Annales scientifiques de l'É.N.S.

C. Guichard

Sur les systèmes orthogonaux et les systèmes cycliques (suite)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 15 (1898), p. 179-227.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1898_3_15__179_0>

SUR LES

SYSTÈMES ORTHOGONAUX

ET LES

SYSTÈMES CYCLIQUES

(SUITE).

PAR M. C. GUICHARD,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CLERMONT-FERRAND.

CHAPITRE III.

RÉSEAUX ET CONGRUENCES C; RÉSEAUX ET CONGRUENCES K.

SOMMAIRE.

16. Réseaux applicables. — 17. Réseaux nuls, semi-nuls et H.C. — 18. Formation de ces réseaux. — 19. Réseaux harmoniques à une congruence H.O. — 20. Réseaux C. Premier mode de formation. — 21. Congruence cyclique. Condition nécessaire pour qu'une congruence soit cyclique. — 22. Coordonnées non euclidiennes. Deuxième interprétation des déterminants orthogonaux. — 23. Coordonnées pentasphériques. Troisième interprétation des déterminants orthogonaux. Formation des congruences cycliques et des réseaux cycliques. — 24. La condition nécessaire du n° 21 est suffisante. — 25. Définition des réseaux et congruences K.

16. Deux réseaux $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $B(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ sont dits *applicables* si l'on a

$$(1)\qquad dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = dy_1^2 + \ldots + dy_p^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Comme les coefficients de l'équation de Laplace ne dépendent que de E, F, G, on en conclut que $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_p$ sont solutions d'une même équation

$$(2)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v} = P\frac{\partial\theta}{\partial u} + Q\frac{\partial\theta}{\partial v}.$$

Ces réseaux sont donc correspondants; prenons deux congruences harmoniques correspondantes ayant pour foyers RS, R′S′. Les deux triangles ARS et BR′S′ ont leurs côtés égaux. Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $Y_1, Y_2, \ldots, Y_p$ les paramètres directeurs de ces deux congruences, on peut écrire

$$X_i = \frac{\partial x_i}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$Y_k = \frac{\partial y_k}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial y_k}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u}.$$

Les quantités X_i, Y_k satisfont à la même équation de Laplace et sont, en outre, liées par la relation

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = Y_1^2 + Y_2^2 \ldots + Y_p^2. \tag{3}$$

Soit P un point qui décrit un réseau dérivé de A. Ses coordonnées sont de la forme

$$x'_i = x_i + \lambda\frac{\partial x_i}{\partial u} + \mu\frac{\partial x_i}{\partial v}, \tag{4}$$

où λ et μ sont définis par les équations

$$0 = \theta + \lambda\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mu\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

$$0 = \theta_1 + \lambda\frac{\partial \theta_1}{\partial u} + \mu\frac{\partial \theta_1}{\partial v}.$$

Cela posé, le point Q dont les coordonnées $(y'_1, \ldots, y'_p)$ sont

$$y'_k = y_k + \lambda\frac{\partial y_k}{\partial u} + \mu\frac{\partial y_k}{\partial v} \tag{5}$$

décrit un réseau dérivé de (B). Ces deux réseaux dérivés seront appelés *correspondants*. Les points P et Q occupent la même position relativement aux tangentes aux réseaux A et B. Enfin les coordonnées $x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_p$ satisfont à la même équation aux dérivées partielles et cette équation admet la solution

$$x'^2_1 + \ldots + x'^2_n - y'^2_1 - \ldots - y'^2_n.$$

17. Un *réseau nul* est un réseau tel que son ds^2 est identiquement nul. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du réseau, on a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = 0.$$

Il n'existe de tels réseaux qu'à partir de $n = 6$. Prenons une congruence harmonique à ce réseau, on aura ici

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 0.$$

Donc :

Toute congruence harmonique à un réseau nul est H.O.

Il en résulte immédiatement :

Tout réseau dérivé d'un réseau nul est O.

Un réseau sera *semi-nul* s'il est applicable sur un réseau à une seule dimension, c'est-à-dire si les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont telles que l'on ait

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = dy_1^2.$$

Un tel réseau est la projection du réseau nul de l'espace à $(n+1)$ dimensions qui a pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n, iy_1$.

Il n'existe de tels réseaux qu'à partir de $n = 5$. Pour une congruence harmonique à ce réseau, on a

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2 = Y_1^2.$$

Y_1 ne peut être nul que pour $\theta = y_1 + \text{const.}$; donc

Parmi les congruences harmoniques à un réseau semi-nul, il y a une série de congruences H.O, *correspondant à* $\theta = y$; *toutes les autres sont des congruences* O.

Soit (A) le réseau semi-nul, R, S les foyers d'une congruence harmonique H.O. Les coordonnées $(z_1, \ldots, z_n)$ de R et $(t_1, \ldots, t_n)$ de S sont

$$z_i = x_i - \frac{y_1}{\dfrac{\partial y_1}{\partial u}} \frac{\partial x_i}{\partial u},$$

$$t_i = x_i - \frac{y_1}{\dfrac{\partial y_1}{\partial v}} \frac{\partial x_i}{\partial v}.$$

On en déduit

$$\overline{AR}^2 = \overline{AS}^2 = y_1^2$$

Le triangle ARS est isoscèle.

Enfin, nous appellerons réseau *hypercyclique* ou simplement réseau H, C un réseau applicable sur l'espace à deux dimensions. Pour un tel réseau, on a

$$dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 = dy_1^2 + dy_2^2.$$

Il n'existe de tels réseaux qu'à partir de $n = 4$. Pour les congruences harmoniques à tels réseaux, on a

$$X_1^2 + \ldots + X_n^2 = Y_1^2 + Y_2^2.$$

Si $\theta = y_1 \pm iy_2$, le second membre est nul, la congruence est H.O; si $\theta = ay_1 + by_2$, a et b étant constants, le second membre est carré parfait, la congruence est O.

Donc :

Parmi les congruences harmoniques à un réseau H.C, *il y a deux séries de congruences* H.O *correspondant aux droites isotropes du réseau plan applicable; il y a aussi* ∞^1 *série de congruences* O *correspondant aux droites du plan.*

Dans les trois cas que nous venons d'étudier, le réseau est enveloppé par un plan qui contient deux normales à un réseau O. Nous allons établir l'inverse.

18. Soient, en effet, L et N deux normales à un réseau (O), y_1, y_2, ..., y_n les paramètres directeurs de L, z_1, z_2, ..., z_n ceux de N. La droite menée par le point du réseau O, ayant pour paramètres directeurs

$$ay_i + bz_i$$

est une droite du plan L, N normale à O. On peut toujours, et d'une infinité de manières, choisir deux de ces normales de façon qu'elles soient rectangulaires; nous pouvons supposer que ce sont les droites L, N elles-mêmes. On a alors

$$\Sigma y_i z_i = 0. \tag{6}$$

Désignons par X_1, ..., X_n les coordonnées du point M du réseau O. On a alors

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X_i}{\partial u} &= h\xi_i \\ \frac{\partial X_i}{\partial v} &= l\eta_i \end{aligned}\right. \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Un point quelconque P du plan L, N a pour coordonnées

$$Y_i = X_i + \rho y_i + r z_i. \tag{8}$$

On a d'ailleurs, en vertu des formules (11) du Chapitre précédent des équations de la forme

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = a\xi_i, & \dfrac{\partial z_i}{\partial u} = e\xi_i, & \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, & \dfrac{\partial e}{\partial v} = fm, \\ \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = b\eta_i, & \dfrac{\partial z_i}{\partial v} = f\eta_i, & \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, & \dfrac{\partial f}{\partial u} = en. \end{array}\right. \tag{9}$$

En différentiant les formules (8), on trouve

$$\frac{\partial Y_i}{\partial u} = \xi_i(h + a\rho + er) + y_i\frac{\partial \rho}{\partial u} + z_i\frac{\partial r}{\partial u},$$

$$\frac{\partial Y_i}{\partial v} = \eta_i(l + b\rho + fr) + y_i\frac{\partial \rho}{\partial v} + z_i\frac{\partial r}{\partial v}.$$

On voit que, si l'on pose

$$\left\{\begin{array}{l} h + a\rho + er = 0, \\ l + b\rho + fr = 0, \end{array}\right. \tag{10}$$

on aura simplement

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial Y_i}{\partial u} = y_i\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + z_i\dfrac{\partial r}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial Y_i}{\partial v} = y_i\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + z_i\dfrac{\partial r}{\partial v}. \end{array}\right. \tag{11}$$

Des formules (10), on déduit

$$\left\{\begin{array}{l} a\dfrac{\partial \rho}{\partial v} + e\dfrac{\partial r}{\partial v} = 0, \\ b\dfrac{\partial \rho}{\partial u} + f\dfrac{\partial r}{\partial u} = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Par suite, la différentiation de (11) donne

$$\frac{\partial^2 Y_i}{\partial u\,\partial v} = y_i\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + z_i\frac{\partial^2 r}{\partial u\,\partial v}. \tag{13}$$

Les formules (11) et (13) montrent que le point de coordonnées Y_i décrit un réseau; l'équation aux dérivées partielles de ce réseau est celle à laquelle satisfont ρ et r. Pour ce réseau, on a

$$ds^2 = \Sigma\, dY_i^2 = d\rho^2\, \Sigma\, y_i^2 + dr^2\, \Sigma\, z_i^2. \tag{14}$$

Remarquons que si L ou N ne sont pas des droites isotropes, on pourra supposer

$$\Sigma\, y_i^2 = 1 \quad \text{ou} \quad \Sigma\, z_i^2 = 1.$$

Donc :

Si les deux normales L *et* N *sont isotropes, le réseau* (Y) *est nul.*

Si une seule des deux est isotrope, le réseau est semi-nul.

Si aucune des deux n'est isotrope, le réseau est H.C.

Dans le premier cas, toutes les normales du plan L, N sont isotropes; dans le deuxième, il y en a une seule; dans le troisième, deux.

19. Nous avons vu que, parmi les réseaux harmoniques à une congruence H.O peuvent se trouver des réseaux nuls, semi-nuls ou H.C. Nous allons montrer qu'il n'en existe pas d'autres.

Soient, en effet, $M(x_1, \ldots, x_n)$ un réseau harmonique à (G) qui est une congruence H.O; μ le réseau point correspondant à M; (g) la congruence harmonique à μ, parallèle à (G); $r(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ $s(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ses foyers. On a des formules de la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_i}{\partial u} = h\xi_i, \\ &\frac{\partial x_i}{\partial v} = l\eta_i, \\ &\Sigma\,(\xi_i - \eta_i)^2 = 0. \end{aligned}\right. \tag{15}$$

Cela posé, nous considérons trois cas :

1° La droite rs est située sur l'hypercône

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = 0;$$

toutes les droites du plan (μ) sont isotropes. On a, dans ce cas,

$$\Sigma\, \xi_i^2 = 0, \qquad \Sigma\, \eta_i^2 = 0, \qquad \Sigma\, \xi_i \eta_i = 0;$$

les formules (15) montrent que le réseau est nul.

2° La droite rs est sur l'hypersphère

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 = \text{const.}$$

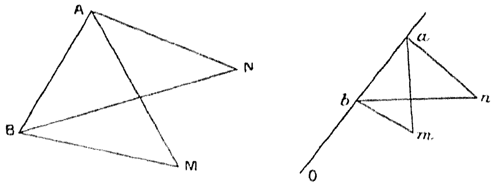
Soit alors (n) un point de rs qui décrit un réseau. La droite On, qui va de l'origine à (n), est une normale de ce réseau sphérique; le plan μ contient donc deux normales à un réseau O.S; donc, le plan de (H) contient deux normales d'un réseau O. On retombe sur un cas étudié précédemment. On vérifie facilement que On est perpendiculaire à rs; donc le réseau (M) est semi-nul.

3° La droite rs est quelconque.

Nous nous appuierons sur le lemme suivant qui, dans le cas de l'espace à trois dimensions, est dû à Ribaucour.

Chaque droite d'une congruence rencontre une hypersphère en deux points A *et* B; *si* A *décrit un réseau, il en est de même de* B.

Fig. 10.



Quand u varie seul, les tangentes en A et B, étant dans un même plan focal, se rencontrent en M; de même, si v varie seul, les tangentes aux systèmes A et B se rencontrent en N; de plus, les triangles MAB, NAB sont isoscèles.

Cela posé, si A décrit un réseau, ce réseau est O; soit a un réseau parallèle; le point b, inverse de a, décrit un réseau; marquons les tangentes am, an, bm, bn aux réseaux (a) et (b); les triangles mab, nab sont isoscèles d'après une propriété de l'inversion; donc b et B décrivent des courbes parallèles; par suite, (B) est un réseau.

Chaque droite d'une congruence H.O rencontre l'hypersphère en deux points dont l'un est à l'infini. Ce dernier, étant dans un hyperplan, décrit un réseau; il en est de même du premier. Donc:

Les points d'intersection d'une congruence H.O *et d'une hypersphère quelconque décrivent un réseau.*

Coupons alors la droite rs par une hypersphère ayant pour centre l'origine O; soit n le point d'intersection. Le plan de μ contient deux normales rs, On au réseau (n); le plan de (M) contient deux normales à un réseau O. Donc le réseau M est H.C.

20. Nous appellerons *réseau cyclique* ou, plus simplement, *réseau* C, de l'espace à n, un réseau applicable sur l'espace à trois. Si $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les coordonnées du réseau, y_1, y_2, y_3 celles du réseau applicable, on a l'identité

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2. \tag{16}$$

Ce réseau est la projection de réseaux H.C de l'espace à $n+1$; en effet, un tel réseau est la projection du réseau H.C qui a pour coordonnées x_1, x_2, $\ldots$, x_n, iy_1. Comme on peut, par un changement de coordonnées, prendre pour y_1 la distance d'un point du réseau (y) à un plan fixe quelconque, on voit que chaque réseau C est d'une infinité de manières projection d'un réseau H.C.

Il résulte de l'identité (16) que l'on a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + \ldots + dy_3^2 - \sum_3^n dx_i^2;$$

donc, le réseau (x_1, x_2, x_3) de l'espace à trois, est applicable sur le réseau $(y_1, y_2, y_3, ix_3, \ldots, ix_n)$ qui est, par conséquent, cyclique. Les deux réseaux de l'espace à trois (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) seront dits *conjugués;* comme on peut effectuer une substitution orthogonale sur x_1, x_2, $\ldots$, x_n, on voit qu'un réseau a une infinité de conjugués.

Soit M un réseau C, c'est la projection d'un réseau M_1 qui est (H.C); il existe donc une congruence G_1 harmonique à M_1 et H.O; cette congruence G_1 se projette suivant une congruence (G) qui est O. Donc :

Il y a une infinité de congruences O *harmoniques à un réseau* C.

Nous étudierons la disposition de ces congruences dans le Chapitre suivant.

Inversement, chaque congruence O peut être considérée comme la projection d'une congruence H.O. Donc, d'après le numéro précédent :

Tout réseau harmonique à une congruence O *est un réseau semi-nul, réseau* H.C *ou réseau* C.

Pour former ces réseaux C, prenons un déterminant orthogonal Δ dans l'espace à $n+1$ dimensions

$$(17) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n+1} \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \dots & x_{n-1}^{n+1} \\ \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^{n+1} \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Supposons que, dans cet espace, un point M décrive un réseau O parallèle aux réseaux O.S de Δ. Soit $X^1, X^2, \dots, X^{n+1}$ les coordonnées de M. On aura

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial X^i}{\partial u} &= h\xi^i \\ \frac{\partial X^i}{\partial v} &= l\eta^i \end{aligned} \right. \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1).$$

Menons le plan des deux normales $h_1(x_1^1, \dots, x_1^{n+1})$ et $h_2(x_2^1, \dots, x_2^{n+1})$. Ce plan enveloppe un réseau H.C ayant pour coordonnées

$$Y^i = X^i + \rho x_1^i + r x_2^i \qquad (i = 1, 2, \dots, n+1),$$

où ρ et r sont définis (n° 18) par les équations

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} h + a_1\rho + a_2 r &= 0, \\ l + b_1\rho + b_2 r &= 0. \end{aligned} \right.$$

On aura alors

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y^i}{\partial u} &= x_1^i \frac{\partial \rho}{\partial u} + x_2^i \frac{\partial r}{\partial u}, \\ \frac{\partial Y^i}{\partial v} &= x_1^i \frac{\partial \rho}{\partial v} + x_2^i \frac{\partial r}{\partial v}. \end{aligned} \right.$$

Le réseau (A) décrit par le point de coordonnées $(Y_1, \dots, Y_n)$ est cyclique; il est applicable sur le réseau (B) décrit par le point qui a pour coordonnées (ρ, r, iY_{n+1}).

Il résulte de ce qui précède qu'on obtient ainsi tous les réseaux cycliques. Les cosinus directeurs des tangentes au réseau B sont

$$\frac{d\rho}{\partial u},\quad \frac{\partial r}{\partial u},\quad i\left(x_1^{n+1}\frac{\partial\rho}{\partial u}+x_2^{n+1}\frac{\partial r}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial\rho}{\partial v},\quad \frac{\partial r}{\partial v},\quad i\left(x_1^{n+1}\frac{\partial\rho}{\partial v}+x_2^{n+1}\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

Il en résulte que ceux de la normale au réseau B sont

$$x_1^{n+1},\quad x_2^{n+1},\quad i.$$

On trouve de même que ceux de la normale au réseau conjugué (A′), qui est la projection de A, sont les mineurs de la matrice

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}.$$

On peut aussi, à partir de $n=5$, former d'une façon analogue des réseaux cycliques sans passer par l'espace à $n+1$ dimensions. Prenons, en effet, un déterminant orthogonal et un réseau O correspondant à n.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & \ldots & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-2}^1 & \ldots & x_{n-2}^n \\ \xi^1 & \ldots & \xi^n \\ \eta^1 & \ldots & \eta^n \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Soient $X^1, X^2, \ldots, X^n$ les coordonnées d'un point M du réseau O. On a

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial X^i}{\partial u} &= h\xi^i \\ \frac{\partial X^i}{\partial v} &= l\eta^i \end{aligned}\right. \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{20}$$

Prenons alors trois normales L_1, L_2, L_3 rectangulaires deux à deux, par exemple celles dont les cosinus directeurs sont les trois premières lignes de Δ. Prenons alors le point $P(Y^1, Y^2, Y\ldots, {}^n)$ tel que

$$Y^i = X^i + \lambda x_1^i + \mu x_2^i + \nu x_3^i \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \tag{21}$$

d'où l'on déduit, en tenant compte de la formule (20) et des formules (11) du Chapitre II,

$$\frac{\partial Y^i}{\partial u} = x_1^i \frac{\partial \lambda}{\partial u} + x_2^i \frac{\partial \mu}{\partial u} + x_3^i \frac{\partial \nu}{\partial u} + (h + a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu)\xi^i,$$

$$\frac{\partial Y^i}{\partial v} = x_1^i \frac{\partial \lambda}{\partial v} + x_2^i \frac{\partial \mu}{\partial v} + x_3^i \frac{\partial \nu}{\partial v} + (l + b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu)\eta^i.$$

On voit que, si l'on suppose que λ, μ, ν sont liés par les deux relations

$$(22)\qquad \begin{cases} h + a_1\lambda + a_2\mu + a_3\nu = 0, \\ l + b_1\lambda + b_2\mu + b_3\nu = 0, \end{cases}$$

on aura simplement

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y^i}{du} = x_1^i \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + x_2^i \dfrac{\partial \mu}{\partial u} + x_3^i \dfrac{\partial \nu}{\partial u}, \\[2ex] \dfrac{\partial Y^i}{dv} = x_1^i \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + x_2^i \dfrac{\partial \mu}{\partial v} + x_3^i \dfrac{\partial \nu}{\partial v}. \end{cases}$$

En différentiant les équations (22) et en tenant compte des équations (11) et (31) du Chapitre II, on aura

$$(24)\qquad \begin{cases} a_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} + a_2 \dfrac{\partial \mu}{\partial v} + a_3 \dfrac{\partial \nu}{\partial v} = 0, \\[2ex] b_1 \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + b_1 \dfrac{\partial \mu}{\partial u} + b_3 \dfrac{\partial \nu}{\partial v} = 0; \end{cases}$$

et, ensuite, en différentiant les équations (23),

$$(25)\qquad \frac{\partial^2 Y^i}{\partial u\, \partial v} = x_1^i \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v} + x_2^i \frac{\partial^2 \mu}{\partial u\, \partial v} + x_3^i \frac{\partial^2 \nu}{\partial u\, \partial v}.$$

Cela posé, prenons le point Q de l'espace à trois dimensions qui a pour coordonnées λ, μ, ν. Il résulte des formules (23) que les surfaces décrites par P et Q ont le même ds^2. Si maintenant u et v sont fixes, les points P et Q, dont les coordonnées satisfont aux relations (21) et (22), décrivent des droites p et q; on voit facilement que ces droites décrivent des congruences (p) et (q). Faisons correspondre sur ces droites p, q les points P et Q qui correspondent aux mêmes systèmes de valeurs de λ, μ, ν. Si le point Q décrit un réseau, il en est de même de P, et inversement; ces réseaux sont applicables l'un sur l'autre. Donc :

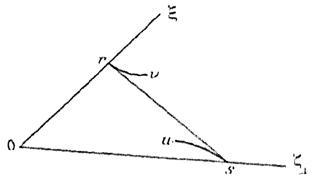
Tous les réseaux conjugués à (p) sont cycliques.

Tous les réseaux conjugués à (q) sont applicables sur des réseaux de l'espace à n dimensions.

21. Nous appellerons *congruence cyclique* ou *congruence* C toute congruence harmonique à un réseau O.

Soient M un réseau O, G une congruence harmonique; prenons le réseau point μ de M; soient $O\xi$, $O\eta$ (*fig.* 11) les droites de ce ré-

Fig. 11.



seau; $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ leurs cosinus directeurs; ces quantités forment les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal, de sorte que l'on a

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, \qquad \frac{d\eta_i}{\partial u} = m\xi_i. \tag{26}$$

Soient r, s les foyers d'une congruence parallèle à (G) et harmonique à (μ). Les coordonnées $(X_1, \ldots, X_n)$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des points r et s sont de la forme

$$X_i = \frac{\xi_i}{q}, \qquad Y_i = \frac{\eta_i}{r}.$$

Pour déterminer q et r, écrivons que ces points sont foyers. On a

$$\frac{\partial X_i}{\partial v} = \frac{1}{q^2}\left(\xi_i \frac{\partial q}{\partial v} - qn\eta_i\right), \qquad \frac{\partial Y_i}{\partial u} = \frac{1}{r^2}\left(\eta_i \frac{\partial r}{\partial u} - rm\xi_i\right);$$

écrivons que ces quantités sont proportionnelles aux paramètres directeurs $Z_1, \ldots, Z_n$ de rs

$$Z_i == r\xi_i - q\eta_i. \tag{27}$$

On trouve

$$(28)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial v} &= nr, \\ \frac{\partial r}{\partial u} &= mq, \end{aligned}\right.$$

de sorte que les fonctions q et r sont celles qui ont été introduites au nº 13.

En différentiant les équations (27) et en tenant compte des conditions (26), (28) et de celles qui s'en déduisent par différentiation, on trouve successivement

$$\frac{\partial Z_i}{\partial u} = r\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\eta_i,$$

$$\frac{\partial Z_i}{\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v}\xi_i - q\frac{\partial \eta_i}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 Z_i}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \xi_i}{\partial u} - \frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial \eta_i}{\partial v} + mnZ_i.$$

On en conclut que les n fonctions Z_i sont solutions de

$$(29)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{qr}\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v}\right)Z.$$

D'autre part, on a, d'après (27),

$$(30)\qquad Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = q^2 + r^2.$$

D'autre part, si l'équation à laquelle satisfont $Z_1, \ldots, Z_n$ est écrite sous la forme

$$(31)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + RZ$$

on a forcément

$$r = hU, \qquad q = lV,$$

et, par conséquent, on aura

$$(32)\qquad Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = h^2U^2 + l^2V^2.$$

Cette propriété subsiste si l'on multiplie ensuite les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ par un même facteur. Donc :

Pour qu'une congruence soit cyclique, il faut que ses paramètres directeurs $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$, *qui satisfont à l'équation*

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + RZ$$

soient tels que l'on ait

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \ldots + Z_n^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2, \tag{32}$$

U *et* V *étant respectivement des fonctions de* u *seul et de* v *seul.*

Nous verrons plus loin (nº 24) que cette condition est suffisante.

22. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point M de l'espace à n dimensions; ses coordonnées homogènes seront

$$y_i = \lambda x_i, \qquad y_{n+1} = \lambda \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Si le point M n'appartient pas à l'hypersphère S dont l'équation est

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + 1 = 0,$$

on pourra choisir λ de telle sorte que l'on ait

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 + y_{n+1}^2 = 1.$$

Ces quantités $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}$ seront appelées les *coordonnées non euclidiennes* de M.

Cela posé, considérons un déterminant orthogonal à $(n+1)$ lignes

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n+1} \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n-1}^1 & x_{n-1}^2 & \ldots & x_{n-1}^{n+1} \\ \xi^1 & \xi^2 & \ldots & \xi^{n+1} \\ \eta^1 & \eta^2 & \ldots & \eta^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Désignons par A_k, P, Q les points qui ont pour coordonnées non euclidiennes respectivement $(x_k^1, \ldots, x_k^{n+1})$, $(\xi^1, \ldots, \xi^{n+1})$, $(\eta_1, \ldots, \eta^{n+1})$.

Ces $(n+1)$ points sont deux à deux conjugués par rapport à l'hypersphère S.

Cela posé, les formules

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial v} = n\eta^i, \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial u} = m\xi^i$$

montrent que PQ décrit une congruence qui a pour foyers P et Q; ces foyers sont donc conjugués par rapport à S.

Il est facile de montrer que, inversement, les coordonnées non euclidiennes des foyers d'une congruence dont les foyers sont conjugués par rapport à S forment les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal.

Prenons maintenant les formules

$$\frac{\partial x_k^i}{\partial u} = a_k \xi^i,$$

$$\frac{\partial x_k^i}{\partial u} = b_k \eta^i, \qquad \frac{\partial^2 x_k^i}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{a_k}\frac{\partial a_k}{\partial v}\frac{\partial x_k^i}{\partial u} + \frac{1}{b_k}\frac{\partial b_k}{\partial u}\frac{\partial x_k^i}{\partial u}.$$

Elles montrent que le point A_k décrit un réseau dont les tangentes sont $A_k P$, $A_k Q$. Ces réseaux sont tels que

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} \frac{\partial x_k^i}{\partial u}\frac{\partial x_k^i}{\partial v} = 0;$$

ils sont orthogonaux au point de vue non euclidien; nous les appellerons *réseaux* (O.E). *De tels réseaux sont les projections de réseaux* O.S *de l'espace à* $n+1$.

En effet, les quantités

$$1, \quad x_k^1, \quad x_k^2, \quad \ldots, \quad x_k^{n+1}$$

satisfont à une équation de Laplace. Il en sera de même des quantités

$$(33) \qquad x_k'^i = \frac{i x_k^i}{x_k^{n+1}}, \qquad x_k'^{n+1} = \frac{1}{x_k^{n+1}} \quad \text{et} \quad 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On a, d'ailleurs,

$$\sum_{i=1}^{i=n+1} x'^i_k = 1.$$

Le point B_k de l'espace à $n+1$ qui a pour coordonnées

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_{n+1}$$

décrit un réseau O.S. Il se projette au point B'_k de coordonnées

$$x'_1, \quad x'_2, \quad \ldots, \quad x'_n.$$

Ce point est homothétique de A_k; donc le réseau A_k est la projection d'un réseau O.S.

On peut remarquer que les formules (33) permettent de transformer un réseau O.S de l'espace à $n+1$ en un autre, et, par suite, un déterminant orthogonal en un autre. Je n'insiste pas sur cette transformation qu'il est facile d'effectuer.

Prenons deux de ces réseaux, A_k et A_l; la droite A_kA_l rencontre l'hypersphère en deux points C et D; les coordonnées du point C sont

$$x''^i = x^i_k + i x'^i_l.$$

On a, par conséquent,

$$\frac{\partial x''^i}{\partial u} = (a_k + i a_l)\xi^i,$$

$$\frac{\partial x''^i}{\partial v} = (b_k + i b_l)\eta^i.$$

On en conclut que ce point C décrit un réseau, qui est naturellement O.S. La congruence PQ est harmonique à ce réseau et est, par conséquent, cyclique.

On prouve facilement que toute congruence harmonique à un réseau O.S a ses foyers conjugués par rapport à l'hypersphère S; c'est donc une congruence C.S.

Toute congruence cyclique est parallèle à une congruence C.S, car tout réseau O est parallèle à un réseau O.S.

Les paramètres directeurs $(L_1, L_2, \ldots, L_n)$ de la droite PQ sont

$$L_i = \xi^i \eta^{n+1} - \xi^{n+1}\eta^i. \tag{34}$$

En différentiant, on trouve

$$(35)\qquad \frac{\partial L_i}{\partial u} = -\eta^{n+1}\sum_{k=1}^{k=n-1} a_k x_k^i + \eta^i \sum_k a_k x_k^{n+1},$$

$$(36)\qquad \frac{\partial L_i}{\partial v} = \quad \xi^{n+1}\sum b_k x_k^i - \xi^i \sum b_k x_k^{n+1},$$

$$(37)\qquad \frac{\partial^2 L_i}{\partial u\,\partial v} = -\frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial v}\sum_k a_k x_k^i + \frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial u}\sum b_k x_k^i + m\eta^i \sum b_k x_k^{n+1} - n\xi^i \sum a_k x_k^{n+1}.$$

On en conclut que $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont solutions de l'équation

$$(38)\qquad \frac{\partial^2 L}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\eta^{n+1}}\frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial v}\frac{\partial L}{\partial u} + \frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{\partial L}{\partial v} + \left(mn - \frac{1}{\xi^{n+1}}\frac{\partial \xi^{n+1}}{\partial u}\frac{1}{\eta^{n+1}}\frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial v}\right)L.$$

On vérifie que, conformément à la remarque déjà faite, on a

$$L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = (\eta^{n+1})^2 + (\xi^{n+1})^2.$$

On en conclut que, si l'on pose

$$(39)\qquad \begin{cases} x'_k = \dfrac{iL_k}{L_n} & (k = 1, 2, \ldots, n-1), \\[2mm] \xi' = \dfrac{\eta^{n+1}}{L_n}, & \eta' = \dfrac{\xi^{n+1}}{L_n}, \end{cases}$$

les $(n-1)$ quantités $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}$ sont solutions

$$(40)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\,\partial v} = \frac{1}{\xi'}\frac{\partial \xi'}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta'}\frac{\partial \eta'}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Comme, d'ailleurs, on a

$$x_1'^2 + x_2'^2 + \ldots + x_{n-1}'^2 + \xi'^2 + \eta'^2 = 1,$$

on en conclut que $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, \xi', \eta'$ forment la dernière colonne d'un déterminant orthogonal.

Cette remarque permet, à l'aide d'une opération différentielle d'ordre $n-1$, de déduire de chaque déterminant orthogonal Δ, un nouveau déterminant orthogonal Δ'.

23. Introduisons maintenant des quantités analogues aux coordonnées pentasphériques de M. Darboux. Prenons l'hypersphère de centre $A(a_1, \ldots, a_n)$ et de rayon R. Son équation est

$$(41)\qquad (x_1-a_1)^2+\ldots+(x_n-a_n)^2-R^2=0.$$

Écrivons-la sous la forme suivante :

$$(42)\qquad \begin{aligned} 2\alpha_1 x_1+\ldots+2\alpha_n x_n+\alpha_{n+1}(x_1^2+\ldots+x_n^2-1)& \\ +i\alpha_{n+2}(x_1^2+\ldots+x_n^2+1)&=0. \end{aligned}$$

En identifiant les équations (41) et (42), on trouve

$$(43)\qquad \begin{cases} a_i=\dfrac{-\alpha_i}{\alpha_{n+1}+i\alpha_{n+2}} \qquad (i=1, 2, \ldots, n), \\ P=a_1^2+\ldots+a_n^2-R^2=-\dfrac{\alpha_{n+1}-i\alpha_{n+2}}{\alpha_{n+1}+i\alpha_{n+2}}, \\ R^2=\dfrac{\alpha_1^2+\ldots+\alpha_n^2+\alpha_{n+1}^2+\alpha_{n+2}^2}{(\alpha_{n+1}+i\alpha_{n+2})^2}. \end{cases}$$

Si la sphère se réduit à un point, on aura

$$(44)\qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2+\alpha_{n+1}^2+\alpha_{n+2}^2=0.$$

Ces quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$, qui sont définies à un facteur près, sont les coordonnées pentasphériques du point.

Si, au contraire, R n'est pas nul, on pourra supposer

$$(45)\qquad \alpha_1^2+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2+\alpha_{n+1}^2+\alpha_{n+2}^2=1.$$

Ces quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}$ sont les coordonnées de la sphère. On aura son centre et son rayon par les formules

$$(46)\qquad a_i=\frac{-\alpha_i}{\alpha_{n+1}+i\alpha_{n+2}}, \qquad R=\frac{1}{\alpha_{n+1}+i\alpha_{n+2}}.$$

Pour que deux sphères soient orthogonales, il faut et il suffit que la somme des produits des coordonnées correspondantes soit nulle. Cette condition donne comme cas limite la condition pour qu'un point soit situé sur une sphère.

Cela posé, considérons un déterminant orthogonal à $n+2$ lignes

$$D = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n & x_1^{n+1} & x_1^{n+2} \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n & x_2^{n+1} & x_2^{n+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n & x_n^{n+1} & x_n^{n+2} \\ \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n & \xi^{n+1} & \xi^{n+2} \\ \eta^1 & \eta^2 & \dots & \eta^n & \eta^{n+1} & \eta^{n+2} \end{vmatrix}.$$

Désignons par (A_i) la sphère qui a pour coordonnées $x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n, x_i^{n+1}, x_i^{n+2}$; soit A_i son centre. De même, soient (R) et (S) les sphères qui ont respectivement pour coordonnées les deux dernières lignes de D; R et S leurs centres. On a ainsi un système de $(n+2)$ sphères deux à deux orthogonales. Les coordonnées homogènes des points R et S étant

$$\begin{gathered} \xi^1, \quad \xi^2, \quad \dots, \quad \xi^n, \quad \xi^{n+1} + i\xi^{n+2}, \\ \eta^1, \quad \eta^2, \quad \dots, \quad \eta^n, \quad \eta^{n+1} + i\eta^{n+2}, \end{gathered}$$

les formules

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial v} = n\eta^k, \qquad \frac{\partial \eta^k}{\partial u} = m\xi^k$$

prouvent que la droite RS décrit une congruence qui a pour foyers R et S.

Le point A_1, par exemple, a pour coordonnées homogènes

$$x_1^1, \quad x_1^2, \quad \dots, \quad x_1^n, \quad x_1^{n+1} + ix_1^{n+2};$$

les formules

$$\frac{\partial x^k}{\partial u} = a_1\xi^k, \qquad \frac{\partial x_1^k}{\partial v} = b_1\eta^k$$

montrent que ce point décrit un réseau harmonique à la droite RS. Il en est de même de tous les autres points $A_2, \dots, A_n$. La droite qui joint deux quelconques de ces points décrit donc une congruence qui est dérivée (n° 7) de la congruence RS.

Prenons maintenant les $(n+1)$ quantités

$$y_k = x_1^k + i x_2^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n+2).$$

On a

$$\sum_1^{n+2} y_k^2 = 0.$$

Ces quantités sont les coordonnées pentasphériques d'un point B situé sur la droite A_1A_2. Les formules

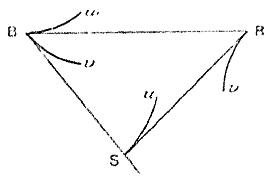
$$\frac{\partial y_k}{\partial u} = (a_1 + i a_2)\xi^k, \qquad \frac{\partial y_k}{\partial v} = (b_1 + i b_2)\eta^k$$

prouvent que ce point décrit un réseau qui est O et conjugué à la congruence RS. Donc :

La congruence RS *est cyclique.*

Réciproquement, toute congruence cyclique peut être obtenue ainsi. Soit, en effet, RS une congruence cyclique harmonique à un réseau harmonique B (*fig.* 12).

Fig. 12.



Désignons par $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^{n+1}, \xi^{n+2}$ les coordonnées de la sphère de centre R et de rayon RB, par $(\eta^1, \ldots, \eta^{n+1}, \eta^{n+2})$ celles de la sphère de centre S et de rayon SB. Ces deux sphères sont évidemment orthogonales. De sorte que l'on aura

$$(47) \qquad \sum_1^{n+1} (\xi^k)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} (\eta^k)^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} \xi^k \eta^k = 0.$$

D'autre part, puisque R est foyer, on a des formules

$$\frac{\partial \xi^k}{\partial v} = a\xi^k + b\eta^k, \qquad \frac{\partial(\xi^{n+1} + i\xi^{n+2})}{\partial v} = a(\xi^{n+1} + i\xi^{n+2}) + b(\eta^{n+1} + i\eta^{n+2})$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n).$$

La première des formules (47) montre que l'on aura aussi

$$\frac{\partial(\xi^{n+1}-i\xi^{n+2})}{\partial v}=a(\xi^{n+1}-i\xi^{n+2})+b(\eta^{n+1}-i\eta^{n+2}),$$

de sorte qu'on aura, en définitive,

$$\frac{\partial\xi^k}{\partial v}=a\xi^k+b\eta^k \qquad (k=1,2,\ldots n+1,n+2).$$

On voit facilement que a doit être nul ; en raisonnant de même sur les quantités η, on trouvera

$$(48)\qquad \frac{\partial\xi^k}{\partial v}=n\eta^k, \qquad \frac{\partial\eta^k}{\partial u}=m\xi^k.$$

Les formules (47) et (48) prouvent que les quantités ξ et η sont les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal.

Prenons maintenant un réseau O dans l'espace à $n+1$ dimensions : soient $M(X_1, X_2, \ldots, X_{n+1})$ le point qui décrit le réseau ; $MN_1, MN_2, \ldots, MN_{n-1}$ les $n-1$ normales du réseau ; MR et MS ses tangentes. Les cosinus directeurs de ces droites sont (n° 13) les éléments d'un déterminant orthogonal à $n+1$ lignes

$$\Delta=\begin{vmatrix} y_1^1 & y_1^2 & \ldots & y_1^{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{n-1}^1 & y_{n-1}^2 & \ldots & y_{n-1}^{n+1} \\ \xi_1^1 & \xi_1^2 & \ldots & \xi_1^{n+1} \\ \xi_2^1 & \xi_2^2 & \ldots & \xi_2^{n+1} \end{vmatrix}.$$

Soient maintenant $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ les traces de $MN_1, \ldots, MN_{n-1}$ sur l'espace à n dimensions, $(A_1), (A_2), \ldots, (A_{n-1})$ les sphères qui ont pour centres $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ et pour rayons $A_1M, A_2M, \ldots, A_{n-1}M$; soient, de plus, A_n la projection de M, (A_n) la sphère de centre A_n et de rayon iA_pM ; soient enfin R et S les traces de MR et MS, (R) et (S) les sphères de centres R et S et de rayons MR et MS. Ces $n+2$ sphères sont deux à deux orthogonales ; je dis, de plus, que leurs coordonnées sont les éléments d'un déterminant D.

En effet, un calcul facile permet de calculer les coordonnées de ces sphères. On trouve :

Pour la sphère A_n :

$$(49)\quad \begin{cases} x_n^k = -\dfrac{X_k}{iX_{n+1}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \\ x_n^{n+1} + i x_n^{n+2} = \dfrac{1}{iX_{n+1}}, \quad x_n^{n+1} - i x_n^{n+2} = -\dfrac{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + X_{n+1}^2}{iX_{n+1}}. \end{cases}$$

Pour la sphère A_l :

$$(50)\quad \begin{cases} x_l^k = \dfrac{X_k y_l^{n+1} - X_{n+1} y_l^k}{X_{n+1}} \qquad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, n-1 \end{pmatrix}, \\ x_l^{n+1} + i x_l^{n+2} = -\dfrac{y_1^{n+1}}{X_{n+1}}. \end{cases}$$

Pour les sphères (R) et (S) :

$$(51)\quad \begin{cases} \xi^k = \dfrac{X_k \xi_1^{n+1} - X_{n+1} \xi_1^k}{X_{n+1}}, \\ \eta^k = \dfrac{X_k \eta_1^{n+1} - X_{n+1} \eta_1^k}{X_{n+1}}. \end{cases}$$

On vérifie facilement, en tenant compte des formules du Chapitre précédent, que ces quantités sont les éléments d'un déterminant D.

Les formules (49) montrent, inversement, que tout déterminant D peut s'obtenir ainsi.

Ce résultat appelle les deux remarques suivantes :

Remarque I. — *Chacun des réseaux* A_k *peut être considéré soit comme la projection d'un réseau* O *de l'espace à* $n+1$, *soit comme la trace d'une normale à un autre réseau* O ; *de là une transformation des réseaux* O, *analogue à celle que Ribaucour a donnée pour l'espace à trois dimensions.*

Remarque II. — *Si l'on connaît un déterminant orthogonal dans l'espace à* $n+1$, *puis une solution de l'équation d'un réseau* OS *de ce déterminant, on pourra, à l'aide de quadratures seulement, déterminer un réseau* O *de l'espace à* $n+1$, *et, par suite, un déterminant orthogonal dans l'espace à* $n+2$.

Cette remarque donne la loi de formation des déterminants orthogonaux. En remontant de proche en proche, on voit que, si l'on connaît p surfaces de l'espèce à 3 qui ont même représentation sphérique de leurs lignes de courbure; on pourra, à l'aide de quadratures seulement, former un déterminant orthogonal à $p+3$ lignes.

On trouve facilement que les coordonnées des points R et S sont

$$\text{(R)} \qquad Y_k = X_k - \frac{X_{n+1}}{\xi_1^{n+1}} \xi_1^k,$$

$$\text{(S)} \qquad Z_k = X_k - \frac{X_{n+1}}{\eta_1^{n+1}} \eta_1^k.$$

Les cosinus directeurs de la droite RS sont donc

$$\xi_1^k \eta_1^{n+1} - \eta_1^k \xi_1^{n+1}.$$

La congruence cyclique du déterminant D est parallèle à la congruence C.S du déterminant Δ; nous obtenons ainsi toutes ces congruences parallèles.

Il résulte d'ailleurs de ce qui précède :

La trace du plan tangent à un réseau O *de l'espace à* $n+1$ *sur l'espace à* n *décrit une congruence cyclique.*

Inversement :

Toute congruence cyclique de l'espace à n *est, d'une infinité de manières, la trace du plan tangent à un réseau* O *de l'espace à* $n+1$.

Soient maintenant $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des constantes ; posons

$$(52) \qquad y_1^i = p_1 x_1^i + p_2 x_2^i + \ldots + p_n x_n^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2).$$

On aura, en tenant compte des formules du Chapitre précédent,

$$(53) \qquad \frac{\partial y^i}{\partial u} = A\xi^i, \qquad \frac{\partial y^i}{\partial v} = B\xi^i,$$

où l'on pose

$$A = \sum_1^n a_k p_k, \qquad B = \sum_1^n b_k p_k.$$

Si l'on suppose que

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 0,$$

on aura aussi

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 + \ldots + (y^{n+2})^2 = 0;$$

$y^1, y^2, \ldots, y^{n+2}$ sont les coordonnées pentasphériques d'un point B, qui, d'après la formule (53) décrit un réseau harmonique à RS. Tous ces points (B) se trouvent à l'intersection des sphères $(\xi), (\eta)$; pour tous ces points, les triangles tels que BRS sont égaux, car

$$BR = \frac{1}{\xi_{n+1} + i\xi_{n+2}}, \qquad BS = \frac{1}{\eta_{n+1} + i\eta_{n+2}}.$$

On obtient ainsi un système (B) de réseaux O, dépendant de $n-2$ constantes arbitraires harmoniques à RS.

Prenons dans ce système B, le système (C), formé des points C, pour lesquels $p_4, p_5, \ldots, p_n$ sont nuls. Les coordonnées pentasphériques d'un tel point sont

$$y^i = p_1 x_1^i + p_2 x_2^i + p_3 x_3^i,$$
$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0.$$

Ces points se trouvent à la fois sur les sphères $A_4, A_5, \ldots, A_n$, R, S. Ils décrivent un cercle; soit Π le plan de ce cercle. Si C_1 et C_2 sont deux des points C, la droite C_1C_2, qui joint deux réseaux harmoniques à RS, décrit une congruence (n° 7); or, le point C_2 peut se rapprocher autant qu'on le veut de C_1, la tangente au cercle en C_1 est donc une *normale* du réseau O de C_1; le plan Π, qui contient deux congruences conjuguées à C_1, enveloppe un réseau; ce réseau est cyclique, parce qu'il est conjugué à des congruences O. On a une nouvelle manière de former des réseaux cycliques. D'une congruence cyclique telle que RS on déduit ainsi une infinité de cercles dont les plans enveloppent des réseaux cycliques. Ces cercles dépendent de $3n-9$ constantes arbitraires.

Peut-il exister, en dehors du système (B), des réseaux O harmoniques à B? Tout d'abord on peut montrer qu'il n'en existe pas dont les points sont situés sur les sphères (ξ), (η).

En effet, de tels points ont des coordonnées pentasphériques de la forme (52) où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des fonctions de u et v reliées par la relation

$$p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 0.$$

Pour qu'un tel point décrive un réseau harmonique à RS, il faudra que l'on ait des formules de la forme

$$\frac{\partial y^i}{\partial u} = A\xi^i + \lambda y^i, \qquad \frac{\partial y^i}{\partial v} = B\eta^i + \mu y^i,$$

ce qui donne, en différentiant,

$$\lambda = \frac{1}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial a}, \qquad \mu = \frac{1}{p_i}\frac{\partial p_i}{\partial v},$$

et, par suite, après suppression d'un même facteur commun, les quantités p_i seront des constantes.

Si donc il existe un autre réseau O, décrit par un point B′ harmonique à RS, le triangle B′RS n'est pas égal au triangle BRS. Il y aura un nouveau déterminant D, qui conduit à la même congruence cyclique. La congruence RS serait cyclique de plusieurs manières. Nous reviendrons, dans la deuxième Partie, sur ce problème, auquel nous donnons le nom de *problème de Ribaucour*. Nous verrons que, pour cela, il faut et il suffit que l'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs de la congruence cyclique ait ses invariants égaux.

24. Nous allons démontrer que la condition nécessaire, établie à la fin du n° 21, pour qu'une congruence soit cyclique, est aussi suffisante. Prenons d'abord une congruence quelconque dont les foyers R et S ont pour coordonnées homogènes $(X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1})$ et $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Y_{n+1})$. On aura

$$(54) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = aX_i + bY_i \\[2mm] \dfrac{\partial Y_i}{\partial v} = eX_i + fY_i \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Posons

$$X_i = \lambda x_i, \qquad Y_i = \mu y_i,$$
$$\frac{\partial \lambda}{\partial v} = a\lambda, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = f\mu.$$

Les formules (54) prennent la forme plus simple

$$(55) \qquad \frac{\partial x_i}{\partial v} = n y_i, \qquad \frac{\partial y_i}{\partial u} = m x_i.$$

Les coordonnées x et y qui donnent cette forme simplifiée sont déterminées respectivement, à des facteurs près, qui sont fonctions de u seul et v seul.

Prenons les paramètres directeurs $L_1, L_2, \ldots, L_n$ de RS sous la forme

$$L_i = \frac{x_i}{x_{n+1}} - \frac{y_i}{y_{n+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Un calcul identique à celui qui a été fait au n° 23 montre que les quantités $L_1, L_2, \ldots, L_n$ sont solutions de l'équation

$$(56) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{\frac{1}{x_{n+1}}} \frac{\partial \left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)}{\partial v} \frac{\partial L}{\partial v} + \frac{1}{\frac{1}{y_{n+1}}} \frac{\partial \frac{1}{y_{n+1}}}{\partial u} \frac{\partial L}{\partial v} + RL,$$

où il est inutile de calculer R.

Par hypothèse, on aura

$$\sum_1^u L_i^2 = \left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)^2 U^2 + \left(\frac{1}{y_{n+1}}\right)^2 V_3.$$

Comme x_{n+1} est définie à une fonction près de u, y_{n+1} à un facteur près, fonction de v, on aura

$$(57) \qquad \sum_1^n L_i^2 = \left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{y_{n+1}}\right)^2.$$

Cela posé, introduisant les quantités $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n, \eta_{n+1}, \eta_{n+2}$ définies par les formules

$$(58) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \xi_i = x_i, \qquad \eta_i = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \xi_{n+1} + i\xi_{n+2} = x_{n+1}, \qquad \eta_{n+1} + i\eta_{n+2} = y_{n+1}, \\ \displaystyle\sum_1^{n+2} \xi_k^2 = 1, \qquad \sum_1^{n+2} \eta_k^2 = 1, \end{array} \right.$$

la condition (57) conduit à la relation

$$\sum^{n+2} \xi_k \eta_k = 0.$$

Des formules (55) on déduit d'ailleurs

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, \qquad \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n, n+1, n+2).$$

Les quantités ξ, η étant les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal, la congruence RS est cyclique.

Prenons un déterminant orthogonal à $(n+1)$ lignes; les quantités

$$(59) \qquad 1, \quad ix_1^{n+1}, \quad ix_2^{n+1}, \quad ix_{n-1}^{n+1}$$

sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi^{n+1}} \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta^{n+1}} \frac{\partial \eta^{n+1}}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Comme d'ailleurs

$$1 - (x_1^{n+1})^2 - (x_2^{n+1})^2 - \ldots - (x_{n-1}^{n+1})^2 = (\xi^{n+1})^2 + (\eta^{n+1})^2,$$

on en conclut que les quantités (59) sont les paramètres directeurs d'une congruence cyclique.

Nous avons vu aussi (n° 13) que les quantités

$$1, \quad p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_n, \qquad \lambda = p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 + q^2 + r^2$$

sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Il en sera de même des quantités

$$(60) \qquad X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_n, \quad X_{n+1} \quad X_{n+2},$$

où l'on a posé

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}(1+\lambda), \qquad X_{n+2} = \frac{i}{2}(1-\lambda), \qquad X_k = ip_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Comme on aura ici

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 = q^2 + r^2,$$

il en résulte que les quantités (60) sont les paramètres directeurs d'une congruence cyclique.

25. Nous appellerons *réseau* K tout réseau conjugué à une congruence cyclique; tous les réseaux dérivés d'un réseau O sont des réseaux K.

De même, nous appellerons *congruence* K toute congruence conjuguée à un réseau cyclique.

Les principales propriétés de ces réseaux et congruences sont étudiées au Chapitre suivant.

CHAPITRE IV.

RÉSEAUX ET CONGRUENCES p, O; p, C; p, K.

SOMMAIRE.

26. Définition des réseaux et congruences p, O; p, C; p, K. — 27. Congruences conjuguées aux réseaux p, O. — 28. Réseaux conjugués aux congruences p, O. — 29. Congruences harmoniques aux réseaux p, O. — 30. Congruences harmoniques aux réseaux p, C. — 31. Réseaux harmoniques aux congruences p, O. — 32. Réseaux harmoniques aux congruences p, C. — 33. Réseaux et congruences K. — 34. Propriétés spéciales relatives à l'espace à trois dimensions. — 35. Propriétés de l'espace à trois dimensions qui se déduisent de la théorie générale. — 36. Indications sur le but de la deuxième Partie.

26. Nous appellerons *réseau* p, O, dans l'espace à n dimensions, la projection dans cet espace d'un réseau O de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

De même, une *congruence* p, O dans l'espace à n dimensions est la projection d'une congruence O de l'espace à $n+p-1$ dimensions.

Mêmes définitions pour les réseaux et congruences p, C; pour les réseaux et congruences p, K.

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point d'un réseau p, O; celles du réseau O de l'espace à $n+p-1$ seront $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$. Toutes ces quantités satisfont, ainsi que

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{p-1}^2$$

à une même équation aux dérivées partielles. Donc :

Pour qu'un réseau soit p, O, il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

à laquelle satisfont ses coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, admette en outre $p - 1$ autres solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ et la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{p-1}^2.$$

On trouve de même les résultats suivants :

Pour qu'une congruence soit p, O, il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \mathrm{P}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \mathrm{Q}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \mathrm{R}\frac{\partial \theta}{\partial v},$$

à laquelle satisfont ses paramètres directeurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$ admette en outre p solutions $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_p$ telles que

$$\mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 + \ldots + \mathrm{X}_n^2 + \mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{Y}_2^2 + \ldots + \mathrm{Y}_p^2 = 0.$$

Pour qu'une congruence soit p, C, il faut et il suffit que l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v} + \mathrm{R}\,\theta,$$

à laquelle satisfont ses paramètres directeurs $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n$, admette en outre $p - 1$ autres solutions $\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2, \ldots, \mathrm{Y}_{p-1}$ telles que

$$\mathrm{X}_1^2 + \mathrm{X}_2^2 + \ldots + \mathrm{X}_n^2 + \mathrm{Y}_1^2 + \mathrm{Y}_2^2 + \ldots + \mathrm{Y}_{p-1}^2 = h^2\mathrm{U}^2 + l^2\mathrm{V}^2,$$

U *et* V *étant respectivement des fonctions de u seul et de v seul.*

Il est inutile d'indiquer les propriétés qui caractérisent les autres éléments introduits.

Remarquons qu'un même élément peut jouir de deux propriétés distinctes; un réseau peut être, par exemple, p, O et q, O. Nous laisserons de côté ces cas particuliers; nous y reviendrons dans la deuxième Partie, et nous verrons comment les propriétés générales, trouvées dans la première Partie, doivent être modifiées.

27. Nous allons chercher les congruences conjuguées aux réseaux p, O. Prenons d'abord un réseau O.

Il y a d'abord les normales isotropes, qui engendrent des congruences HO; de telles normales n'existent qu'à partir de $n=4$; pour $n=4$, il y a seulement deux normales isotropes; à partir de là, ces normales forment un système ∞^{n-4}, c'est-à-dire un système dépendant de $n-4$ constantes arbitraires.

Nous aurons ensuite les congruences O engendrées par les normales ordinaires du réseau. Pour $n=3$, il n'existe qu'une seule normale; pour $n=4$, elles forment une série plane; enfin, en général, elles forment un système ∞^{n-3}.

Je dis que toutes les autres sont des congruences 2O.

En effet, soit G une telle congruence; menons, par l'origine, une droite g parallèle à G; il y aura sur g un point M $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ qui décrit un réseau parallèle à O. L'équation à laquelle satisfont les paramètres directeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de G admet, en outre, les solutions

$$1 \qquad \text{et} \qquad \lambda = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

Posons alors

$$y_1 = \frac{i}{2}(1-\lambda), \qquad y_2 = \frac{1}{2}(1+\lambda).$$

On aura bien

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0;$$

cette condition prouve (n° 25) que G est 2O.

Prenons, d'une manière générale, un réseau p, O. Soient G une congruence conjuguée, g la représentation sphérique de G; il existera sur g un point $\mu(x_1, \ldots, x_n)$ qui décrit un réseau parallèle; ce réseau (μ) est la projection d'un réseau M de l'espace à $n+p-1$ dimensions. Désignons par $(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_{p-1})$ les coordonnées de M; l'équation à laquelle satisfont ces quantités admet, en outre, la solution

$$\lambda = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{p-1}^2.$$

Remarquons, en outre, que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les paramètres directeurs de G et appliquons le criterium du numéro précédent. Nous distinguerons trois cas :

1° λ est nul. Le réseau M est sur un hypercône. La congruence G est $p-1$, O.

2° $\lambda = 1$. Le réseau M est OS. Posons $y_p = i$, on aura

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_{p-1}^2 - y_p^2 = 0,$$

G sera p, O.

3° λ n'est pas constant; M est un réseau O quelconque.

Posons alors

$$y_p = \frac{i}{2}(1+\lambda), \qquad y_{p+1} = \frac{1}{2}(1-\lambda),$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + \ldots + y_{p-1}^2 + y_p^2 + y_{p+1}^2 = 0.$$

Le réseau est $(p+1)$O.

En particulier, les congruences conjuguées aux réseaux 2O se répartissent ainsi :

Un système ∞^{n-3} de congruences O; pour $n = 3$, il y a deux telles congruences ;

Un système ∞^{n-2} de congruences 2O;

Enfin, toutes les autres sont 3O.

28. Étudions les réseaux conjugués aux congruences p, O.

Prenons d'abord une congruence O.

C'est la projection d'une congruence HO de l'espace à $n+1$ dimensions; les réseaux conjugués à cette dernière sont tous des réseaux O; donc les réseaux conjugués de la congruence donnée sont des réseaux 2O; il y a exception pour la série parallèle à la trace de HO, ce sont des réseaux O.

On peut d'ailleurs traiter la question directement.

Soient $M(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un réseau O, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les cosinus directeurs d'une normale G qui décrit une congruence O. On a (Chapitre II) les formules

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{llll} \dfrac{\partial X_i}{\partial u} = h\xi_i, & \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = a\xi_i, & \dfrac{\partial h}{\partial v} = lm, & \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, \\[2ex] \dfrac{\partial X_i}{\partial v} = l\eta_i, & \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = b\eta_i, & \dfrac{\partial l}{\partial u} = hn, & \dfrac{\partial b}{\partial u} = an. \end{array}\right.$$

Les coordonnées d'un point quelconque $N(Y_1, \ldots, Y_n)$ de la droite G sont

$$Y_i = X_i + \rho x_i,$$

ρ désignant la longueur MN. On trouve, en différentiant,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Y_i}{\partial u} &= (h + a\rho)\xi_i + \frac{\partial \rho}{\partial u} x_i, \\ \frac{\partial Y_i}{\partial v} &= (l + b\rho)\eta_i + \frac{\partial \rho}{\partial v} x_i, \end{aligned} \right.$$

et ensuite

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 Y_i}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v}(h + a\rho)\,\xi_i + \frac{\partial}{\partial u}(l + b\rho)\,\eta_i + \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} x_i.$$

Si ce point N décrit un réseau, l'équation de ce réseau doit être

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 Y}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log(h + a\rho)\, \frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}(l + b\rho)\, \frac{\partial Y}{\partial v}.$$

Pour qu'elle soit satisfaite, il faut

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \log(h + a\rho) \frac{\partial \rho}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u} \log(l + b\rho) \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Cette condition (5) donnerait les valeurs de ρ correspondant aux réseaux conjugués. Cette condition est satisfaite de deux façons :

1° Si ρ est constant, on a une série parallèle de réseaux O;

2° Dans le cas contraire, on a, d'après (2),

$$\sum_1^n \frac{\partial Y_i}{\partial u} \frac{\partial Y_i}{\partial v} = \frac{\partial \rho}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v}.$$

Posons alors

$$Y_{n+1} = i\rho.$$

On aura alors

$$\sum_1^{n+1} \frac{\partial Y_i}{\partial u} \frac{\partial Y_i}{\partial v} = 0.$$

Le réseau décrit par le point $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, Y_{n+1})$ est donc O; par suite, N décrit un réseau 2O.

Soit maintenant G une congruence 2O; N un point de G qui décrit un réseau; G est la projection d'une droite g qui décrit une congruence O; soit n le point qui se projette en N; les coordonnées de n se mettent sous la forme

$$Y_i = X_i + \rho x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1).$$

Posons

$$Y_{n+2} = i\rho.$$

L'équation du réseau N admet, outre les solutions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{n+2}$, aussi la solution

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2 + Y_{n+1}^2 + Y_{n+2}^2.$$

Cela posé, si

$$(6) \qquad Y_{n+2} = \pm i Y_{n+1},$$

l'équation admettra la solution

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_n^2.$$

Le réseau N est O; il y a ainsi deux séries de réseaux O.

Si l'on pose ensuite

$$(7) \qquad Y_{n+2} = k Y_{n+1},$$

k étant une constante, le réseau sera 2O. On a ainsi une ∞^1 série de réseaux 2O.

Tous les autres seront des réseaux 3O.

Il faut, pour justifier ce raisonnement, que les valeurs de ρ fournies par les formules (6) ou (7) vérifient la relation (5). Le calcul ne présente aucune difficulté.

Il est facile d'indiquer la situation des deux séries de réseaux O conjugués à G. Soit M un tel réseau; prenons la représentation sphérique G′ de G; un point M′ de G′ décrit un réseau parallèle à M; soit M″ l'inverse de M′, il décrit aussi un réseau O; il y aura donc sur G des réseaux parallèles à M′. Les deux séries de réseaux O sont donc parallèles à deux réseaux inverses l'un de l'autre; les tangentes correspondantes de ces réseaux sont également inclinées sur la droite G.

En projetant de proche en proche, on voit que, sur une congruence pO, il y aura des réseaux $p-$O, pO et $(p+1)$O. D'après le numéro précédent, il ne peut pas y en avoir d'ordre moindre.

29. *Congruences harmoniques aux réseaux p*, O.

D'abord, si le réseau est O, toutes les congruences harmoniques sont cycliques. C'est une définition (n° 21).

Prenons, d'une manière générale, un réseau p, O. Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées du réseau; l'équation du réseau

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = P \frac{\partial \theta}{\partial u} + Q \frac{\partial \theta}{\partial v} \tag{8}$$

admet, en outre, les solutions $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ et la solution

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 + y_1^2 + \ldots + y_{p-1}^2. \tag{9}$$

Les paramètres directeurs $(X_1, \ldots, X_n)$ d'une congruence harmonique au réseau donné, sont

$$X_i = \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10}$$

Posons, de même,

$$Y_k = \frac{\partial y_k}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial v} - \frac{\partial y_k}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1). \tag{11}$$

Les quantités X_i, Y_k sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \, \partial v} = \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l} \frac{\partial l}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v} + R\theta, \tag{12}$$

et l'on a

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{p-1}^2 = h^2 U^2 + l^2 V^2. \tag{13}$$

En général, il n'existera pas de relations linéaires entre $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$; la somme $Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{p-1}^2$ ne peut pas se réduire à un nombre moindre de carrés. *La congruence est p*, C.

Mais si

$$\theta = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_{p-1} y_{p-1},$$

$a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}$ étant des constantes, les fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{p-1}$ ne sont plus indépendantes; la somme $Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{p-1}^2$ peut être réduite à un nombre moindre de carrés. Deux cas sont à distinguer :

La réduction est d'une unité. (On le voit en faisant $\theta = y_1$, ce qui annule Y_1.) La congruence est $p-1$, C. On a un système ∞^{p-2} de telles congruences;

2°
$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{p-1}^2 = 0.$$

La réduction est de deux unités. (On le voit en faisant $\theta = y_1 + iy_2$, ce qui annule la somme $Y_1^2 + Y_2^2$.) La congruence est $p-2$, C; il y a ∞^{p-3} de ces congruences.

En particulier :

Pour un réseau 2O, *il y a une seule série harmonique de congruences* C. *Toutes les autres sont* 2C.

Les congruences C sont la trace, sur le réseau 2O, du réseau O qui le projette.

Pour un réseau 3O, *il y a deux séries harmoniques de congruences* C *correspondant aux valeurs* $\theta = y_1 \pm iy_2$.

∞^1 *systèmes de congruences* 2C, *correspondant à* $\theta = ay_1 + by_2$.

Les congruences 2C *font partie de la série harmonique des deux congruences* C.

Toutes les autres sont 3C.

30. *Congruences harmoniques aux réseaux* p, C.

Prenons d'abord un réseau hypercyclique $(x_1, \ldots, x_n)$; il est applicable sur le réseau plan y_1, y_2. Pour deux congruences harmoniques correspondantes, on aura (n° 16)

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - Y_1^2 - Y_2^2 = 0.$$

Pour les droites isotropes du plan $\theta = y_1 \pm iy_2$, $Y_1^2 + Y_2^2$ est nul, la congruence correspondante est HO; aux droites du plan correspondent des congruences O; enfin, toutes les autres sont 2O.

Prenons ensuite un réseau cyclique $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ applicable sur le réseau (y_1, y_2, y_3). On aura ici :

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - Y_3^2 = 0.$$

Distinguons les trois cas suivants :

1°
$$\theta = a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3, \qquad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0.$$

Ce qui revient à prendre les congruences qui correspondent à l'intersection du réseau (y) avec un plan isotrope; la somme $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2$ devient carré parfait; la congruence est O;

2° $$\theta = a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3, \qquad a_1^2+a_2^2+a_3^2 \gtrless 0.$$

Ce qui revient à prendre l'intersection du réseau (y) avec un plan fixe non isotrope. La somme $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2$ peut se réduire à une somme de deux carrés; la congruence est 2O;

3° θ est quelconque.

La somme $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2$ ne peut se réduire à un nombre moindre de carrés; la congruence est 3O.

Ainsi, il y a :

∞^1 séries de congruences O harmoniques. Elles correspondent aux sections du réseau applicable par des plans isotropes fixes.

∞^2 séries de congruences 2O harmoniques. Elles correspondent aux sections du réseau applicable par des plans fixes.

Toutes les autres sont 3O.

Nous savons aussi (n° 11) que, sur deux réseaux applicables, les réseaux dérivés sont correspondants. Prenons, sur le réseau (y), le point M qui décrit une droite fixe D. Ce point $M(Y_1, Y_2, Y_3)$ décrit évidemment un réseau; il en sera de même du point correspondant $N(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. La somme $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2$ est, à une constante additive près, un carré parfait. Le réseau N sera 2O. Si la droite D est isotrope, $Y_1^2+Y_2^2+Y_3^2$ est constant; le réseau N sera O.

Cela posé, coupons le réseau (y) par les génératrices d'un cône isotrope fixe; les points d'intersection se trouvent sur un cercle: les points correspondants (γ) du réseau x se trouvent sur le cercle correspondant C.

Ces points décrivent des réseaux O, dont l'une des normales est la tangente au cercle C. Nous avons déjà trouvé de tels systèmes (n° 23). (Pour le cas de l'espace à trois dimensions, le résultat a été donné par M. Darboux, *Leçons*.)

Parmi les réseaux dérivés d'un réseau C se trouvent, en outre, des réseaux 3O et 4O.

Prenons maintenant un réseau p, $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, applicable sur le réseau $(y_1, y_2, \ldots, y_p, y_{p+1}, y_{p+2})$. On aura (n° 16), pour une congruence harmonique quelconque,

$$X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 - Y_1^2 - Y_2^2 - \ldots - Y_{p+2}^2 = 0.$$

Cela posé, distinguons trois cas :

1°
$$\theta = a_1 y_1 + \ldots + a_p y_p + a_{p+1} y_{p+1} + a_{p+2} y_{p+2},$$
$$a_1^2 + \ldots + a_p^2 + a_{p+1}^2 + a_{p+2}^2 = 0.$$

La somme $Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots + Y_{p+2}^2$ se réduit à une somme de p carrés. *La congruence est* p, O.

2°
$$\theta = a_1 y_1 + \ldots + a_{p+2} y_{p+2}, \qquad a_1^2 + \ldots + a_{p+2}^2 \gtrless 0.$$

La somme précédente se réduit à $p+1$ carrés. *La congruence est* $(p+1)$, O.

3° θ est quelconque.

Il n'y a pas de réduction. *La congruence est* $(p+2)$, O.

Les réseaux dérivés seront p, O; $(p+1)$, O; $(p+2)$, O; $(p+3)$, O.

31. *Réseaux harmoniques aux congruences* p, O.

Prenons d'abord une congruence O, décrite par une droite L qui est la normale d'un réseau M qui est O. Les réseaux harmoniques à L se trouvent dans les plans menés par L et une autre congruence conjuguée à M. Nous distinguerons alors trois cas :

1° Le plan mené par L contient une normale isotrope à M perpendiculaire à L. *Le réseau sera semi-nul.* Il y a un système ∞^{n-5} de tels réseaux; il n'en existe qu'à partir de $p=5$; pour $n=5$, il y a seulement deux réseaux semi-nuls.

2° Le plan mené par L contient une autre normale ordinaire de M. *Le réseau sera* HC. Il y a un système ∞^{n-4} de tels réseaux; pour $n=4$, il n'en existe qu'un seul.

3° Le plan mené par L ne contient pas d'autres normales à M. *Le réseau sera* C.

En projetant, on en déduit les résultats pour les réseaux 2O. On obtient :

1° *Un système* ∞^{n-4} *de réseaux* HC. *Pour* $n=4$, *il y a deux de ces réseaux.*

2° *Un système* ∞^{n-3} *de réseaux* C. *Pour* $n=3$, *il y a un seul réseau.*

3° *Tous les autres sont des réseaux* 2C.

On trouve de même que les réseaux harmoniques à un réseau p, O peuvent être $(p-2)$, C; $(p-1)$, C; ou p, C.

On pourrait objecter qu'il peut se produire des réductions de degré en projetant; les résultats du numéro précédent montrent qu'il n'en est pas ainsi.

32. *Réseaux harmoniques aux congruences* p, C.

Prenons d'abord une congruence cyclique et reprenons les notations du n° 23.

Parmi les réseaux harmoniques, nous avons d'abord un système ∞^{n-2} de réseaux O formant le système (B). Il n'en existe pas d'autres si la congruence n'est pas une congruence de Ribaucour (n° 23).

Posons maintenant

$$(14)\qquad \begin{cases} x_i = p_1 x_1^i + p_2 x_2^i + \ldots + p_n x_n^i & [i=1, 2, \ldots, (n+2)], \\ p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_n^2 = 1, \end{cases}$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des constantes. Les $n+2$ quantités x_i sont les coordonnées d'une sphère (A) dont le centre A décrit un réseau 2O harmonique à RS. Nous obtenons ainsi un système ∞^{n-1}(A) de réseaux 2O harmoniques à la congruence. Tous ces points A sont dans l'hyperplan qui passe par l'intersection des sphères (R) et (S). Pour tous ces réseaux, la différence $\overline{AR}^2 = \overline{AS}^2$ est la même.

Je dis qu'il n'existe pas d'autres réseaux 2O, harmoniques à RS, dans le cas général. En effet, soit m un autre réseau; c'est la projection d'un réseau M qui est O. Avec les coordonnées des deux sphères de centres R et S et de rayons RM, RS, on peut former les deux dernières lignes d'un déterminant orthogonal. Si ces deux dernières lignes diffèrent de celles du déterminant donné, la congruence RS est cyclique de plusieurs manières, c'est le cas que nous avons exclu. Dans le cas contraire, (m) appartient forcément au système (A).

Tous les autres réseaux harmoniques sont 3O. En effet, soit H un tel réseau; joignons le point H à un point B; la droite BH engendre une congruence, conjuguée à B, et, par conséquent, 2O. Le réseau H est forcément 3O.

La droite qui joint le point A_n au point A_1 est la projection de la normale MN_1 (n° 23) à un réseau de l'espace à $n+1$; c'est donc une congruence 2O dérivée de RS; toute congruence 2O peut évidemment être obtenue ainsi. Comme rien ne distingue les points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les uns des autres, on peut dire que toute congruence 2O est obtenue en joignant deux de ces points. Donc :

Toute congruence 2O *peut être considérée comme la trace du plan de deux normales à un réseau* O *de l'espace à* $(n+1)$.

Prenons deux de ces points A_1 et A_2 par exemple. Posons

$$x_i = \cos\varphi\, x_1^i + \sin\varphi\, x_2^i,$$

où φ est constant. Ces quantités x_i sont les coordonnées d'une sphère dont le centre décrit un réseau harmonique à RS. On obtient ainsi une série harmonique à RS; dans cette série se trouvent deux réseaux O dont les coordonnées pentasphériques sont

$$x_k = x_1^k \pm i x_2^k.$$

On montre facilement que, si une série harmonique à une congruence cyclique contient deux réseaux 2O ou un réseau 2O et un réseau O, elle contient deux réseaux 2O et tous les autres sont 2O. La congruence dérivée correspondante est 2O; elle est située dans l'hyperplan passant par les points communs (R) et (S).

Il existe d'autres congruences 2O qui sont dérivées de RS, telle est la congruence BH. La série harmonique ne contient, en dehors de B, que des réseaux 3O.

On déduit facilement, par des projections, que les réseaux harmoniques à une congruence p, C sont p, O, $(p+1)$, O ou $(p+2)$, O.

33. *Réseaux et congruences* K.

Considérons un réseau K conjugué à une congruence L qui est C. Soit G une autre congruence quelconque conjuguée à K; le plan LG enveloppe un réseau M qui est harmonique à L : donc M est O, 2O ou 3O.

Si M est réseau O, la série LG est formée de congruences C. Si M est 2O, la série LG est formée de congruences 2C, sauf L;

Si, enfin, M est 3O, deux cas peuvent se présenter :

1° La seconde série de congruence cyclique harmonique à M passe par K, alors la série comprend deux congruences C; les autres sont 2C;

2° Si la seconde série ne passe pas par K, la série harmonique ne comprend, en dehors de L, que des congruences 3C.

Donc :

Les congruences conjuguées à un réseau K *sont* C, 2C *ou* 3C.
Les réseaux dérivant d'un réseau K *sont* O, 2O, 3O.

Prenons maintenant une congruence K conjuguée à un réseau cyclique M; soit μ un réseau conjugué de K; le plan de μ coupe le plan M suivant une droite D, qui décrit une congruence harmonique à M. La congruence D est donc O, 2O ou 3O. Par suite, μ peut être C, 2C ou 3C.

On voit que, si l'on connaît la congruence K et le réseau M, on peut en déduire une infinité de nouveaux réseaux C. Prenons, en effet, une congruence de normales D, harmonique à M, ce qui peut se faire de ∞^1 manières. Sur K, il existe une série harmonique à D, qui est composée de réseaux C; on pourra raisonner sur ces réseaux comme sur le réseau M.

Nous pouvons conclure de là :

Les réseaux conjugués à une congruence K *peuvent être* C, 2C *ou* 3C.

Les trois cas ne se présentent pas toujours. Nous avons vu, en effet, que, à partir de $n = 5$, il existe (n° 20) des congruences particulières dont tous les réseaux conjugués sont cycliques.

34. Nous terminerons cette première Partie en indiquant les résultats relatifs à l'espace à trois dimensions. Il en existe qui n'ont pas

leurs analogues dans les autres espaces; ce sont celles qui sont relatives au parallélisme des réseaux et congruences (nº 9). Nous démontrerons, à ce sujet, les théorèmes suivants :

I. *Toute congruence parallèle à un réseau p, O est p, O et inversement.*

Le théorème est vrai si $p = 1$; il suffit donc de démontrer que, s'il est exact jusqu'à la valeur p, il est vrai pour la valeur $p + 1$.

Soit A un réseau $(p + 1)$, O; (a) une congruence parallèle. Il existe une congruence G, conjuguée à A et p, O; donc il existera (nº 9) un réseau (g) parallèle à G et conjugué à (a); g sera p, O par hypothèse; donc (a) doit être $(p - 1)$, O; p, O; $(p + 1)$, O. Mais, le théorème étant admis jusqu'à la valeur p, (a) est forcément $(p + 1)$, O. On démontrera de même que tout réseau parallèle à une congruence $(p + 1)$, O est $(p + 1)$, O.

Cela posé, projetons d'un même espace à n dimensions, par exemple une congruence O et un réseau O. Les paramètres directeurs de la projection de la congruence seront, par exemple :

$$x_1^1, \quad x_1^2, \quad x_1^3. \tag{15}$$

Ceux des tangentes à la projection du réseau O sont :

$$\begin{matrix} \xi^1, & \xi^2, & \xi^3, \\ \eta^1, & \eta^2, & \eta^3, \end{matrix}$$

et, par conséquent, ceux de la normale sont :

$$\xi^2\eta^3 - \xi^3\eta^2, \quad \xi^3\eta^1 - \xi^1\eta^3, \quad \xi^1\eta^2 - \xi^2\eta^1. \tag{16}$$

Les quantités (16) devront être proportionnelles aux quantités (15) d'un autre déterminant orthogonal. De là une nouvelle transformation des déterminants orthogonaux que je ne développerai pas ici.

II. *Toute congruence parallèle à un réseau p, C est p, C, et inversement.*

Si $n = p + 2$, tout réseau p, C est projection d'un réseau C de l'espace à n; toute congruence p, C est projection d'une congruence C de l'espace à n. Or, nous avons vu que les paramètres directeurs de la normale à la projection d'un réseau C sont (n° 20)

$$(17) \qquad i, \quad x_1^{n+1}, \quad x_2^{n+1}.$$

D'autre part (n° 24), les quantités

$$i, \quad x_1^{n+1}, \quad x_2^{n+1}, \quad \ldots, \quad x_{n-1}^{n+1}$$

sont les paramètres directeurs d'une congruence C: donc les paramètres de la projection sont les quantités (17), ce qui démontre le théorème.

D'un autre côté, les projections d'un réseau cyclique sont aussi les mineurs de la matrice (n° 20)

$$(18) \qquad \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix}.$$

Les quantités (18) sont donc proportionnelles aux quantités (17) d'un autre déterminant orthogonal. De là encore une nouvelle transformation des déterminants orthogonaux.

Enfin il résulte de ce deuxième théorème et des résultats du n° 9 le théorème suivant :

III. *Toute congruence parallèle à un réseau p,* K *est p,* K, *et inversement.*

Ces théorèmes établissent, dans l'espace à trois dimensions, une réciprocité entre les réseaux et les congruences; de telle sorte que, à chaque propriété des réseaux, on peut faire correspondre une propriété des congruences, et inversement.

35. Il nous reste à indiquer rapidement les résultats de la théorie générale qui s'appliquent à l'espace à trois dimensions. Nous introduirons trois sortes de déterminants orthogonaux.

1° Les déterminants Δ_1 à trois lignes :

$$(19) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix},$$

avec les formules

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x_i}{\partial u} = a\xi_i, && \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = -ax_i - m\eta_i, && \frac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i, \\ &\frac{\partial x_i}{\partial v} = b\eta_i, && \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, && \frac{\partial \eta_i}{\partial v} = -bx_i - n\xi_i \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3),$$

avec les conditions

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial v} = bm, \\ &\frac{\partial b}{\partial u} = an, \end{aligned}\right. \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial v} + ab = 0.$$

Le point (x_1, x_2, x_3) décrit sur la sphère de rayon 1 un réseau orthogonal (réseau OS).

Il définit la représentation sphérique de réseaux (O) (surfaces rapportées à leurs lignes de courbure). Si X_1, X_2, X_3 sont les coordonnées d'un tel réseau, on aura

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_i}{\partial u} = h\xi_i, && \frac{\partial h}{\partial v} = lm \\ &\frac{\partial X_i}{\partial v} = l\eta_i, && \frac{\partial l}{\partial u} = hn \end{aligned}\right. \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Les quantités X_1, X_2, X_3 satisfont à l'équation

$$(23)\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

Enfin, les quantités X_i, x_i satisfont à l'équation

$$(24)\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{\xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial v}\frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{\eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial u}\frac{\partial \theta}{\partial v}.$$

On peut encore déterminer les réseaux O en posant

$$(25)\quad X_i = p x_i + q\xi_i + r\eta_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

avec les conditions

$$(26)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial u} = aq, && \frac{\partial r}{\partial u} = mq, && h = ap + \frac{\partial q}{\partial u} + mr, \\ &\frac{\partial p}{\partial v} = br, && \frac{\partial q}{\partial v} = nr, && l = bq + \frac{\partial r}{\partial v} + nq. \end{aligned}\right.$$

Les quantités p, x_1, x_3, x_3 sont solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{27}$$

Enfin p est aussi solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = \frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial \theta}{\partial u} + \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial u} \frac{\partial \theta}{\partial v}. \tag{28}$$

Les équations (23) et (28) admettent, en outre, la solution

$$\lambda = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = p^2 + q^2 + r^2.$$

Il en résulte (n° 24) que les quantités

$$\frac{1}{2}(1+\lambda), \qquad \frac{i}{2}(1-\lambda), \qquad ip$$

sont les paramètres directeurs d'une congruence cyclique.

2° Les déterminants Δ_2 à quatre lignes :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 \end{vmatrix}, \tag{29}$$

avec les formules

$$\left\{ \begin{array}{llll} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = a\xi_i, & \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = e\xi_i, & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = -a x_i - b y_i - m\eta_i, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = b\eta_i, & \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = f\eta_i, & \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\eta_i, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -b x_i - f y_i - n\xi_i, \end{array} \right. \tag{30}$$

avec les conditions

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, & \dfrac{\partial e}{\partial v} = fm, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, & \dfrac{\partial f}{\partial u} = en, \end{array} \right. \qquad \frac{\partial m}{\partial v} + \frac{\partial n}{\partial u} + ab + ef = 0. \tag{40}$$

Ces déterminants définissent les réseaux OS de l'espace à quatre dimensions, permettent de former les réseaux de cet espace, et, par suite, les réseaux 2O de l'espace à trois. Enfin, ils peuvent s'interprêter au point de vue non euclidien dans l'espace ordinaire. Rappelons, en outre, que les quantités

$$i, \quad x_4, \quad y_4,$$

ou bien aussi

$$\xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4, \qquad \xi_2\eta_4 - \eta_2\xi_4, \qquad \xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4$$

sont les paramètres directeurs d'une congruence cyclique. (*Voir*, à ce sujet, mon Mémoire sur la déformation des surfaces, *Journal de Mathématiques*, 1896).

3° Les déterminants Δ_3 à cinq lignes :

$$(41) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 & \xi_5 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta_4 & \eta_5 \end{vmatrix},$$

avec les formules

$$(42) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_i}{\partial u} = a\xi_i, & \dfrac{\partial y_i}{\partial u} = e\xi_i, \qquad \dfrac{\partial z_i}{\partial u} = g\xi_i, \\ \dfrac{\partial x_i}{\partial v} = b\eta_i, & \dfrac{\partial y_i}{\partial v} = f\eta_i, \qquad \dfrac{\partial z_i}{\partial v} = h\eta_i, \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial u} = -ax_i - by_i - gz_i - m\eta_i, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial u} = m\xi_i, \\ \dfrac{\partial \xi_i}{\partial v} = n\xi_i, & \dfrac{\partial \eta_i}{\partial v} = -bx_i - fy_i - hz_i - n\xi_i, \end{cases}$$

avec les conditions

$$(43) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial v} = bm, \qquad \dfrac{\partial e}{\partial v} = fm, \qquad \dfrac{\partial g}{\partial u} = hm, \\ \dfrac{\partial b}{\partial u} = an, \qquad \dfrac{\partial f}{\partial u} = en, \qquad \dfrac{\partial h}{\partial v} = gn, \\ \qquad ab + ef + gh + \dfrac{\partial m}{\partial v} + \dfrac{\partial n}{\partial u} = 0. \end{cases}$$

Ce déterminant nous permet d'introduire cinq sphères deux à deux orthogonales. Désignons par (x), (y), (z), (ξ), (η) ces cinq sphères.

La sphère (x), par exemple, touche son enveloppe aux deux points qui se trouvent à l'intersection des sphères (x), (ξ), (η). Ces deux points B et B′ ont pour coordonnées pentasphériques

$$y_k \pm i z_k.$$

Ces points décrivent des réseaux O. La sphère touche ses deux enveloppes suivant des lignes de courbure.

Le centre de cette sphère décrit un réseau 2O. La droite qui joint les centres de deux sphères, (x), (y) par exemple, décrit une congruence 2O.

Enfin, la droite qui joint les centres des sphères (ξ), (η) décrit une congruence cyclique. Le cercle d'intersection de ces deux sphères est normal à une série de surfaces. Les coordonnées pentasphériques des points de ce cercle sont

$$x'_i = a x_i + b y_i + c z_i,$$

a, b, c étant des constantes liées par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Le plan de ce cercle enveloppe un réseau cyclique (Ribaucour).

Voici maintenant les propriétés qui se rapportent aux cas les plus simples :

Réseaux O.

Congruences harmoniques. — Congruences C.

Congruences conjuguées. — Une congruence O; les autres sont des congruences 2O.

Congruences O.

Tous les réseaux harmoniques sont C.

Parmi les réseaux conjugués se trouvent :

1° Une série parallèle de réseaux O.

2° Tous les autres sont réseaux 2O.

Réseaux 2O.

Les congruences conjuguées se partagent en trois groupes :

1° Deux congruences O, qui ont pour paramètres directeurs

$$x_1 \pm iy_i, \qquad x_2 \pm iy_2, \qquad x_3 \pm iy_3$$

(déterminant Δ_2).

Ces deux droites sont dans un plan normal à la surface et également inclinées sur la surface (Darboux, *Leçons*).

2° ∞^1 systèmes de congruences 2O; ces congruences appartiennent à la série des deux congruences O.

3° Toutes les autres sont congruences 3O.

Les congruences harmoniques se composent :

1° Une série parallèle de congruences C. Ces droites sont perpendiculaires au plan des deux congruences O.

2° Toutes les autres sont congruences 2C.

Congruences 2O.

Les réseaux conjugués comprennent :

1° Deux séries de réseaux O. Les plans de ces deux réseaux sont également inclinés sur la droite de la congruence. Ils sont parallèles à deux réseaux O inverses l'un de l'autre. La droite d'intersection de ces deux réseaux décrit une congruence cyclique C.

2° ∞^1 séries de réseaux 2O. Les plans de ces réseaux sont parallèles à C.

3° Tous les autres sont réseaux 3O.

Les réseaux harmoniques comprennent :

1° Un réseau C perpendiculaire à la congruence C.

2° Tous les autres sont 2C.

Réseaux 3O.

Les congruences conjuguées comprennent :

1° Un système ∞^1 de congruences 2O. Les paramètres directeurs de ces congruences sont (déterminant Δ_3) :

$$a x_i + b y_i + c z_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

a, b, c étant des constantes liées par la relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0.$$

Elles forment, en chaque point, un cône du deuxième degré, S.

2° ∞^2 systèmes de congruences 2O, ayant pour paramètres directeurs

$$a x_i + b y_i + c z_i, \qquad a^2 + b^2 + c^2 \gtrless 0.$$

3° Les autres sont des congruences 4O.

Les congruences harmoniques comprennent :

1° Deux séries A et B de congruences C.

Prenons la congruence A et le cercle a, qui est normal à une série de surfaces; les droites qui joignent le réseau aux points de a engendrent des congruences 2O; elles se trouvent sur le cône S. Donc les sections circulaires du cône S ont leurs axes dans le plan tangent au réseau. Ce sont les droites des séries A et B.

2° Toutes les congruences harmoniques appartenant à la série A, B sont 2C.

3° Toutes les autres sont 3C.

On aurait des résultats analogues pour les congruences 3O.

Enfin, les congruences 3O sont, comme on le voit facilement, les mêmes que celles que j'ai appelées *congruences associées* (*Comptes rendus*, 1897).

36. Il est bien entendu que les résultats qui précèdent s'appliquent au cas le plus général. Il faudrait les modifier si plusieurs propriétés s'appliquaient à la fois à un même réseau ou à une même congruence; par exemple, si un réseau était à la fois p, O et q, O; ou bien p, C et q, C; ou encore p, O et q, C. Le but de la seconde Partie sera d'étudier ces modifications et de déterminer ces éléments particuliers.

Dans le cas de l'espace à trois dimensions, on peut, en vertu de la loi de réciprocité établie au n° 33, se borner à considérer les réseaux.

Si donc on laisse de côté les réseaux K, on aura les trois types suivants de problèmes :

1° *Trouver les réseaux* p, O *et* q, C.

Nous donnerons à ce problème le nom de *problème de Bonnet*, parce que Bonnet a trouvé les réseaux qui sont O et C.

2° *Trouver les réseaux* p, O *et* q, O.

3° *Trouver les réseaux* p, C *et* q, C.

Ces deux derniers problèmes se ramènent l'un à l'autre. Ce dernier problème sera appelé *problème de Ribeaucour*, parce que Ribeaucour a, le premier, donné des propriétés des congruences qui sont C et C (cycliques de plusieurs manières).

Enfin, nous chercherons aussi :

Les réseaux p, O *et* q, K ;

Les réseaux p, C *et* q, C.

(*A suivre.*)