ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON DARBOUX

Sur les surfaces isothermiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 16 (1899), p. 491-508.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1899_3_16__491_0>

SUR LES

SURFACES ISOTHERMIQUES,

PAR M. GASTON DARBOUX [1].

I.

Dans le Mémoire précédent, j'ai fait l'étude complète d'un beau théorème de M. Guichard et d'une transformation des surfaces à courbure constante qui en dérive de la manière la plus directe. Avant de passer à un autre sujet, je dois signaler trois Notes de M. L. Bianchi qui ont paru le 23 février, le 5 mars et le 23 avril dans les *Rendiconti* de l'Académie Royale des Lincei et qui se rapportent à la même théorie. Elles reposent sur des principes différents de ceux que j'ai employés; mais, comme l'indique leur savant auteur, elles ont également leur origine dans le théorème de M. Guichard.

Je voudrais maintenant étudier une classe spéciale de surfaces isothermiques (c'est-à-dire à lignes de courbure isothermes) qui interviennent dans la théorie de la déformation des surfaces les plus générales du second degré. Mon point de départ sera le théorème suivant :

Si l'on fait rouler une surface (Q) *sur une surface applicable* (Θ), *tout point-sphère invariablement lié à* (Q) *coupe le plan de contact de* P *de* (Θ) *et de* (Q) *suivant un cercle* (C) *qui engendre un système cyclique, c'est-à-dire qui demeure normal à une famille de surfaces; le point m, où toute droite isotrope* (d) *invariablement liée à* (Q) *rencontre le point de contact, décrit une surface dont la normale est l'intersection de ce plan de contact par le plan isotrope qui contient cette droite* (d). *Toutes les surfaces ainsi obtenues, celles qui sont normales aux cercles tels que* (C)

---

[1] Extrait du Tome CXXVIII des *Comptes rendus*, séances du 23 mai, p. 1264, du 29 mai, p. 1299 et du 19 juin 1899, p. 1483.

aussi bien que celles qui sont décrites par les points tels que m, ont leurs lignes de courbure qui correspondent aux courbes du système conjugué commun à (Θ) *et à* (Q). *Leurs centres de courbure principaux sont tous sur les tangentes menées à ces courbes conjuguées au point de contact de* (Θ) *et de* (Q).

Appliquons ce théorème au cas où la surface (Q) est une quadrique générale, qui coupe le cercle de l'infini en quatre points distincts. Cette quadrique contiendra donc huit génératrices rectilignes isotropes deux à deux parallèles. Quatre d'entre elles, que je désignerai par d_1, d_2, d_3, d_4, appartiendront à l'un des deux systèmes de génératrices rectilignes et ne se couperont pas. Les quatre autres d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 seront respectivement parallèles aux premières et appartiendront au second système de génératrices rectilignes.

Les deux groupes de génératrices isotropes se couperont mutuellement en seize points dont quatre, les points d'intersection des génératrices d_i, d'_i, seront sur le cercle de l'infini; les douze autres points communs aux génératrices d_i, d'_k (i étant différent de k) seront les ombilics de la quadrique. Désignons par (Σ_i), (Σ'_i) les surfaces décrites par les points m_i, m'_i où les droites d_i, d'_i coupent le plan de contact P; il résulte du théorème précédent : 1° que les surfaces (Σ_i), (Σ'_i) se correspondront par plans tangents parallèles et auront même représentation sphérique de leurs lignes de courbure; 2° que les surfaces (Σ_i), (Σ'_k) seront normales aux cercles du système cyclique déterminé par le point-sphère ayant son centre en l'ombilic intersection des génératrices d_i, d'_k. Les lignes de courbure des huit surfaces (Σ_i), (Σ'_k) se correspondent; elles correspondent aux courbes du système conjugué commun à (Θ) et à (Q). Remarquons d'ailleurs que les huit points m_i, m'_i qui décrivent ces huit surfaces sont placés quatre par quatre sur les deux génératrices rectilignes suivant lesquelles la quadrique (Q) est coupée par le plan P. Quant aux centres de courbure principaux, ils sont, d'après le théorème général, situés sur deux tangentes conjuguées de (Q), c'est-à-dire sur deux droites qui divisent harmoniquement toutes les droites telles que $m_i m'_i$, $m_i m'_k$. Toutes ces droites, aussi bien que les intersections du plan de contact par un plan *quelconque* invariablement lié à (Q), engendrent des congruences dont les développables correspondent aux courbes du système conjugué commun et dont les points focaux sont précisément sur les deux tangentes conjuguées communes à (Θ) et à (Q).

Considérons plus spécialement les deux surfaces (Σ_i), (Σ'_i) qui ont leurs plans tangents parallèles et même représentation sphérique de leurs lignes de courbure. Puisque les points focaux de la congruence décrite par la droite $m_i m'_i$ divisent harmoniquement le segment $m_i m'_i$, on peut conclure immédiatement des propositions générales relatives à la représentation sphérique que (Σ_i), (Σ'_i) sont l'une et l'autre *isothermiques* et qu'elles se correspondent point par point avec similitude des éléments infiniment petits. Ainsi :

Les huit surfaces (Σ_i), (Σ'_k) sont isothermiques et celles qui se correspondent par plans tangents parallèles, (Σ_i), (Σ'_i), se correspondent aussi avec similitude des éléments infiniment petits [1].

Ce théorème peut être établi par d'autres considérations et même un peu complété. Nous allons montrer que deux quelconques des huit surfaces (Σ_i), (Σ'_k) se correspondent, non seulement avec conservation des lignes de courbure, mais aussi avec similitude des éléments infiniment petits.

A cet effet désignons par (Θ) une surface quelconque décrite par un point M_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1. L'élément linéaire de la surface sera défini par une formule telle que la suivante :

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{1}$$

Un point quelconque P_1 du plan tangent aura ses coordonnées X_1, Y_1,

---

[1] Dans une Note insérée en 1897 à la page 596 des *Comptes rendus* (t. CXXV), M. Guichard a donné une partie de ce théorème, puisqu'il indique que les surfaces (Σ_i), (Σ'_i) ont même représentation sphérique qu'une surface isothermique.

On peut d'ailleurs généraliser beaucoup la proposition donnée dans le texte.

Dans le cas général où une surface quelconque (Q) roule sur une surface applicable (Θ), sur toute surface (Σ) décrite par le point m où une droite (d) invariablement liée à (Q) rencontre le plan de contact, il correspond toujours un réseau conjugué au réseau conjugué commun à (Θ) et à (Q). Dans le cas spécial où (Q) est une quadrique et où (d) est une génératrice rectiligne de (Q), le réseau conjugué de (Σ) a ses invariants ponctuels égaux. De sorte que si l'on considère les deux surfaces (Σ), (Σ') dérivées de deux génératrices parallèles de (Q) et se correspondant, par suite, par plans tangents parallèles, elles font partie de l'un de ces groupes de douze surfaces que j'ai étudiées dans la quatrième Partie de mes *Leçons*.

Z_1 définies par des équations de la forme suivante :

$$(2)\qquad \begin{cases} X_1 = x_1 + \lambda \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, \\ Y_1 = y_1 + \lambda \dfrac{\partial y_1}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial y_1}{\partial v}, \\ Z_1 = z_1 + \lambda \dfrac{\partial z_1}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial z_1}{\partial v}, \end{cases}$$

où λ et μ désignent des paramètres convenablement choisis. Ces paramètres jouissent d'une remarquable propriété : si l'on suppose que la surface (Θ) se déforme en entraînant avec elle tous ses plans tangents et par suite le point P_1, les quantités λ et μ demeureront invariables. Par suite, si x, y, z désignent les coordonnées du point d'une surface (Q) résultant de la déformation de (Θ), les coordonnées de la nouvelle position P du point P_1 seront données par les formules

$$(3)\qquad \begin{cases} X = x + \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial x}{\partial v}, \\ Y = y + \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial y}{\partial v}, \\ Z = z + \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u} + \mu \dfrac{\partial z}{\partial v}, \end{cases}$$

où λ et μ n'auront pas changé de valeur. Cette remarque est essentielle pour la suite.

Si nous calculons l'élément linéaire dS_1 de la surface (P_1) décrite par le point $P_1(X_1, Y_1, Z_1)$, nous aurons

$$dS_1^2 = dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2,$$

et il faudra remplacer les différentielles dX_1, dY_1, dZ_1 par leurs valeurs déduites des équations (2).

Pour effectuer ce calcul, faisons usage des formules de Gauss démontrées au n° 702 de mes *Leçons* et qu'on peut mettre sous la forme

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u^2} = \dfrac{D_1}{H} c_1 + M \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + N \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u \partial v} = \dfrac{D_1'}{H} c_1 + M' \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + N' \dfrac{\partial x_1}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial v^2} = \dfrac{D_1''}{H} c_1 + M' \dfrac{\partial x_1}{\partial u} + N'' \dfrac{\partial x_1}{\partial v}. \end{cases}$$

Dans ces formules, qui s'étendent naturellement à y_1 et à z_1, pourvu qu'on y remplace c par c'_1, c''_1, les quantités c_1, c'_1, c''_1 sont les cosinus directeurs de la normale; H désigne $\sqrt{EG - F^2}$; M, N, M', ... dépendent exclusivement de l'élément linéaire, c'est-à-dire sont des fonctions de E, F, G et de leurs dérivées; D_1, D'_1, D''_1 sont des déterminants auxiliaires sur la définition desquels je ne reviens pas, mais qui jouissent de cette propriété que la combinaison $D_1 D''_1 - D'^2_1$ dépend, elle aussi, exclusivement de l'élément linéaire. En faisant usage de ces formules on pourra mettre l'élément linéaire dS_1 sous la forme suivante :

$$dS_1^2 = \frac{D_1\lambda^2 + 2D'_1\lambda\mu + D''_1\mu^2}{H^2}(D_1 du^2 + 2D'_1 du\,dv + D''_1 dv^2) + \Omega,$$

où Ω est une partie qui ne dépend que de l'élément linéaire de la surface (Θ) et subsiste lorsque (Θ) se déforme arbitrairement. Si donc la surface (Θ) se déforme et vient coïncider avec la surface (Q) et si le point P_1 vient occuper la nouvelle position P, l'élément linéaire de la surface (P) décrite par le point P sera de même

$$dS^2 = \frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2) + \Omega,$$

D, D', D'' étant les valeurs que prennent les déterminants de Gauss pour la surface (Q). En éliminant Ω entre les deux équations précédentes on sera donc conduit à la relation

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} dS_1^2 = dS^2 &+ \frac{D_1\lambda^2 + 2D'_1\lambda\mu + D''_1\mu^2}{H^2}(D_1 du^2 + 2D'_1 du\,dv + D''_1 dv^2) \\ &- \frac{D\lambda^2 + 2D'\lambda\mu + D''\mu^2}{H^2}(D\,du^2 + 2D'du\,dv + D''dv^2). \end{aligned}\right.$$

Telle est la formule fondamentale que nous voulions établir. On en déduit de nombreuses conséquences. Voici celles qui se rapportent à notre sujet :

Supposons d'abord que l'on considère une développable isotrope (Δ) liée à (Q). Elle sera l'enveloppe du plan

$$(6)\qquad (1-\alpha^2)X + i(1+\alpha^2)Y + 2\alpha Z - 2f(\alpha) = 0,$$

où α désigne un paramètre variable que l'on éliminera entre cette équation et sa dérivée

$$(7) \qquad -\alpha X + i\alpha Y + Z + f'(\alpha) = 0.$$

L'élément linéaire de (Δ) se calcule sans difficulté, il est donné par la formule

$$(8) \qquad dS^2 = \left[\frac{f'(\alpha) - \alpha f''(\alpha) - Z}{\alpha}\right]^2 d\alpha^2.$$

Prenons l'intersection de la développable (Δ) par les plans tangents de (Q). Dans chacun de ces plans tangents, il y aura ainsi une courbe (C) et les valeurs de λ et de μ relatives à chaque point de (C) se calculent de la manière la plus élémentaire. Il suffit de remplacer, dans les équations (6) et (7), X, Y, Z par leurs expressions déduites des formules (3); on aura ainsi les deux équations qui feront connaître λ et μ.

Supposons maintenant que (Q) se déforme en (Θ) et qu'elle entraîne dans ses plans tangents toutes les courbes (C). Dans leurs nouvelles positions, celles-ci engendreront une congruence de courbes. La formule (5) fera connaître l'élément linéaire de l'espace exprimé à l'aide des trois variables α, u, v.

Admettons que l'on ait choisi les variables u et v de telle manière que les déterminants D', D'_1 soient tous deux nuls; ce qui suppose que l'on ait pris pour u et v les paramètres des deux familles de courbes qui sont conjuguées à la fois sur les surfaces (Q) et (Θ). Le terme en $du\,dv$ disparaîtra de l'équation (5) et l'on aura pour dS_1 une expression de la forme

$$dS_1^2 = H\,d\alpha^2 + K\,du^2 + L\,dv^2.$$

Cette formule met en évidence l'existence d'un système triple orthogonal formé des trajectoires orthogonales des courbes (C) et de deux autres familles engendrées par les positions des courbes (C) qui correspondent à une valeur donnée de u ou de v. Ce système triple est le plus général parmi ceux pour lesquels deux des trois familles de surfaces se coupent mutuellement suivant des courbes planes. (*Leçons*, n$^{\text{os}}$ 762, 971, 1060.)

Supposons maintenant que (Q) soit une surface gauche et que le point P soit assujetti à décrire une des lignes de longueur nulle de cette surface. On aura ici, en supposant que les génératrices rectilignes de la surface soient les lignes de paramètre v,

$$D = 0, \qquad \mu = 0, \qquad dS = 0.$$

La formule (5) se réduira donc à la suivante :

$$dS_1^2 = \frac{D_1 \lambda^2}{H^2}(D_1\, du^2 + 2 D_1'\, du\, dv + D_1''\, dv^2).$$

On est ainsi conduit au théorème suivant :

Si une surface réglée (Q) *roule sur une surface applicable* (Θ), *les points où les différentes lignes de longueur nulle de* (Q) *rencontrent le plan de contact de* (Θ) *et de* (Q), *points qui sont tous situés sur la génératrice rectiligne de* (Q) *contenue dans le plan de contact, décrivent des surfaces qui se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits; les lignes de longueur nulle de ces surfaces correspondent aux lignes asymptotiques de* (Θ).

Si nous revenons en particulier au cas où la surface (Q) est une quadrique, nous voyons que parmi les lignes de longueur nulle de (Q) se trouvent, en particulier, les huit génératrices isotropes déjà considérées d_i, d_i'. Donc

Les huit surfaces (Σ_i), (Σ_k') *se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits; et leurs lignes de longueur nulle correspondent aux lignes asymptotiques de la surface* (Θ).

La formule (5) a beaucoup d'autres applications, je les réserverai pour une autre occasion [1].

II.

Les propositions que j'ai établies dans l'article précédent montrent qu'on peut rattacher à la déformation des quadriques les plus gé-

---

(1) Séance du 23 mai 1899.

nérales certaines surfaces isothermiques que j'ai appelées (Σ_i), (Σ'_i). Si l'on savait déterminer toutes les surfaces applicables sur une quadrique déterminée, on aurait par cela même l'équation en termes finis de ces surfaces isothermiques. Elles dépendent donc seulement de deux fonctions arbitraires d'une variable indépendante, tandis que la détermination des surfaces isothermiques les plus générales exigerait l'intégration d'une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre que l'on doit ranger au nombre des plus compliquées, des plus difficiles à intégrer de la Géométrie infinitésimale. En essayant de caractériser nettement les surfaces (Σ_i), (Σ'_i), j'ai rencontré quelques propositions générales qu'il me paraît utile de signaler.

D'abord la correspondance entre les surfaces (Σ_i), (Σ'_i) a lieu, nous l'avons remarqué, à la fois avec similitude des éléments infiniment petits et parallélisme des plans tangents. L'étude des cas dans lesquels ces deux propriétés se trouvent réunies a été faite par M. Christoffel; je n'y reviendrai donc pas. Mais la correspondance entre les surfaces (Σ_i), (Σ'_k) soulève un problème intéressant. Ces deux surfaces, qui sont normales à un même cercle, peuvent être considérées comme les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dépendant de deux paramètres. Nous sommes donc conduits à nous proposer la question suivante :

Dans quel cas une sphère qui dépend de deux paramètres enveloppe-t-elle une surface dont les deux nappes se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits ?

On connaît une solution très générale de ce problème. Si la sphère est orthogonale à une sphère fixe, les deux nappes de son enveloppe sont inverses l'une de l'autre par rapport au centre de la sphère fixe et, par suite, se correspondent avec similitude des éléments infiniment petits. La correspondance entre les surfaces (Σ_i), (Σ'_k) nous fournit encore une autre solution du problème. Il y a donc intérêt, s'il est possible, à le résoudre complètement.

Soient donc M, M′ les deux points où une sphère variable (S) touche son enveloppe. La corde de contact MM′ engendre une congruence; les développables de cette congruence découpent, sur les deux nappes de l'enveloppe, des courbes dont les tangentes se rencontrent toujours. Si A et B sont les points de concours de ces tangentes, les directions

AM et AM′, BM et BM′ se correspondent sur les deux nappes. Comme d'ailleurs ces directions sont placées symétriquement par rapport au plan tangent de la surface décrite par le centre de la sphère (S), il faudra que les deux angles AMB, AM′B soient égaux.

Supposons d'abord que la valeur commune de ces angles soit différente de l'angle droit; alors, pour qu'il y ait similitude des éléments infiniment petits, il faudra que la tangente en M à toute courbe tracée sur la nappe (M) décrite par M et la tangente en M′ à la courbe correspondante tracée sur la nappe (M′) décrite par M′ fassent des angles égaux respectivement avec MA et M′A et aussi avec MB et M′B. Donc ces deux tangentes se rencontreront toujours en un point, d'ailleurs variable, de la droite AB. Dès lors, quel que soit le déplacement de la sphère, la corde de contact MM′ engendrera un élément de développable et, par conséquent, la droite MM′ ira passer par un point fixe. Ce point fixe aura évidemment même puissance par rapport à toutes les sphères (S) puisqu'il se trouve sur l'axe radical de chacune d'elles et des sphères infiniment voisines. Nous obtenons ainsi la première et la plus générale des deux solutions que nous avions reconnues *a priori*, celle qui correspond à deux surfaces inverses l'une de l'autre.

Supposons maintenant que l'angle AMB soit droit; alors il résulte facilement de la théorie des enveloppes de sphères (*Leçons*, n° 475 et suiv.) que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de l'enveloppe, et nous avons une suite de propositions et de formules qui permettent de pénétrer dans la question.

Si l'on suppose connue l'une des nappes (M) de l'enveloppe, que l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point M, par c, c', c'' les cosinus-directeurs de la normale à (M) en ce point, et que l'on considère toutes ces quantités comme fonctions des paramètres ρ et ρ_1 des deux familles de lignes de courbure, les rayons de courbure principaux de la nappe (M) seront déterminés par les équations d'Olinde Rodrigues :

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \mathrm{R}\,\dfrac{\partial c}{\partial \rho} = 0, & \ldots, \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial \rho_1} + \mathrm{R}_1\dfrac{\partial c}{\partial \rho_1} = 0, & \ldots, \end{cases}$$

et, pour déterminer la nappe (M′), il faudra procéder comme il suit :

On prendra d'une manière quelconque deux fonctions λ et μ satisfaisant aux équations

$$(2)\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho} + \mathrm{R}\frac{\partial\mu}{\partial\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} + \mathrm{R}_1\frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = 0;$$

alors la sphère (S) aura pour équation

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\mu}{2\lambda}[(\mathrm{X}-x)^2+(\mathrm{Y}-y)^2+(\mathrm{Z}-z)^2] \\ &\quad + c(\mathrm{X}-x) + c'(\mathrm{Y}-y) + c''(\mathrm{Z}-z) = 0. \end{aligned} \right.$$

On déterminera la seconde nappe (M′) de l'enveloppe de (S) en joignant à l'équation précédente les deux suivantes :

$$(4)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}[(\mathrm{X}-x)^2+(\mathrm{Y}-y)^2+(\mathrm{Z}-z)^2] \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial\rho}(\mathrm{X}-x) + \frac{\partial y}{\partial\rho}(\mathrm{Y}-y) + \frac{\partial z}{\partial\rho}(\mathrm{Z}-z) = 0, \\ &\frac{1}{2\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}[\mathrm{X}-x)^2+(\mathrm{Y}-y)^2+(\mathrm{Z}-z)^2] \\ &\quad + \frac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathrm{X}-x) + \frac{\partial y}{\partial\rho_1}(\mathrm{Y}-y) + \frac{\partial z}{\partial\rho_1}(\mathrm{Z}-z) = 0. \end{aligned} \right.$$

Si l'élément linéaire de la nappe (M) est donné sous la forme

$$(5)\qquad ds^2 = \mathrm{H}^2 d\rho^2 + \mathrm{H}_1^2 d\rho_1^2,$$

celui de la nappe (M′) sera fourni par la formule élégante

$$(6)\qquad ds'^2 = \left(\frac{\dfrac{\partial\log\theta}{\partial\rho}}{\dfrac{\partial\log\lambda}{\partial\rho}}\right)^2 \mathrm{H}^2 d\rho^2 + \left(\frac{\dfrac{\partial\log\theta}{\partial\rho_1}}{\dfrac{\partial\log\lambda}{\partial\rho_1}}\right)^2 \mathrm{H}_1^2 d\rho_1^2,$$

où θ sera définie par l'équation

$$(7)\qquad \frac{2\lambda}{\theta} + \mu^2 + \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\mathrm{H}_1^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}\right)^2 = 0.$$

Pour qu'il y ait correspondance avec similitude des éléments infiniment petits, entre (M) et (M′), il faudra donc que l'on ait

$$\frac{\dfrac{\partial \log \theta}{\partial \rho}}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial \rho}} = \pm \frac{\dfrac{\partial \log \theta}{\partial \rho_1}}{\dfrac{\partial \log \lambda}{\partial \rho_1}}.$$

Si l'on prenait le signe + les points focaux de la droite MM′ seraient toujours confondus et l'on retomberait sur le cas des surfaces inverses. La seule hypothèse à suivre est donc celle où l'on prendra le signe —.

Si l'on pose alors, pour abréger,

$$\frac{1}{H}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = \xi, \qquad \frac{1}{H_1}\frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} = \xi_1, \tag{8}$$

on aura

$$\frac{2\lambda}{\theta} + \mu^2 + \xi^2 + \xi_1^2 = 0; \tag{9}$$

et si l'on introduit une inconnue auxiliaire ν, on sera conduit aux équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \theta}{\partial \rho} = \nu^2 H\xi, && \frac{\partial \lambda}{\partial \rho} = H\xi, && \frac{\partial \mu}{\partial \rho} = -\frac{H}{R}\xi, && \frac{\partial \xi}{\partial \rho_1} = \frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \rho}\xi_1, \\ &\frac{\partial \theta}{\partial \rho_1} = -\nu^2 H_1\xi_1, && \frac{\partial \lambda}{\partial \rho_1} = H_1\xi_1, && \frac{\partial \mu}{\partial \rho_1} = -\frac{H_1}{R_1}\xi_1, && \frac{\partial \xi_1}{\partial \rho} = \frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial \rho_1}\xi, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

auxquelles il faudra joindre les relations bien connues entre H, H_1, R, R_1,

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{H}{R}\right) = \frac{1}{R_1}\frac{\partial H}{\partial \rho_1}, \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{H_1}{R_1}\right) = \frac{1}{R}\frac{\partial H_1}{\partial \rho}, \\ &\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \rho_1}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial \rho_1}\right) + \frac{HH_1}{RR_1} = 0. \end{aligned}\right. \tag{11}$$

En différentiant l'équation (9) on obtiendra les deux suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \xi}{\partial \rho} = -\frac{1}{H_1}\frac{\partial H}{\partial \rho_1}\xi_1 + \frac{\mu H}{R} + \frac{\lambda H \nu^2}{\theta^2} - \frac{H}{\theta}, \\ &\frac{\partial \xi_1}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{H}\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}\xi + \frac{\mu H_1}{R_1} - \frac{\lambda H_1 \nu^2}{\theta^2} - \frac{H_1}{\theta}. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Il ne reste plus qu'à calculer de deux manières les dérivées telles que $\frac{\partial^2\xi}{\partial\rho\,\partial\rho_1}$ pour obtenir les relations

$$\frac{\partial \log H\nu}{\partial\rho_1} = \frac{\partial \log\theta}{\partial\rho_1},$$
$$\frac{\partial \log H_1\nu}{\partial\rho} = \frac{\partial \log\theta}{\partial\rho},$$

d'où l'on déduit

$$H\nu = \theta f(\rho), \qquad H_1\nu = \theta f(\rho_1), \qquad \frac{H}{H_1} = \frac{f(\rho)}{f_1(\rho_1)}.$$

En choisissant convenablement les paramètres des lignes de courbure on peut admettre que l'on aura $H = H_1$; et l'on reconnaît dès à présent que *toutes les solutions ultérieures du problème ne peuvent être fournies que par des surfaces isothermiques*.

Faisant donc $H = H_1$, on aura, en désignant par m une constante et en remplaçant, pour la commodité des calculs, θ par $\frac{-1}{m\sigma}$,

$$H\nu = H_1\nu = -\frac{1}{\sigma\sqrt{m}}.$$

En substituant dans les équations (9), (10), (12), on obtiendra le système définitif

$$\mu^2 + \xi^2 + \xi_1^2 = 2m\lambda\sigma, \tag{13}$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma}{\partial\rho} = \frac{\xi}{H}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho} = H\xi, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\rho} = -\frac{H\xi}{R},\\
&\frac{\partial\sigma}{\partial\rho_1} = -\frac{\xi_1}{H}, \qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1} = H\xi_1, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\rho_1} = -\frac{H\xi_1}{R_1},\\
&\frac{\partial\xi}{\partial\rho} = Hm\sigma + \frac{m\lambda}{R} + \frac{\mu H}{R} - \frac{\partial\log H}{\partial\rho_1}\xi_1, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial\rho} = \frac{\partial\log H}{\partial\rho_1}\xi,\\
&\frac{\partial\xi}{\partial\rho_1} = \frac{\partial\log H}{\partial\rho}\xi_1, \qquad \frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1} = Hm\sigma - \frac{m\lambda}{H} + \frac{\mu H}{R_1} - \frac{\partial\log H}{\partial\rho}\xi.
\end{aligned}\right. \tag{14}$$

Ce système sera complètement intégrable et deviendra même linéaire si l'on supprime l'équation (13) qu'on peut regarder comme une intégrale particulière du système (14) formé par toutes les autres. L'intégrale générale contiendra, en comptant m, cinq constantes arbitraires se réduisant à quatre en raison de l'homogénéité. Ainsi :

Étant donnée une surface isothermique quelconque (M), *on peut lui faire correspondre, avec similitude des éléments infiniment petits et conservation des lignes de courbure, une infinité d'autres surfaces isothermiques* (M') *qui, prises chacune avec* (M), *constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères.*

C'est une généralisation de la propriété relative à la correspondance par plans tangents parallèles qui est due à M. Christoffel; mais, tandis que, pour le problème de M. Christoffel, la détermination de la surface correspondante dépend de trois quadratures seulement, nous avons ici un système d'équations linéaires dont l'intégration est loin d'apparaître immédiatement. Tout ce que je puis dire à ce sujet, c'est que, lorsque cette intégration aura été faite pour une surface isothermique donnée, elle le sera par cela même pour toutes celles, en nombre infini, qu'on peut en faire dériver par l'application indéfiniment prolongée de la méthode de récurrence que j'ai donnée aux nos 434, 437 de mes *Leçons*.

Avant de me limiter au cas spécial que j'ai en vue, je signalerai une propriété générale des surfaces isothermiques qui résulte très simplement des calculs précédents.

Le système (2) admet, pour toute surface isothermique, la solution

$$(15) \qquad \lambda = H^2\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) + \lambda_0, \qquad \mu = -\frac{H^2}{2}\left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R_1^2}\right) + \mu_0.$$

λ_0 et μ_0 étant des constantes.

On peut donc toujours, *et cela sans effectuer aucune intégration,* déterminer des surfaces ayant même représentation sphérique qu'une surface isothermique donnée, ou complétant, avec elle, les deux nappes d'une enveloppe de sphères sur lesquelles se correspondent les lignes de courbure.

En particulier, si l'on suppose nulles les constantes λ_0, μ_0, on trouvera que la sphère définie par l'équation

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}[(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2]\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right) \\ &\quad = c(X-x)+c'(Y-y)+c''(Z-z) \end{aligned}$$

enveloppe, en même temps que la surface (M), une autre surface (M') (qui n'est pas isothermique) et dont les lignes de courbure correspondent à celles de (M). En interprétant géométriquement, on a le théorème suivant :

Étant donnée une surface quelconque (M), *on construit, en chacun de ses points* M, *la sphère tangente qui a pour centre le conjugué harmonique de* M, *par rapport au segment formé par les centres de courbure principaux. La condition nécessaire et suffisante pour que* (M) *soit isothermique est que cette sphère enveloppe, en même temps que* (M), *une surface* (M′) *dont les lignes de courbure correspondent à celles de* (M).

Cette sphère a été considérée par M. Thybaut, dans une récente Communication; la relation qu'elle a avec la surface ne change pas si l'on effectue une inversion quelconque; elle se réduit à un plan lorsque (M) est une surface minima; elle a un rayon constant pour les surfaces à courbure moyenne constante [1].

III.

Nous venons de reconnaître quelques propriétés nouvelles des surfaces à lignes de courbure isothermes. On a vu qu'étant donnée une telle surface (Σ), on peut, d'une infinité de manières, déterminer une autre surface isothermique (Σ') telle que (Σ) et (Σ') constituent les deux nappes d'une enveloppe de sphères, la correspondance entre les deux surfaces ayant lieu à la fois avec conservation des lignes de courbure et avec similitude des éléments infiniment petits. Nous avons été conduits à ces propriétés tout à fait générales des surfaces isothermiques par l'étude de certaines propositions relatives à la déformation des surfaces du second degré. Nous avons reconnu, en effet, que, si une quadrique (Q) roule sur une surface applicable (Θ), les huit points m_i, m'_k où les génératrices isotropes de (Q) percent le plan de contact de (Θ) et de (Q) décrivent huit surfaces isothermiques (Σ_i), (Σ'_k). Deux de ces surfaces (Σ_i), (Σ'_k), relatives à des indices différents de i et k, se trouvent précisément dans la relation qui fait l'objet de l'article précédent. Cette remarque va donner les moyens de caractériser

(1) Séance du 29 mai 1899.

les surfaces (Σ_i), (Σ'_i) qui se rattachent à la déformation d'une quadrique générale et qui forment un groupe nettement défini, compris dans l'ensemble infiniment plus étendu des surfaces isothermiques les plus générales.

Supposons, en effet, que l'on donne une des surfaces (Σ_i) que nous désignerons par (Σ_1); il lui correspondra trois autres surfaces (Σ'_2), (Σ'_3), (Σ'_4) qui, prises avec elle, constitueront les deux nappes d'une enveloppe de sphères; et les normales à ces quatre surfaces seront toutes dans le plan de contact de (Θ) et de (Q). Or, si l'on applique les formules (4) de l'article précédent, on reconnaît tout de suite que le plan contenant les normales aux deux nappes de l'enveloppe de sphères qui y est considérée a pour équation

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial\rho}(\mathrm{X}-x)=\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}\mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial\rho_1}(\mathrm{X}-x)$$

et, par conséquent, ne dépend que du quotient des deux dérivées $\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}$.

Donc les trois valeurs de λ qui permettent de faire dériver de (Σ_1) les trois surfaces (Σ'_2), (Σ'_3), (Σ'_4) doivent être telles que le rapport de leurs dérivées premières soit le même, c'est-à-dire elles doivent être fonctions l'une de l'autre; et comme d'ailleurs λ doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$\text{(1)}\qquad \frac{\partial^2\lambda}{\partial\rho\,\partial\rho_1}-\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\rho_1}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho}-\frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial\mathrm{H}}{\partial\rho}\frac{\partial\lambda}{\partial\rho_1}=0,$$

il ne sera pas difficile de conclure de là qu'en négligeant, pour des raisons d'homogénéité, une constante qui entre en multiplicateur, les trois valeurs de λ qui correspondent aux trois surfaces (Σ'_k) ne pourront que différer d'une quantité constante.

Si donc on se reporte aux équations (14) de l'article précédent, on reconnaît qu'il en devra être de même pour les valeurs de σ et de μ, de sorte que, pour chaque surface (Σ'_k), on devra avoir

$$\lambda=\lambda'+\lambda_1,\qquad \sigma=\sigma'+\sigma_1,\qquad \mu=\mu'+\mu_1,$$

λ', σ', μ' étant des fonctions déterminées et λ_1, μ_1, σ_1 des constantes qui varieront seules lorsqu'on passera de l'une des surfaces (Σ'_k) aux deux autres.

Par exemple, λ_1, μ_1, σ_1 seront nulles pour (Σ'_2) et prendront des valeurs que nous devons supposer quelconques pour (Σ'_3), (Σ'_4).

D'après cela, écrivons que l'équation (13) de l'article précédent et celles des équations (14) qui déterminent $\frac{\partial\xi}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\xi_1}{\partial\rho_1}$ ne cessent pas de subsister lorsqu'on y remplace m, λ, σ, μ par $m+m_1$, $\lambda+\lambda_1$, $\sigma+\sigma_1$, $\mu+\mu_1$. Nous obtiendrons les relations

$$2\mu\mu_1+\mu_1^2=2m_1(\lambda+\lambda_1)(\sigma+\sigma_1)+2m(\lambda\sigma_1+\sigma\lambda_1+\lambda_1\sigma_1),$$

$$m_1\lambda+m\lambda_1+m_1\lambda_1+\frac{H^2}{R}\mu_1+H^2(m_1\sigma+m\sigma_1+m_1\sigma_1)=0,$$

$$m_1\lambda+m\lambda_1+m_1\lambda_1-\frac{H^2}{R_1}\mu_1-H^2(m_1\sigma+m\sigma_1+m_1\sigma_1)=0,$$

d'où l'on déduit facilement que les valeurs de λ, μ, σ seront nécessairement de la forme suivante

$$\lambda=u'+\lambda_0,\qquad \sigma=u+\sigma_0,\qquad \mu=-\frac{uu'}{2}+\mu_0, \tag{2}$$

λ_0, σ_0, μ_0 étant trois constantes et u, u' désignant, pour abréger, les quantités suivantes :

$$u=\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1},\qquad u'=H^2\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}\right). \tag{3}$$

En portant les valeurs de λ, μ, σ dans l'équation (13) de l'article précédent

$$\mu^2+\xi^2+\xi_1^2=2m\lambda\sigma, \tag{4}$$

on sera conduit à une relation de la forme suivante :

$$H^2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)^2+H^2\left(\frac{\partial u}{\partial\rho_1}\right)^2+\frac{u^2u'^2}{4}+Auu'+2Bu+2Cu'+D=0, \tag{5}$$

où A, B, C, D désignent des constantes quelconques. Cette relation, qui contient, en même temps que les rayons de courbure principaux, leurs dérivées lorsqu'on se déplace suivant les lignes de courbure, devra être vérifiée en chaque point de la surface (Σ_1). Elle est, comme on voit, de forme assez compliquée. Mais, en même temps qu'elle est nécessaire, elle est suffisante, et nous allons voir qu'en la supposant vérifiée on pourra faire dériver de (Σ_1) les trois surfaces (Σ'_2), (Σ'_3), (Σ'_4).

Si l'on porte en effet les trois valeurs (2) de λ, σ, μ dans l'équation (4) et que l'on identifie la relation ainsi obtenue avec l'équation (5), on aura

$$\mu_0 = -A - 2m, \qquad \lambda_0 = -\frac{B}{m}, \qquad \sigma_0 = -\frac{C}{m}, \tag{6}$$

m devant vérifier l'équation du troisième degré

$$(A + 2m)^2 m - Dm - 2BC = 0. \tag{7}$$

Aux trois racines de cette équation correspondront trois systèmes de valeurs pour μ_0, λ_0, σ_0 et, par suite, trois surfaces (Σ'_2), (Σ'_3), (Σ'_4) dont les normales se couperont mutuellement et couperont aussi la normale à (Σ_1).

Il reste à montrer que les quatre surfaces isothermiques ainsi obtenues sont bien celles qui correspondent à la déformation d'une certaine quadrique. Il faut, pour cela, prendre une des deux tangentes isotropes de (Σ_1), puis les trois tangentes isotropes des surfaces (Σ'_2), (Σ'_3), (Σ'_4) qui rencontrent la première et montrer d'abord que la quadrique (Q) dont ces quatre droites sont des génératrices rectilignes *est invariable de forme*.

Choisissons comme axe des X, des Y, des Z les deux tangentes principales et la normale à la surface (Σ_1). Il n'y a aucune difficulté à former l'équation de la quadrique (Q). En posant, pour abréger,

$$\left\{\begin{aligned} &x = -\frac{X + iY}{\xi + i\xi_1}, \qquad z = Z - \frac{uu'}{2}\,\frac{X + iY}{\xi + i\xi_1}, \\ &y = -(X - iY)(\xi + i\xi_1) + \frac{u^2 u'^2}{4}\,\frac{X + iY}{\xi + i\xi_1} - uu'Z - 2u', \end{aligned}\right. \tag{8}$$

on trouvera que les tangentes isotropes aux surfaces (Σ'_k) ont pour équations

$$\left\{\begin{aligned} &z + (A + 2m)x = 0, \\ &y + Dx + \frac{2B}{m}(1 + Cx) = 0, \end{aligned}\right. \tag{9}$$

de sorte qu'en éliminant m on voit qu'elles sont toutes les trois sur la quadrique définie par l'équation

$$(z + Ax)(y + Dx) - 4Bx(1 + Cx) = 0. \tag{10}$$

Les variables x, y, z définies par les formules (8) peuvent être regardées comme des coordonnées rectilignes et, en vertu de l'identité

$$x(y + 2u') + z^2 = X^2 + Y^2 + Z^2,$$

l'équation du cercle de l'infini écrite avec ces variables x, y, z serait

$$xy + z^2 = 0.$$

Cela permet de former très aisément l'équation en S relative à la quadrique (10), et l'on reconnaît ainsi que cette équation en S ne diffère de l'équation du troisième degré en m (7) que par le changement de m en $\frac{-S}{2}$.

On voit donc que la quadrique (Q), définie par l'équation (10), est invariable de forme; et dès lors il résulte des théorèmes généraux relatifs aux systèmes cycliques qu'elle roule nécessairement sur une surface applicable, ce qui complète notre démonstration.

Au reste, cette démonstration aurait pu se faire entièrement par la Géométrie ([1]).

([1]) Séance du 19 juin 1899.