et P'', et un nombre α tel que

$$\lim_{x=a} (x-a)^{\alpha} P' = 0,$$
$$\lim_{x=a} (x-a)^{\alpha} P'' = 0.$$

IV'. Dans tout point en dehors de a, b, c aucune branche de la famille n'a un zéro d'ordre plus élevé que 1.

Nous allons maintenant rappeler des conséquences directes de ces définitions modifiées, sans toutefois nous arrêter trop longtemps sur des considérations qui sont déjà assez familières.

Des définitions I et II et de l'existence des branches linéairement indépendantes (*voir* III'), il suit qu'une famille hypergéométrique est *binaire*, c'est-à-dire qu'on peut exprimer chaque branche comme une combinaison linéaire homogène à coefficients constants de deux branches linéairement indépendantes, et réciproquement toute expression de cette espèce représente une branche de la famille. Suivant l'usage ordinaire de la théorie des équations différentielles linéaires, nous dirons que l'ensemble de deux branches ainsi constitué forme un *système fondamental*. On déduit par des procédés bien connus l'existence du groupe de monodromie d'une telle famille; on montre aussi que les substitutions subies par un système fondamental quand la variable décrit un contour fermé quelconque sont des combinaisons de trois *substitutions fondamentales* S_a, S_b, S_c qui correspondent à des lacets entourant les points a, b, c respectivement. Nous allons suivre Riemann en choisissant ces lacets de manière que nous ayons

$$S_c S_b S_a = 1, \tag{2}$$

le symbole 1 désignant la substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si, pour un système fondamental (P', P''), nous avons

$$S_a = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix},$$

l'équation

$$\begin{vmatrix} m_1 - \rho & n_1 \\ m_2 & n_2 - \rho \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

sera la même pour tout autre système fondamental. Les deux racines de (3), ρ'_a, ρ''_a, que nous appellerons les *multiplicateurs* de la famille pour le point a, sont ainsi des invariants de la famille.

Si $\rho'_a \neq \rho''_a$, il existe un système fondamental (P'_a, P''_a) pour lequel S_a a la forme

$$\begin{pmatrix} \rho'_a & 0 \\ 0 & \rho''_a \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dans ce cas a sera un point singulier *ordinaire*.

Si $\rho'_a = \rho''_a$, il est possible qu'il y ait encore une S_a de la forme (4), mais alors chaque système fondamental aura la même S_a. Pour une telle famille nous donnerons au point a le nom de *point apparent*.

Dans le cas où les multiplicateurs pour a sont égaux, mais où il n'existe pas une S_a de la forme (4), il y aura cependant des systèmes fondamentaux, que nous désignerons encore par le symbole (P'_a, P''_a), pour lesquels S_a est de la forme

$$\begin{pmatrix} \rho'_a & 0 \\ \rho'_a C_a & \rho''_a \end{pmatrix}. \tag{5}$$

C_a étant une constante $\neq 0$, dont la valeur dépend du choix de (P'_a, P''_a). Nous appellerons alors a un *point logarithmique* de la famille.

Si k', k'' sont des solutions quelconques des équations

$$\rho'_a = e^{2\pi i k'}, \qquad \rho''_a = e^{2\pi i k''},$$

les systèmes fondamentaux que nous avons désignés par le symbole (P'_a, P''_a) auront dans tous les cas la forme

$$(6) \qquad \begin{cases} P'_a = (x-a)^{k'}\,\Phi'(x), \\ P''_a = (x-a)^{k''}\,\Phi''(x) + \dfrac{C_a}{2\pi i} P'_a \log(x-a), \end{cases}$$

où $\Phi'(x)$ et $\Phi''(x)$ sont des fonctions uniformes dans le voisinage de a, et où C_a est une constante égale à zéro si a n'est pas un point logarithmique.

En se servant de la définition III', on démontre facilement l'existence de deux nombres λ', λ'', les *exposants* de la famille pour le point a, satisfaisant aux équations

$$\rho'_a = e^{2\pi i \lambda'}, \qquad \rho''_a = e^{2\pi i \lambda''},$$

et de systèmes fondamentaux particuliers, que nous désignerons par le symbole $(P^{(\lambda')}, P^{(\lambda'')})$, pour lesquels on a les développements autour de a :

$$(7) \qquad \begin{cases} P^{(\lambda')} = (x-a)^{\lambda'} \displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} g'_n (x-a)^n \qquad g'_0 \neq 0, \\ P^{(\lambda'')} = (x-a)^{\lambda''} \displaystyle\sum_{n=0}^{n=+\infty} g''_n (x-a)^n + \dfrac{C_a}{2\pi i} P^{(\lambda')} \log(x-a). \end{cases}$$

Comme précédemment, $C_a = 0$ si a est un point ordinaire ou apparent. Nous prendrons $g''_0 \neq 0$ sauf quand, a étant logarithmique, une telle notation donnerait $\lambda' - \lambda'' < 0$; dans ce cas nous supposerons nuls un nombre suffisant de coefficients g''_n pour que l'on ait $\lambda' = \lambda''$. Si a est un point ordinaire, $\lambda' - \lambda''$ n'est pas un nombre entier. Dans le cas où a est un point apparent, nous choisirons la notation de manière que le nombre entier $\lambda' - \lambda''$ soit positif. La convention déjà adoptée quand a est logarithmique fait que le nombre $\lambda' - \lambda''$ est un entier positif ou zéro.

On voit que la notation (P'_a, P''_a) coïncide avec la notation $(P^{(\lambda')}, P^{(\lambda'')})$ à moins que a ne soit un point apparent. Dans ce dernier cas, tout système fondamental a le symbole (P'_a, P''_a), mais il existe des systèmes qui n'ont pas le symbole $(P^{(\lambda')}, P^{(\lambda'')})$.

Dans ce qui précède nous avons supposé que a est un point à distance finie. Si, au contraire, a est à l'infini, il faut remplacer $(x - a)$ par $\frac{1}{x}$ dans les formules (6) et (7).

De même, on a pour b et c des multiplicateurs ρ'_b, ρ''_b et ρ'_c, ρ''_c, auxquels correspondent des exposants μ', μ'' et ν', ν'', respectivement. Nous emploierons ici une notation analogue à la notation des formules (6) et (7).

D'après la définition II, il existe entre trois systèmes (P'_a, P''_a), (P'_b, P''_b), (P'_c, P''_c) de la même famille une relation

$$(8)\qquad \begin{cases} P'_a = \alpha P'_b + \beta P''_b = \alpha_1 P'_c + \beta_1 P''_c, \\ P''_a = \gamma P'_b + \delta P''_b = \gamma_1 P'_c + \delta_1 P''_c, \end{cases}$$

que nous écrirons plus brièvement

$$(P'_a, P''_a) = B(P'_b, P''_b) = C(P'_c, P''_c).$$

Comme pour tout système fondamental les déterminants de S_a, S_b, S_c sont égaux à $\rho'_a\rho''_a$, $\rho'_b\rho''_b$, $\rho'_c\rho''_c$, on a d'après l'équation (2)

$$(9)\qquad \rho'_a\rho''_a\rho'_b\rho''_b\rho'_c\rho''_c = 1$$

ou

$$\lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = \text{un entier.}$$

Pour achever l'identification des définitions IV' et IV on considère l'expression

$$D = P' \frac{dP''}{dx} - P'' \frac{dP'}{dx}.$$

Comme on le sait, le seul effet de la substitution d'un autre système fondamental au système (P', P'') est de multiplier D par une constante. On voit facilement que les termes logarithmiques disparaissent dans les développements de D autour de a, b, c, et qu'en effet

$$D = (x-a)^{\lambda'+\lambda''-1}(x-b)^{\mu'+\mu''-1}(x-c)^{\nu'+\nu''-1}\psi(x),$$

$\psi(x)$ étant un polynome. De plus, en se servant de la définition IV′ on peut démontrer que $\psi(x)$ est une constante $\neq 0$, et que D a le point à l'infini pour zéro d'ordre 2. Par conséquent on a l'identité

$$2 = -(\lambda'+\lambda''-1) - (\mu'+\mu''-1) - (\nu'+\nu''-1),$$

ou

$$\lambda'+\lambda''+\mu'+\mu''+\nu'+\nu'' = 1, \tag{10}$$

comme dans la définition IV.

Dans ce qui précède nous avons supposé que a, b, c sont tous des points à distance finie. S'il n'en est pas ainsi, il est facile de voir la modification qu'il faut apporter au raisonnement.

Nous avons ainsi défini une famille de fonctions que nous désignerons par le symbole de Riemann

$$P\begin{pmatrix} a & b & c \\ \lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' \end{pmatrix},$$

et qui est identique, comme on peut le démontrer sans difficulté [1], avec la famille des solutions de l'équation différentielle (1). Mais il faut noter que, bien qu'il y ait symétrie entre les trois premières colonnes du symbole, les exposants d'un même couple ne peuvent pas être permutés entre eux si leur différence est un nombre entier. Il n'y a pas d'autre changement à apporter au paragraphe II du Mémoire de Riemann. En particulier, une transformation linéaire convenablement choisie change les trois points singuliers en trois autres quelconques, les exposants restant invariants. Par conséquent, on peut ramener l'étude d'une famille hypergéométrique quelconque à celle d'une famille à points singuliers 0, ∞, 1.

---

[1] *Voir* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, où l'on trouve une méthode qui s'applique ici avec peu de changement.

2. Nous sommes maintenant en mesure d'étudier comment il faut modifier le théorème de Riemann d'après lequel les exposants déterminent le groupe de monodromie, c'est-à-dire que deux familles ont le même groupe si leurs exposants correspondants ne diffèrent que par des entiers. Dans ce dessein nous suivrons l'illustre géomètre en faisant un examen des formules (8).

Mais il faut d'abord préciser ce que l'on entend par le terme *familles ayant le même groupe*. Nous désignerons ainsi deux familles hypergéométriques P et $\overline{P}$ aux mêmes points singuliers a, b, c, s'il existe dans une famille un système fondamental (P', P''), et dans l'autre un système $(\overline{P}', \overline{P}'')$, tels que pour un contour fermé quelconque les deux systèmes subissent toujours la même substitution, l'un et l'autre. Nous appellerons alors les deux systèmes (P', P''), $(\overline{P}', \overline{P}'')$, *systèmes correspondants*. Mais, puisque, dans ce cas, les systèmes fondamentaux

$$\begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} (P', P'') \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} (\overline{P}', \overline{P}''),$$

où $m_1 n_2 - m_2 n_1 \neq 0$, seront aussi des systèmes correspondants, on voit que si deux familles hypergéométriques ont le même groupe, tout système fondamental de l'une a son correspondant dans l'autre [1].

Par sa définition même, un système fondamental (P'_a, P''_a) d'une famille P a la substitution caractéristique

$$S_a = \begin{pmatrix} \rho'_a & 0 \\ \rho'_a C_a & \rho''_a \end{pmatrix}.$$

Alors un système correspondant d'une famille $\overline{P}$ est nécessairement un système $(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a)$ ayant la même valeur de C_a que (P'_a, P''_a). Même remarque pour b et c. De plus, il est évident que *toutes les familles ayant le même groupe possèdent les mêmes multiplicateurs*.

Une propriété importante de familles ayant le même groupe est exprimée par le théorème suivant :

---

[1] En effet, il y aura une infinité de systèmes correspondants; si, par exemple, (P', P'') correspond à $(\overline{P}', \overline{P}'')$, il en sera de même pour tout système (kP', kP''), k étant une constante quelconque.

Si (P', P'') *et* $(\overline{P}', \overline{P}'')$ *sont deux systèmes fondamentaux correspondants (choisis d'ailleurs arbitrairement) de deux familles ayant le même groupe, et si* (P', P'') *est relié à certains systèmes fondamentaux* (P'_a, P''_a), (P'_b, P''_b), (P'_c, P''_c) *par la formule*

$$(P', P'') = A'(P'_a, P''_a) = B'(P'_b, P''_b) = C'(P'_c, P''_c),$$

on a alors pour l'autre famille une formule

$$(\overline{P}', \overline{P}'') = A'(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a) = B'(\overline{P}'_b, \overline{P}''_b) = C'(\overline{P}'_c, \overline{P}''_c),$$

les constantes associées C_a, C_b, C_c, *ainsi que les coefficients, étant les mêmes dans les deux formules.*

En effet, le système fondamental

$$(P'_a, P''_a) = A'^{-1}(P', P'')$$

correspondra au système $A'^{-1}(\overline{P}', \overline{P}'')$. Par conséquent, ce dernier sera un système $(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a)$ avec la même constante associée C_a que celle qui appartient à (P'_a, P''_a). Nous aurons alors

$$(\overline{P}', \overline{P}'') = A'(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a);$$

le même raisonnement s'applique aux autres parties des formules.

En particulier, si une famille P renferme des systèmes fondamentaux (P'_a, P''_a), (P'_b, P''_b), reliés entre eux par une formule

$$\text{(11)} \qquad \begin{cases} P'_a = \alpha P'_b + \beta P''_b, \\ P''_a = \gamma P'_b + \delta P''_b, \end{cases}$$

une autre famille $\overline{P}$ ayant le même groupe possède des systèmes $(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a)$, $(\overline{P}'_b, \overline{P}''_b)$, qui satisfont aux équations

$$\text{(12)} \qquad \begin{cases} \overline{P}'_a = \alpha \overline{P}'_b + \beta \overline{P}''_b, \\ \overline{P}''_a = \gamma \overline{P}'_b + \delta \overline{P}''_b, \end{cases}$$

les constantes C_a, C_b étant les mêmes dans (11) et (12). Réciproquement, si deux familles P et $\overline{P}$, ayant les mêmes multiplicateurs, possèdent des systèmes fondamentaux de l'espèce indiquée qui satisfont aux équations (11) et (12) et pour lesquels les constantes associées ont la même valeur, elles auront le même groupe. Car, s'il en est ainsi, les systèmes (P'_a, P''_a) et $(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a)$ auront les mêmes substitutions S_a, S_b, et, par conséquent, d'après (2), la même substitution S_c. Puisque toute autre substitution n'est qu'une combinaison de ces trois, (P'_a, P''_a) subira toujours la même substitution que $(\overline{P}'_a, \overline{P}''_a)$ quand la variable décrira un contour fermé quelconque.

Nous avons ainsi donné une condition nécessaire et suffisante pour que deux familles aient le même groupe. Mais avant d'aller plus loin, observons quel arbitraire entre dans une formule (11). Supposons, en effet, qu'on parte d'une formule particulière

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{P}'_a &= \overline{\alpha}\,\mathfrak{P}'_b + \overline{\beta}\,\mathfrak{P}''_b, \\ \mathfrak{P}''_a &= \overline{\gamma}\,\mathfrak{P}'_b + \overline{\delta}\,\mathfrak{P}''_b, \end{aligned}\right. \tag{11'}$$

Le système $(\mathfrak{P}'_a, \mathfrak{P}''_a)$ est relié à un autre système fondamental (P'_a, P''_a) de la même famille par des équations

$$\left\{\begin{aligned} P'_a &= k_1\mathfrak{P}'_a + k_2\mathfrak{P}''_a, \\ P''_a &= l_1\mathfrak{P}'_a + l_2\mathfrak{P}''_a, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

dans lesquelles les coefficients sont assujettis, en dehors de la relation $k_1 l_2 - k_2 l_1 \neq 0$, aux conditions suivantes :

1° Si a est un point ordinaire, $k_2 = 0$, $l_1 = 0$; k_1 et l_2 sont des nombres quelconques $\neq 0$. 2° Si a est logarithmique, $k_2 = 0$; k_1, l_2 sont des nombres quelconques $\neq 0$; l_1 est tout à fait arbitraire. Si a est un point apparent, les coefficients de (13) satisfont à la seule condition $k_1 l_2 - k_2 l_1 \neq 0$. Les constantes associées de $(\mathfrak{P}'_a, \mathfrak{P}''_a)$, (P'_a, P''_a) étant $\mathfrak{C}_a$ et C_a respectivement, nous aurons la relation

$$k_1 C_a = l_2 \mathfrak{C}_a.$$

De même $(\mathfrak{P}'_b, \mathfrak{P}''_b)$ est relié à un autre système (P'_b, P''_b) par une formule analogue

$$\left\{\begin{aligned} P'_b &= k_3\mathfrak{P}'_b + k_4\mathfrak{P}''_b, \\ P''_b &= l_3\mathfrak{P}'_b + l_4\mathfrak{P}''_b. \end{aligned}\right. \tag{14}$$

En faisant ces substitutions dans (11′), on aura une formule (11) dans laquelle certains coefficients pourront être pris plus ou moins arbitrairement. Nous trouverons, en effet, que cinq au moins des quantités α, β, γ, δ, C_a, C_b peuvent prendre des valeurs quelconques $\neq 0$, à moins qu'elles ne soient nulles dans toute formule (11) de la famille. Mais nous réservons cette discussion pour le paragraphe suivant.

Bien qu'une formule (11) puisse être ainsi, en grande partie, choisie à notre gré, ses coefficients et constantes associées doivent toujours satisfaire à une certaine relation que nous allons maintenant établir.

Pour un système fondamental quelconque on a, d'après l'équation (2),

$$S_c^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{pmatrix} = S_b S_a.$$

Les racines de (3) pour S_c^{-1} sont $\frac{1}{\rho'_c}$, $\frac{1}{\rho''_c}$, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\rho'_c \rho''_c} = m_1 n_2 - m_2 n_1, \tag{15}$$

$$\frac{1}{\rho'_c} + \frac{1}{\rho''_c} = m_1 + n_2. \tag{16}$$

L'équation (15) est équivalente à (9) puisque, si l'on désigne par dét. S le déterminant de la substitution S,

$$m_1 n_2 - m_2 n_1 = \text{dét.}\, S_b \,\text{dét.}\, S_a = \rho'_b \rho''_b \rho'_a \rho''_a.$$

Mais (16) donne une nouvelle relation qu'on peut immédiatement obtenir après avoir calculé, au moyen de (11), $S_b S_a$ pour le système fondamental (P'_b, P''_b). En substituant dans (16) les valeurs de m_1, n_2, ainsi trouvées, nous aurons, après quelques transformations,

$$\begin{aligned} \alpha\delta \frac{1}{\rho'_a \rho'_b \rho''_c} (\rho'_a \rho'_b \rho'_c - 1)(\rho'_a \rho'_b \rho''_c - 1) + \beta\gamma(\rho''_a \rho'_b \rho'_c - 1)(\rho'_a \rho''_b \rho'_c - 1) \\ - C_a \alpha\beta \rho'_a \rho'_c (\rho'_b - \rho''_b) + C_b \beta\delta \rho'_b \rho'_c (\rho'_a - \rho''_a) + C_a C_b \beta^2 \rho'_a \rho'_b \rho'_c = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Cette équation est vérifiée quelle que soit la formule (11). Par conséquent, quand nous avons donné un système de valeurs à cinq des quantités α, β, γ, δ, C_a, C_b qui sont ou à notre choix, ou nécessairement nulles, la sixième sera déterminée par (17). Nous serons ainsi en mesure de décider si deux familles données ont une formule (11) commune. Nous verrons que ceci n'est pas toujours le cas, même quand les familles ont les mêmes multiplicateurs; mais, dans le paragraphe suivant, nous allons faire une classification des familles hypergéométriques telle que celles de la même classe et ayant les mêmes multiplicateurs ont une formule (11) commune et, par conséquent, ont le même groupe, tandis que deux familles de classes différentes n'ont jamais cette propriété.

3. Pour faciliter nos recherches, nous allons diviser les familles hypergéométriques en quatre *types*. Ce principe de classification, suggéré par la forme de (17), aura d'ailleurs sa justification dans la suite. Ces types correspondront aux relations suivantes :

TYPE I	$\rho'_a \rho'_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho''_a \rho'_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho'_a \rho''_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho'_a \rho'_b \rho''_c \neq 1$;
» II	$\rho'_a \rho'_b \rho'_c = 1$,	$\rho''_a \rho'_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho'_a \rho''_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho'_a \rho'_b \rho''_c \neq 1$;
» III	$\rho'_a \rho'_b \rho'_c = 1$,	$\rho''_a \rho'_b \rho'_c = 1$,	$\rho'_a \rho''_b \rho'_c \neq 1$,	$\rho'_a \rho'_b \rho''_c \neq 1$;
» IV	$\rho'_a \rho'_b \rho'_c = 1$,	$\rho''_a \rho'_b \rho'_c = 1$,	$\rho'_a \rho''_b \rho'_c = 1$,	$\rho'_a \rho'_b \rho''_c = 1$.

On voit facilement que, par un choix convenable de notations, on peut ramener une famille hypergéométrique quelconque à un de ces quatre types. L'équation (9) donne, pour chaque type, des relations semblables aux précédentes entre les quatre autres produits $\rho_a \rho_b \rho_c$.

Pour classer les familles de chaque type, nous chercherons toutes les formes possibles de (11) qui ne peuvent pas être transformées les unes dans les autres. Nous démontrerons plus tard l'existence de familles dans chacune des classes trouvées par ce procédé.

TYPE I. — Remarquons d'abord que β ne peut être nul dans aucune formule (11), ce qui résulte immédiatement des inégalités caractéristiques de ce type, de l'identité (17) et du fait que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Par conséquent un point apparent est impossible, car si a, par exemple, était un tel point, tout système fondamental serait un système (P'_a, P''_a), et la première ligne d'une formule (11) pourrait être $P'_a = P'_b$. Mais ceci ne peut arriver, puisque β n'est jamais nul. Le même raisonnement s'applique à b et à c, par symétrie. Il y a maintenant trois cas à considérer.

Si a et b sont tous les deux des points ordinaires, $C_a = C_b = 0$, et les inégalités caractéristiques du type, l'équation (17), et la relation $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ montrent qu'aucun des coefficients α, β, γ, δ ne peut être nul. En faisant des substitutions convenables (13) et (14) dans une formule particulière (11′), on donne à α, β, δ des valeurs quelconques $\neq 0$, et γ se trouve déterminé par (17). Par conséquent, toutes les familles de cette espèce qui possèdent les mêmes multiplicateurs ont une formule (11) commune.

Si l'un des deux points a, b est logarithmique et l'autre ordinaire, on pourra faire en sorte que a soit le point logarithmique par un choix convenable de notations. Ceci posé, on a $\rho'_a = \rho''_a$, $C_a \neq 0$, $C_b = 0$. L'équation (17) montre que ni α, ni β ne peuvent être nuls. Des substitutions convenables (13) et (14), appliquées à une formule particulière (11′), donnent des valeurs arbitraires (zéro excepté) à C_a, α, β, tandis que δ peut avoir une valeur quelconque, γ étant alors déterminé par (17). Par conséquent, ici encore, toutes les familles ayant les mêmes multiplicateurs ont une formule (11) commune.

On a le même résultat si a et b sont tous les deux logarithmiques, puisque, dans ce cas, on peut donner à C_a, C_b, β des valeurs quelconques $\neq 0$, tandis que α et δ sont tout à fait arbitraires, γ étant déterminé par (17).

Puisque dans ce type le caractère d'un point singulier dépend uniquement des multiplicateurs, deux familles aux mêmes multiplicateurs auront ici des formules (11) communes et, par conséquent, elles auront le même groupe. En d'autres termes, il n'y a, dans le type I, qu'une seule classe.

Type II. — Les relations caractéristiques de ce type montrent que a, b, c sont tous des points ordinaires. L'équation (17) se réduit à $\beta\gamma = 0$, et nous aurons ainsi à envisager les trois cas :

I.	$\beta = 0$,	$\gamma \neq 0$.
II.	$\beta \neq 0$,	$\gamma = 0$.
III.	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$.

Dans le paragraphe suivant on trouvera toutefois que le troisième cas est impossible pour les familles hypergéométriques [1]. Dans les deux autres cas ni α ni δ ne peuvent être nuls, mais les trois coefficients différents de zéro prendront des valeurs arbitraires. Par conséquent, on peut transformer toute formule (11) d'une famille du premier cas en une formule

$$\begin{aligned} P'_a &= P'_b, \\ P''_a &= P'_b + P''_b; \end{aligned}$$

de même toute famille du deuxième cas possède la formule

$$\begin{aligned} P'_a &= P'_b + P''_b, \\ P''_a &= P''_b; \end{aligned}$$

mais il est impossible de transformer une de ces formules dans l'autre. Admettant alors l'existence de familles hypergéométriques dans chacun de ces cas, il résulte de là que nous avons ici deux classes; nous les désignerons par les nos 1 et 2 respectivement.

Type III. — On a, pour ce type, $\rho'_a = \rho''_a$, $\rho'_b \neq \rho''_b$, $\rho'_c \neq \rho''_c$; donc $C_b = 0$ et (17) se réduit à $C_a \alpha\beta = 0$. Trois cas se présentent :

1° $C_a \neq 0$, $\alpha \neq 0$. Dans toute formule (11) $\beta = 0$, $\delta \neq 0$. C_a, α, δ peuvent prendre des valeurs quelconques $\neq 0$, tandis que γ est tout à fait arbitraire.

2° $C_a \neq 0$, $\alpha = 0$. C_a, β, γ ne peuvent jamais être nuls, mais il n'y a pas d'autre restriction pour les valeurs de C_a, β, γ, δ.

3° $C_a = 0$. Nous pouvons toujours prendre ici $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = \delta = 1$.

Les formules de ces trois cas étant essentiellement différentes entre elles, nous aurons ici trois classes, auxquelles nous donnerons des numéros correspondants.

---

(1) Mais d'autres familles binaires peuvent être de cette espèce, par exemple la famille $c_1 x^{\lambda'}(x-1)^{\nu'} + c_2 x^{\lambda''}(x-1)^{\nu''}$, pour laquelle la somme des exposants est nulle. (*Voir* ma Thèse.)

Type IV. — Des relations caractéristiques de ce type on déduit les équations $\rho'_a = \rho''_a$, $\rho'_b = \rho''_b$, $\rho'_c = \rho''_c$. L'équation (17) se réduit à $C_a C_b \beta = 0$. Quatre cas sont à considérer :

I.	$C_a = 0$,	$C_b \neq 0$.
II.	$C_a \neq 0$,	$C_b = 0$.
III.	$C_a \neq 0$,	$C_b \neq 0$.
IV.	$C_a = 0$,	$C_b = 0$.

Si deux familles appartiennent à deux cas différents, il est évident qu'elles n'auront pas le même groupe; il reste à démontrer que chaque cas donne une seule classe.

On vérifie sans peine le fait que toute famille de ce type a une formule

$$P'_a = P'_b,$$
$$P''_a = P''_b.$$

En tenant compte de l'identité $S_c^{-1} = S_b S_a$, on voit que, pour une telle formule, C_a, C_b, C_c sont reliés entre eux par l'équation

$$C_a + C_b + C_c = 0.$$

Dans le premier des quatre cas, C_b peut prendre une valeur quelconque $\neq 0$; dans le deuxième cas, on a la même liberté dans le choix de C_a. Quant au troisième, nous démontrons dans le paragraphe suivant que $C_c = 0$ [1]; nous aurons donc $C_a = -C_b$, et l'on peut donner à C_a une valeur quelconque $\neq 0$.

Par conséquent, à chaque cas correspondra une seule classe que nous désignerons par le même numéro.

4. Il reste à justifier l'exclusion que nous avons faite de certains cas, et à démontrer l'existence de familles de chacune des classes signalées dans le paragraphe précédent. A cet effet, nous allons chercher entre les exposants des relations qui seront caractéristiques de chaque classe.

---

[1] Mais tous les trois points singuliers peuvent être logarithmiques pour des familles binaires dont la définition coïncide avec celle des familles hypergéométriques dans les parties I, II, III' seulement. (*Voir* ma Thèse.)

Dans cette investigation une grande importance s'attache à la recherche, dans une famille hypergéométrique donnée, des fonctions dont toutes les branches sont des multiples constants d'une seule branche. Par analogie avec notre désignation de familles binaires, nous appellerons l'ensemble des multiples constants d'une telle branche une *famille unaire*. Les exposants d'une famille unaire, qui appartient à une famille hypergéométrique, seront Λ, M, N, où Λ est une des quantités λ', λ'', M est une des quantités μ', μ'' et N une des quantités ν', ν''. Par suite, une branche $P^{(\Lambda)}$ d'une telle famille a la forme, si a, b, c sont à distance finie,

$$P^{(\Lambda)} = (x-a)^{\Lambda}(x-b)^{M}(x-c)^{N}G(x),$$

où $G(x)$, n'ayant pas d'autre singularité qu'un pôle à l'infini, est un polynome. Nous avons donc

$$\Lambda + M + N = \text{un entier négatif ou zéro.} \tag{18}$$

Quant à $G(x)$, il résulte de la définition (IV') que son degré est, ou $-(\Lambda+M+N)$, ou $-(\Lambda+M+N+1)$, suivant les valeurs des paramètres de la famille hypergéométrique. Si b est à l'infini $P^{(\Lambda)}$ aura la forme

$$P^{(\Lambda)} = (x-a)^{\Lambda}(x-c)^{N}G(x).$$

La relation (18) sera encore vérifiée, mais le degré du polynome $G(x)$ sera toujours $-(\Lambda+M+N)$.

Appliquons maintenant ce résultat aux types et classes du paragraphe 3, les points singuliers étant toujours à distance finie, hypothèse justifiée par les remarques de la page 127.

Type I. — Les relations entre les multiplicateurs, qui définissent ce type, sont équivalentes aux suivantes entre les exposants; $\lambda'+\mu'+\nu$, $\lambda''+\mu'+\nu'$, $\lambda'+\mu''+\nu'$, $\lambda'+\mu'+\nu''$ ne sont pas des entiers. Une famille unaire ne peut jamais exister dans une famille hypergéométrique de ce type.

Type II. — $\lambda'+\mu'+\nu'$ est un entier; $\lambda''+\mu'+\nu'$, $\lambda'+\mu''+\nu'$, $\lambda'+\mu'+\nu''$ ne sont pas des entiers.

Classe I. — Une branche P'_a étant aussi une branche P'_b, tous ses prolongements analytiques ne sont que des multiples constants d'elle-même. Son exposant au point a est λ', et à b, μ'; au point c elle a nécessairement l'exposant ν' à cause de (18). Nous aurons donc une famille unaire

$$k(x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu'}\,G(x),$$

en désignant par k une constante arbitraire et par $G(x)$, comme dans la suite, un polynome qui n'a pas de zéro aux points a, b, c. On a, d'après (18),

$$\lambda'+\mu'+\nu'\leqq 0.$$

On voit facilement qu'il n'y a pas d'autre famille unaire dans une famille hypergéométrique de cette classe.

Classe II. — D'une manière analogue on trouve qu'il y a ici une seule famille unaire

$$k(x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu''}\,G(x).$$

On a

$$\lambda''+\mu''+\nu''\leqq 0,$$

d'où l'on déduit, en se servant de l'identité (10), la relation

$$\lambda'+\mu'+\nu'>0.$$

Nous sommes maintenant en mesure de justifier l'exclusion du troisième cas, car, si ce cas pouvait avoir lieu, on aurait les deux relations

$$\lambda'+\mu'+\nu'\leqq 0,\qquad \lambda''+\mu''+\nu''\leqq 0,$$

qui sont en contradiction avec (10).

Type III. $\lambda'+\mu'+\nu'$, $\lambda''+\mu'+\nu'$ sont des entiers; $\lambda'+\mu''+\nu'$, $\lambda'+\mu'+\nu''$ ne sont pas des entiers. $\lambda'-\lambda''$ est un entier positif ou zéro.

Classe I. — La seule famille unaire est

$$k(x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu'}\,G(x).$$

Nous avons

$$\lambda' + \mu' + \nu' \leqq 0.$$

Classe II. — La seule famille unaire est

$$k(x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu''}\,G(x).$$

On a la relation

$$\lambda' + \mu'' + \nu'' \leqq 0$$

qui est équivalente à

$$\lambda' + \mu' + \nu' > \lambda' - \lambda''.$$

Classe III. — Ici on a deux familles unaires, ayant à b des exposants μ' et μ''. En examinant toutes les hypothèses possibles sur les autres exposants et en rejetant celles qui sont en contradiction avec (10), on trouve que ces familles ont les formes

$$k'(x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu'}\,G'(x),$$
$$k''(x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu''}\,G''(x).$$

Les relations

$$\lambda'' + \mu' + \nu' \leqq 0, \qquad \lambda'' + \mu'' + \nu'' \leqq 0$$

sont équivalentes à

$$\lambda' - \lambda'' \geqq \lambda' + \mu' + \nu' > 0.$$

Type IV. $\lambda' + \mu' + \nu'$, $\lambda'' + \mu' + \nu'$, $\lambda' + \mu'' + \nu'$, $\lambda' + \mu' + \nu''$ sont tous des entiers. $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$, $\nu' - \nu''$ sont des entiers positifs ou zéro, d'où résulte l'inégalité

$$\lambda' + \mu' + \nu' > 0.$$

Classe I. — L'équation $C_a + C_b + C_c = 0$ devient ici $C_b + C_c = 0$. Les points b et c étant ainsi logarithmiques, les exposants pour ces points d'une famille unaire sont nécessairement μ' et ν'. En effet, la seule famille unaire est

$$k(x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu'}\,G(x).$$

La relation

$$\lambda'' + \mu' + \nu' \leqq 0$$

est équivalente à

$$\lambda' - \lambda'' \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \mu' - \mu'' + \nu' - \nu'').$$

Classe II. — Ici les points a et c sont logarithmiques.

La seule famille unaire est

$$k(x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu'},$$

et l'on a la relation

$$\mu' - \mu'' \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \lambda' - \lambda'' + \nu' - \nu'').$$

Classe III. — Nous pouvons maintenant justifier notre exclusion du cas $C_c \neq 0$ en remarquant que dans une famille de cette espèce il y aurait une famille unaire aux exposants λ', μ', ν', ce qui est impossible puisque $\lambda' + \mu' + \nu' > 0$. Nous avons donc $C_c = 0$, et la seule famille unaire est

$$k(x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu''}\,G(x).$$

On a ici

$$\nu' - \nu'' \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \lambda' - \lambda'' + \mu' - \mu'').$$

Classe IV. — Chaque branche d'une famille de cette classe fait partie d'une famille unaire. On démontre sans difficulté qu'une branche $P^{(\lambda')}$ ne peut avoir à b et à c que les exposants μ'' et ν'', d'où il résulte que cette branche est de la forme

$$P^{(\lambda')} = (x-a)^{\lambda'}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu''}\,G'(x).$$

D'une manière analogue nous aurons

$$P^{(\mu')} = (x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu'}(x-c)^{\nu''}\,G''(x),$$
$$P^{(\nu')} = (x-a)^{\lambda''}(x-b)^{\mu''}(x-c)^{\nu'}\,G'''(x).$$

On obtient les inégalités

$$\lambda' + \mu' + \nu' > \begin{cases} \lambda' - \lambda'', \\ \mu' - \mu'', \\ \nu' - \nu''. \end{cases}$$

Ces relations pour les classes des trois derniers types sont inscrites dans le Tableau suivant, où nous désignerons par λ, μ, ν les différences $\lambda' - \lambda''$, $\mu' - \mu''$, $\nu' - \nu''$ respectivement (¹).

Type II. — *Classe I.*		$\lambda' + \mu' + \nu' \leqq 0,$
»	*II.*	$\lambda' + \mu' + \nu' > 0.$
Type III. — *Classe I.*		$\lambda' + \mu' + \nu' \leqq 0,$
»	*II.*	$\lambda' + \mu' + \nu' > \lambda,$
»	*III.*	$\lambda \geqq \lambda' + \mu' + \nu' > 0.$
Type IV. — *Classe I.*		$\lambda \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \mu + \nu),$
»	*II.*	$\mu \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \lambda + \nu),$
»	*III.*	$\nu \geqq \lambda' + \mu' + \nu' (> \lambda + \mu),$
»	*IV.*	$\lambda' + \mu' + \nu' > \begin{cases} \lambda, \\ \mu, \\ \nu. \end{cases}$

Dans chaque type toute valeur qu'on peut donner à $\lambda' + \mu' + \nu'$ satisfait à une de ces relations, mais deux d'entre elles ne peuvent être vérifiées à la fois. Par conséquent, la classe d'une famille est connue quand ses exposants sont donnés. En admettant l'existence de familles pour lesquelles $\lambda' + \mu' + \nu'$ a une valeur quelconque, ce qui est d'accord avec nos définitions d'une famille hypergéométrique, et ce qu'on peut en outre déduire de l'équation différentielle (1), nous sommes ainsi assurés de l'existence de familles appartenant à chaque type et à chacune des classes que nous avons distinguées.

5. Du paragraphe précédent on peut déduire immédiatement des propriétés importantes des familles hypergéométriques; elles sont contenues dans les trois théorèmes suivants :

I. *L'existence d'une relation* $\Lambda + M + N =$ un entier *est une condition suffisante* (nous avons déjà vu qu'elle est nécessaire) *pour qu'une famille hypergéométrique renferme une famille unaire.*

(¹) *Voir* les Tableaux de Ritter (*loc. cit.*, p. 11-15) où des conditions sont aussi données au moyen de $\lambda \pm \mu \pm \nu$. Les classes sont désignées suivant un autre ordre que celui que nous avons adopté.

On retrouve ici la condition de Frobenius ([1]) pour que l'équation différentielle (1) soit réductible; on connaît la connexion entre ces deux ordres d'idées. Le type I correspond ainsi aux équations irréductibles, les autres types aux réductibles.

II. *Une condition nécessaire et suffisante pour que* a *soit un point apparent est que* λ *soit un entier et que* $\lambda' + \mu' + \nu'$ *ou* $\lambda' + \mu' + \nu''$ *soient un des entiers* $1, 2, \ldots, \lambda$.

On tire cette conclusion du Tableau du paragraphe précédent en remarquant que a n'est un point apparent que dans la classe III du type III, la classe I du type IV et la classe IV du même type. On peut comparer ce résultat avec la condition donnée par Schwarz dans son Mémoire classique *Ueber diejenigen Fälle in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt* ([2]).

Les paragraphes 6 et 7 du Mémoire de Riemann montrent l'intérêt qu'il y a à connaître tous les coefficients d'une formule (8). Certains d'entre eux seront arbitraires, les autres étant déterminés par des équations qu'on peut déduire de l'identité $S_c S_b S_a = 1$. Cependant nous ne développerons pas ici ces équations, qu'on peut trouver dans ma Thèse (p. 28 et 29). Mais nous donnerons dans le théorème suivant une propriété importante des familles hypergéométriques qui concerne les formules (8) :

III. *Si deux familles*, P *et* $\overline{\mathrm{P}}$, *ont le même groupe, et si l'une possède une formule*

$$(\mathrm{P}^{(\lambda')}, \mathrm{P}^{(\lambda'')}) = \mathrm{B}(\mathrm{P}^{(\mu')}, \mathrm{P}^{(\mu'')}) = \mathrm{C}(\mathrm{P}^{(\nu')}, \mathrm{P}^{(\nu'')}), \tag{19}$$

l'autre aura la formule

$$(\overline{\mathrm{P}}^{(\lambda')}, \overline{\mathrm{P}}^{(\lambda'')}) = \mathrm{B}(\overline{\mathrm{P}}^{(\mu')}, \overline{\mathrm{P}}^{(\mu'')}) = \mathrm{C}(\overline{\mathrm{P}}^{(\nu')}, \overline{\mathrm{P}}^{(\nu'')}),$$

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 76, 1873, p. 236.

(2) *Journal de Crelle*, t. 75, 1873, p. 292-335. On trouve au § I du même Mémoire une énumération de toutes les familles unaires qui peuvent faire partie d'une famille hypergéométrique.

les constantes associées C_a, C_b, C_c *étant les mêmes pour les deux formules* (¹).

Nous avons déjà remarqué qu'un système (P'_a, P''_a) est aussi un système $(P^{(\lambda')}, P^{(\lambda'')})$ à moins que a ne soit un point apparent; par conséquent, ce théorème ne donne rien de nouveau excepté pour la troisième classe du type III et pour le type IV. Mais, dans ces cas, la connaissance de la forme des familles unaires nous donne un moyen de construire des formules particulières (19) communes à toutes les familles de la même classe. Par exemple, pour la troisième classe du type III, nous écrirons

$$\begin{gathered} P^{(\mu')} = P^{(\nu')} = (x-a)^{\lambda''} (x-b)^{\mu'} (x-c)^{\nu'} G'(x), \\ G'(a) = (a-b)^{-\mu'} (a-c)^{-\nu'}, \\ P^{(\lambda'')} = P^{(\mu'')} = P^{(\nu'')} = (x-a)^{\lambda''} (x-b)^{\mu''} (x-c)^{\nu''} G''(x), \\ G''(a) = (a-b)^{-\mu''} (a-c)^{-\nu''}. \end{gathered}$$

ce qui nous donne la formule

$$\begin{aligned} P^{(\lambda')} &= P^{(\mu')} - P^{(\mu'')} = P^{(\nu')} - P^{(\nu'')}, \\ P^{(\lambda'')} &= \qquad P^{(\mu'')} \qquad = P^{(\nu'')}, \end{aligned}$$

Pour le type IV, le procédé est analogue. Toute formule (19) pouvant être ramenée à une formule particulière par des transformations convenables (13) et (14), notre théorème se trouve ainsi démontré.

6. Bien qu'il ne nous soit pas permis de dire avec Riemann que deux familles ont toujours le même groupe si leurs exposants correspondants ne diffèrent que par des entiers, il reste néanmoins vrai, d'après le paragraphe 4, que si deux familles différentes pouvaient avoir les mêmes exposants elles auraient le même groupe. A cette remarque ajoutons l'observation que, si $(P^{(\lambda')}, P^{(\lambda'')})$ et $(\overline{P}^{(\lambda')}, \overline{P}^{(\lambda'')})$ sont des systèmes correspondants de deux familles ayant le même groupe, les termes logarithmiques disparaîtront dans le développement autour

---

(¹) Ce théorème n'est pas toujours vrai pour des familles binaires plus générales. (*Voir* ma Thèse.)

du point a de l'expression

$$\left(P^{(\lambda')}\overline{P}^{(\lambda'')} - P^{(\lambda'')}\overline{P}^{(\lambda')}\right).$$

En se servant de ces propriétés et de celle qui est exprimée par le théorème III du paragraphe précédent on applique sans aucun changement, à toute famille que nous venons de définir, les calculs des paragraphes 4 et 6 du Mémoire de Riemann. Nous arrivons ainsi, suivant les démonstrations de l'illustre géomètre, à ces résultats fondamentaux : qu'une famille est uniquement déterminée par ses exposants, et que des branches correspondantes [1] de trois familles ayant le même groupe sont reliées entre elles par une équation linéaire homogène à coefficients rationnels [2].

Nous avons maintenant terminé notre examen des parties du Mémoire de Riemann relatives au groupe de monodromie, en basant tous nos raisonnements sur les définitions (I), (II), (III'), (IV'). Si l'on modifie ces définitions il s'ensuit des changements dans les résultats qu'il peut être intéressant de discuter. Mais nous en resterons là. Dans cet ordre d'idées, le lecteur peut consulter la seconde partie de la Thèse de l'auteur où l'on considère des familles qui ne satisfont plus à (IV').

---

(1) Par le terme *branches correspondantes* de deux familles P et $\overline{P}$ ayant le même groupe, nous entendons les deux membres P', $\overline{P}'$, ou les deux membres P'', $\overline{P}''$, de deux systèmes correspondants (P', P''), $(\overline{P}', \overline{P}'')$.

(2) Dans l'énoncé de Riemann on trouve l'assertion qu'une branche d'une famille hypergéométrique peut être exprimée par une combinaison linéaire à coefficients rationnels de deux branches correspondantes appartenant à des familles quelconques ayant le même groupe. Cette assertion est inexacte si les deux dernières familles ont un rapport rationnel.