ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. PELLET

Mémoire sur la théorie des surfaces et des courbes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 287-310.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__287_0>

MÉMOIRE

SUR LA

THÉORIE DES SURFACES ET DES COURBES,

PAR M. A. PELLET,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE CLERMONT-FERRAND.

Les coefficients des parties principales du carré de la distance de deux points et de la distance d'un point au plan tangent infiniment voisin (E, F, G, D, D′, D″, suivant leur désignation habituelle) étant connus, et par suite leurs dérivées des divers ordres, on peut former, par rapport à trois axes arbitrairement choisis, l'équation d'une portion infiniment petite quelconque de la surface. La méthode qui permet d'avoir cette équation donne en même temps les relations différentielles entre les six coefficients E, F, G, D, D′, D″; mais cette équation elle-même, en se bornant aux termes du troisième ordre, est très simple dans certains cas, très facile à établir et très utile. Dans ce Mémoire, j'étudie ces termes du troisième ordre non seulement pour les surfaces, mais pour les courbes et les fonctions de trois variables, et donne quelques applications.

1. Supposons les coordonnées rectangulaires, x, y, d'un point d'une courbe fonctions holomorphes de la variable indépendante t et la somme des carrés de leurs dérivées premières différente de o, $x'^2 + y'^2 = A^2 \neq 0$.

Rapportons la courbe à la tangente et à la normale au point t, comme axes des ξ et des η; il vient

$$\xi = A\tau + A'\frac{\tau^2}{2} + \left(A'' - \frac{D^2}{A^3}\right)\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \xi_n\tau^n + \ldots,$$

$$\eta = \frac{D}{A}\frac{\tau^2}{2} + \frac{D'}{A}\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \eta_n\tau^2 + \ldots$$

pour les coordonnées du point $t+\tau$ de la courbe, D étant égal à $x'y''-y'x''$, et les accents indiquant les dérivations. Les coefficients ξ_n, η_n peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions A, D et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n-1$ pour ξ_n et à $n-2$ pour η_n, A, seule parmi ces fonctions, entrant en dénominateur. En effet, la distance des points τ et $\tau+d\tau$ a pour valeur principale d'une part $\mathcal{A}\,d\tau$, d'autre part $\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}\,d\tau$; et la distance du point $\tau+d\tau$ à la tangente au point τ a pour valeur principale d'une part

$$\frac{1}{2}\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{A}}d\tau^2,$$

d'autre part

$$\frac{\xi'\eta''-\eta'\xi''}{2\sqrt{\xi'^2+\eta'^2}}d\tau^2,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$ étant les valeurs de A, D pour $t+\tau$. D'où les égalités

$$\xi'\sqrt{1+\frac{\eta'^2}{\xi'^2}} = A + A'\tau + \ldots + A^{(n)}\frac{\tau^n}{1.2\ldots n}+\ldots,$$

$$\xi'\eta''-\eta'\xi'' = D + D'\tau + \ldots + D^{(n)}\frac{\tau^n}{1.2\ldots n}+\ldots.$$

η' est une fonction qui s'annule avec τ, tandis que ξ' ne s'annule pas; $\sqrt{1+\frac{\eta'^2}{\xi'^2}}$ est donc développable en série ordonnée suivant les puissances croissantes de τ, et, dans cette série, le coefficient de τ^n est une fonction entière de

$$\xi_1,\quad \xi_2,\quad \xi_3,\quad \ldots,\quad \xi_{n-1},\quad \eta_2,\quad \eta_3,\quad \ldots,\quad \eta_{n-2},\quad \eta_{n-1}.$$

Égalant de part et d'autre dans ces égalités les coefficients de τ^{n-1}, la première donne $n\xi_n$, et, transportant la valeur obtenue dans la seconde, celle-ci donne $(n+1)nA\eta_{n+1}$. On vérifie que les valeurs obtenues satisfont à la proposition.

Lorsque la variable indépendante est l'arc (s) de la courbe, $A=1$; nous désignerons par a la valeur correspondante de D, courbure de la courbe au point t; tous les coefficients s'expriment à l'aide de a et de ses dérivées par rapport à s. Effectuant l'élimination de τ dans le cas général, on a donc

$$\eta = \frac{a\xi^2}{2} + \frac{da}{ds}\frac{\xi^3}{6} + \ldots,$$

$$\frac{da}{ds} = \frac{1}{A}\frac{da}{dt}.$$

Tous les coefficients sont fonctions entières de a et de ses dérivées par rapport à s.

2. Supposons les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point d'une courbe fonctions holomorphes du paramètre t, satisfaisant aux deux inégalités

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = A^2 \neq 0,$$

$$(y'z'' - z'x'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2 = D^2 \neq 0,$$

pour le point t considéré. Prenons pour nouveaux axes coordonnés ξ, η, ζ la tangente, la normale principale et la binormale ; on aura pour nouvelles coordonnées du point XYZ

$$\xi = \frac{x'(X - x) + y'(Y - y) + z'(Z - z)}{A},$$

$$\eta = -\frac{1}{AD}\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ y'z'' - z'x'' & z'x'' - x'z'' & x'y'' - y'x'' \end{vmatrix},$$

$$\zeta = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix}.$$

Pour le point $t + \tau$ de la courbe, il vient

$$\xi = A\tau + A'\frac{\tau^2}{2} + \left(A'' - \frac{D^2}{A^3}\right)\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \xi_n\tau^n + \ldots,$$

$$\eta = \frac{D}{A}\frac{\tau^2}{2} + \frac{D'}{A}\frac{\tau^3}{6} + \ldots + \eta_n\tau^n + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{\mathfrak{D}}{D}\frac{\tau^3}{6} + \frac{\mathfrak{D}'}{D}\frac{\tau^4}{24} + \ldots + \zeta_n\tau^n + \ldots,$$

ω représentant le déterminant

$$\omega = \begin{vmatrix} x''' & y''' & z''' \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix},$$

et ξ_n, η_n, ζ_n des coefficients qui peuvent s'exprimer à l'aide de A, D, ω et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n-1$ pour ξ_n, $n-2$ pour η_n, et $n-3$ pour ζ_n, A, D seules, parmi ces fonctions, entrant en dénominateur. Comme dans le cas des courbes planes, on a deux expressions différentes pour les valeurs principales des distances du point $\tau + d\tau$ aux plans normal, rectifiant et osculateur au point τ. D'où les égalités

$$\xi' \sqrt{1 + \frac{\eta'^2 + \zeta'^2}{\xi'^2}} = A + A'\tau + \ldots + \frac{A^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$(\xi'\eta'' - \eta'\xi'') \sqrt{1 + \frac{(\eta'\zeta'' - \zeta'\eta'')^2 + \zeta'\xi'' - \xi'\zeta'')^2}{(\xi'\eta'' - \eta'\xi'')^2}} = D + D'\tau + \ldots + \frac{D^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \xi''' & \eta''' & \zeta''' \\ \xi' & \eta' & \zeta' \\ \xi'' & \eta'' & \zeta'' \end{vmatrix} = \omega + \omega'\tau + \ldots + \frac{\omega^{(n)}\tau^n}{1.2\ldots n} + \ldots,$$

les radicaux qui entrent dans les deux premières égalités sont développables en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de τ, les coefficients de τ^m étant des fonctions entières des quantités ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_{m-1}, η_3, $\ldots$, η_{m-1}, ζ_3, $\ldots$, ζ_{m-1}.

En égalant de part et d'autre dans chacune d'elles les coefficients de τ^{n-1}, la première donne $n\xi_n$; puis, transportant la valeur trouvée dans la seconde, celle-ci donne $(n+1)nA\eta_{n+1}$, et enfin la troisième équation obtenue après la substitution des valeurs de ξ_n, η_{n+1} donne $(n+2)(n+1)nD\zeta_{n+2}$. Les valeurs qu'on obtient ainsi satisfont aux conditions énoncées.

Lorsqu'on prend la longueur de l'arc de courbe s pour paramètre, $A = 1$; désignons par a et b les valeurs que prennent alors D et ω; a est la courbure de la courbe et $\frac{b}{a^2}$ la torsion; tous les coefficients s'expriment à l'aide de a, de b et de leurs dérivées par rapport à s.

Dans le cas général, l'élimination de τ donne donc

$$\eta = a\frac{\xi^2}{2} + \frac{1}{6}\frac{da}{ds}\xi^3 + \ldots,$$

$$\zeta = \frac{b}{6a}\xi^3 + \frac{1}{24a}\frac{db}{ds}\xi^4 + \ldots.$$

3. Supposons les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point d'une surface, fonctions holomorphes de t et de u; désignons par $E\,dt^2 + 2F\,dt\,du + G\,du^2$, la partie principale du carré de la distance des points u, t et $u + du$, $t + dt$; par

$$\frac{1}{2H}(D\,dt^2 + 2D'\,dt\,du + D''\,du^2)$$

la partie principale de la distance du point $t + dt$, $u + du$ au plan tangent au point t, u, H représentant $\sqrt{EG - F^2}$, que nous supposerons différent de o.

Rapportons la surface à trois nouveaux axes rectangulaires ξ, η, ζ, passant par le point t, u, l'axe des ζ étant la normale à la surface. Les coordonnées ξ, η, ζ du point correspondant à $t + \tau$, $u + \upsilon$ sont des fonctions holomorphes de τ, υ s'annulant avec ces variables, et ζ ne contenant pas de terme du premier degré :

$$\xi = \alpha\,\tau + \beta\,\upsilon + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_n + \ldots,$$
$$\eta = \alpha_1\tau + \beta_1\upsilon + \eta_2 + \eta_3 + \ldots + \eta_n + \ldots,$$
$$\zeta = \frac{1}{2H}(D\tau^2 + 2D'\tau\upsilon + D''\upsilon^2) + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n;$$

ξ_n, η_n, ζ_n étant des fonctions homogènes de degré n en τ, υ. Les coefficients de ξ_n, η_n, ζ_n peuvent s'exprimer en fonctions entières de E, F, G, D, D', D'' et de leurs dérivées d'ordre au plus égal à $n - 1$ pour ξ_n, η_n et à $n - 2$ pour ζ_n, la quantité H seule entrant en dénominateur. En effet, on a deux expressions pour la partie principale du carré de la distance des points τ, υ et $\tau + d\tau$, $\upsilon + d\upsilon$; dans l'une, les coefficients de $d\tau^2$, $d\tau\,d\upsilon$, $d\upsilon^2$ sont exprimés à l'aide des fonctions ξ, η, ζ; dans l'autre, les coefficients sont les valeurs des fonctions E, F, G pour $t + \tau$, $u + \upsilon$; de même, pour la partie principale de la distance du point

$\tau + d\tau$, $\upsilon + d\upsilon$ au plan tangent en τ, υ. D'où résultent les six égalités :

$$\begin{aligned}
\xi'^2_\tau + \eta'^2_\tau + \zeta'^2_\tau &= \mathrm{E} + \mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2 + \ldots + \mathrm{E}_n + \ldots,\\
\xi'_\tau\xi'_\upsilon + \eta'_\tau\eta'_\upsilon + \zeta'_\tau\zeta'_\upsilon &= \mathrm{F} + \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 + \ldots + \mathrm{F}_n + \ldots,\\
\xi'^2_\upsilon + \eta'^2_\upsilon + \zeta'^2_\upsilon &= \mathrm{G} + \mathrm{G}_1 + \mathrm{G}_2 + \ldots + \mathrm{G}_n + \ldots,
\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\tau^2} & \eta''_{\tau^2} & \zeta''_{\tau^2} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D} + \mathrm{D}_1 + \mathrm{D}_2 + \ldots + \mathrm{D}_n + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\tau\upsilon} & \eta''_{\tau\upsilon} & \zeta''_{\tau\upsilon} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D}' + \mathrm{D}'_1 + \mathrm{D}'_2 + \ldots + \mathrm{D}'_n + \ldots,$$

$$\begin{vmatrix} \xi''_{\upsilon^2} & \eta''_{\upsilon^2} & \zeta''_{\upsilon^2} \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon \end{vmatrix} = \mathrm{D}'' + \mathrm{D}''_1 + \mathrm{D}''_2 + \ldots + \mathrm{D}''_n + \ldots.$$

E_n représente la fonction homogène

$$\frac{1}{1.2\ldots n}\left(\frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial t^n}\tau^n + n\frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial t^{n-1}\,du}\tau^{n-1}\upsilon + \ldots + \frac{\partial^n \mathrm{E}}{\partial u^n}\upsilon^n\right),$$

et de même pour F_n, G_n, D_n, D'_n, D''_n.

Égalant les termes indépendants de τ, υ de part et d'autre, on a trois équations entre α, β, α_1, β_1 ; le choix de l'un d'eux reste donc arbitraire, ce qui correspond à l'indétermination de l'axe des ξ dans le plan tangent; le choix étant fait, en égalant les termes du premier degré, on obtient, entre les dix coefficients de ξ_2, η_2, ζ_3, douze équations qui déterminent ces coefficients et donnent deux relations différentielles entre les fonctions D, D′, D″, E, F, G ; en égalant de part et d'autre les termes du second degré, on obtient dix-huit équations entre les treize coefficients de ξ_3, η_3, ζ_4 ; ces équations déterminent ces coefficients et donnent en outre cinq relations différentielles, de sorte qu'il y en a au moins une nouvelle; en général, en égalant de part et d'autre les termes du degré $n - 1$, on obtient $6n$ équations entre les $3n + 4$ coefficients de ξ_n, η_n, ζ_{n+1} ; ces équations déterminent ces coefficients et donnent $3n - 4$ relations différentielles entre les six fonctions D, D′, D″, E, F, G de t et de u. Ces relations sont des conséquences de trois d'entre elles bien connues; mais la méthode actuelle offre cet avantage de donner l'équation de la surface relativement au système des coordonnées ξ, η, ζ.

4. Les équations auxquelles on est conduit sont de la forme

$$\alpha\xi'_{n\tau} + \alpha_1\eta'_{n\tau} = f, \qquad \beta\xi'_{n\upsilon} + \beta_1\eta'_{n\upsilon} = f_1,$$
$$\beta\xi'_{n\tau} + \beta_1\eta'_{n\tau} + \alpha\xi'_{n\upsilon} + \alpha\eta'_{n\upsilon} = f_2,$$

f, f_1, f_2 étant des fonctions homogènes en τ, υ, de degré $n-1$. Posons

$$\alpha\xi_n + \alpha_1\eta_n = \varphi_n, \qquad \beta\xi_n + \beta_1\eta_n = \psi_n;$$

la connaissance de φ_n, ψ_n entraîne celle de ξ_n, η_n, pourvu que $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$ soit différent de zéro. Il vient

$$\varphi'_{n\tau} = f, \qquad \psi'_{n\upsilon} = f_1, \qquad \psi'_{n\tau} + \varphi'_{n\upsilon} = f_2;$$

d'où la condition

$$f''_{2\tau\upsilon} = f''_{\upsilon^2} + f''_{1\tau^2}, \tag{1}$$

qui doit avoir lieu identiquement, ce qui entraîne $n-2$ relations entre les coefficients des fonctions f, f_1, f_2. Ces relations étant satisfaites, on a

$$n(n-1)\varphi_n = \tau^2 f'_\tau + 2\tau\upsilon f'_\upsilon + \upsilon^2(f'_{2\upsilon} - f'_{1\tau}),$$
$$n(n-1)\psi_n = \tau^2(f'_{2\tau} - f'_\upsilon) + 2\tau\upsilon f'_\tau + \upsilon^2 f'_{1\upsilon}.$$

Remarquons que l'équation de condition (1) est satisfaite lorsque, x étant une fonction homogène de τ et υ, on a

$$f = \alpha_2 x'_\tau, \qquad f_1 = \beta_2 x'_\upsilon, \qquad f_2 = \beta_2 x'_\tau + \alpha_2 x'_\upsilon,$$

et qu'elle devient

$$f''_{2\tau\upsilon} - f''_\upsilon - f''_{1\tau^2} = x''_{\tau^2} x''_{\upsilon^2} - x''^2_{\tau\upsilon} = 0$$

dans le cas où l'on a

$$f = \tfrac{1}{2} x'^2_\tau, \qquad f_1 = \tfrac{1}{2} x'^2_\upsilon, \qquad f_2 = x'_\tau x'_\upsilon.$$

5. Revenons aux égalités du n° 3. En égalant, de part et d'autre, les termes indépendants de τ et de υ, il vient

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 = \mathrm{E}, \qquad \beta^2 + \beta_1^2 = \mathrm{G}, \qquad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 = \mathrm{F};$$

d'où

$$\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = \sqrt{EG - F^2} = H.$$

Posons

$$\alpha\xi + \alpha_1\eta = \varphi, \qquad \beta\xi + \beta_1\eta = \psi;$$

les trois dernières égalités de ce n° 3 deviennent

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\tau^2} & \psi''_{\tau^2} & \zeta''_{\tau^2} \\ \varphi'_{\tau} & \psi'_{\tau} & \zeta'_{\tau} \\ \varphi'_{\upsilon} & \psi'_{\upsilon} & \zeta'_{\upsilon} \end{vmatrix} = D + D_1 + D_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\tau\upsilon} & \psi''_{\tau\upsilon} & \zeta''_{\tau\upsilon} \\ \varphi'_{\tau} & \psi'_{\tau} & \zeta'_{\tau} \\ \varphi'_{\upsilon} & \psi'_{\upsilon} & \zeta'_{\upsilon} \end{vmatrix} = D' + D'_1 + D''_2 + \ldots,$$

$$\frac{1}{H}\begin{vmatrix} \varphi''_{\upsilon^2} & \psi''_{\upsilon^2} & \zeta''_{\upsilon^2} \\ \varphi'_{\tau} & \psi'_{\tau} & \zeta'_{\tau} \\ \varphi'_{\upsilon} & \psi'_{\upsilon} & \zeta'_{\upsilon} \end{vmatrix} = D'' + D''_1 + D''_2 + \ldots;$$

et, sous cette forme, on voit immédiatement qu'elles sont indépendantes de l'indétermination qui reste encore pour les quantités α, α_1, β, β_1.

En égalant, de part et d'autre, les termes du premier degré dans le groupe des trois premières égalités, provenant de l'élément linéaire, il vient

$$\varphi'_{2\tau} = \tfrac{1}{2}E_1, \qquad \psi'_{2\upsilon} = \tfrac{1}{2}G_1, \qquad \varphi'_{2\upsilon} + \psi'_{2\tau} = F_1;$$

d'où

$$\varphi_2 = \frac{1}{4}\left[\tau^2\frac{\partial E}{\partial t} + 2\tau\upsilon\frac{\partial E}{\partial u} + \upsilon^2\left(2\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial G}{\partial t}\right)\right],$$

$$\psi_2 = \frac{1}{4}\left[\tau^2\left(2\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial E}{\partial u}\right) + 2\tau\upsilon\frac{\partial G}{\partial t} + \upsilon^2\frac{\partial G}{\partial u}\right].$$

Les trois dernières égalités du n° 3, ou plutôt celles qui les remplacent écrites plus haut, donnent ensuite ζ_3 et deux relations différentielles :

$$\frac{1}{H^2}\begin{vmatrix} 2\varphi_2 & 2\psi_2 & 6H\zeta_3 \\ E & F & D\tau + D'\upsilon \\ F & G & D'\tau + D''\upsilon \end{vmatrix} = D_1\tau^2 + 2D'_1\tau\upsilon + D''_1\upsilon^2 - 2H_1\zeta_2,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & 0 \\ E & F & D' \\ F & G & D'' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & 0 \\ E & F & D \\ F & G & D' \end{vmatrix} = H^3\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{D}{H} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{D'}{H}\right),$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} & 0 \\ E & F & D \\ F & G & D' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial t} & 0 \\ E & F & D' \\ F & G & D'' \end{vmatrix} = H^3\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{D''}{H} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{D'}{H}\right),$$

$2HH_1$ représentant $EG_1 + GE_1 - 2FF_1$. (Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces*, t. III, p. 248.)

6. En égalant de part et d'autre les termes du second degré dans les égalités du n° 3 provenant de l'élément linéaire, il vient

$$\varphi'_{3\tau} = \tfrac{1}{2}E_1 - \tfrac{1}{2}\xi'^2_{2\tau} - \tfrac{1}{2}\eta'^2_{2\tau} - \tfrac{1}{2}\zeta'^2_{2\tau},$$

$$\psi'_{3\upsilon} = \tfrac{1}{2}G_2 - \tfrac{1}{2}\xi'^2_{2\upsilon} - \tfrac{1}{2}\eta'^2_{2\upsilon} - \tfrac{1}{2}\zeta'^2_{2\upsilon},$$

$$\varphi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\tau} = F_2 - \xi'_{2\tau}\xi'_{2\upsilon} - \eta'_{2\tau}\eta'_{2\upsilon} - \zeta'_{2\tau}\zeta'_{2\upsilon}.$$

Ces équations, pour être compatibles, exigent, d'après le n° 4, la relation suivante :

$$(1)\qquad \zeta''_{2\tau^2}\zeta''_{2\upsilon^2} - \zeta''^2_{2\tau\upsilon} = \frac{\partial^2 F}{\partial t\,\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \xi''^2_{2\tau\upsilon} - \xi''_{2\tau^2}\xi''_{2\upsilon^2} + \eta''^2_{2\tau\upsilon} - \eta''_{2\tau^2}\eta''_{2\upsilon^2};$$

un calcul facile donne

$$\begin{aligned} &\xi''^2_{2\tau\upsilon} - \xi''_{2\tau^2}\xi''_{2\upsilon^2} + \eta''^2_{2\tau\upsilon} - \eta''_{2\tau^2}\eta''_{2\upsilon^2} \\ &\quad = \frac{1}{H^2}\left[G(\varphi''^2_{2\tau\upsilon} - \varphi''_{2\tau^2}\varphi''_{2\upsilon^2}) + F(\varphi''_{2\tau^2}\psi''_{2\upsilon^2} + \varphi''_{2\upsilon^2}\psi''_{2\tau^2} - 2\varphi''_{2\tau\upsilon}\psi''_{2\tau\upsilon}) + E(\psi''^2_{2\tau\upsilon} - \psi''_{2\tau^2}\psi''_{2\upsilon^2})\right]. \end{aligned}$$

Si l'on exprime ζ en fonction de ξ et η et qu'on pose

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2) + \ldots,$$

il vient

$$\zeta''_{2\tau^2}\zeta''_{2\upsilon^2} - \zeta''^2_{2\tau\upsilon} = H^2(ab - c^2),$$

et l'équation (1) donne l'expression de la courbure totale de la surface en fonction des coefficients de l'élément linéaire (théorème de Gauss).

7. Les formules se simplifient lorsque les courbes coordonnées sont rectangulaires, auquel cas $F = 0$. Soit alors $A^2 dt^2 + B^2 du^2$ le carré de l'élément linéaire; prenons pour axe des ξ la tangente à l'élément dont les extrémités sont τ, υ et $\tau + d\tau, \upsilon$; pour axe des η la perpendiculaire et pour variables indépendantes ξ et η au lieu de τ, υ.

Posons

$$\tau = \frac{1}{A}\xi + \tau_2 + \tau_3 + \ldots + \tau_n + \ldots,$$

$$\upsilon = \frac{1}{B}\eta + \upsilon_2 + \upsilon_3 + \ldots + \upsilon_n + \ldots,$$

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2) + \zeta_3 + \ldots + \ldots + \zeta_n + \ldots,$$

τ_n, υ_n, ζ_n étant des fonctions homogènes de ξ, η, de degré n. On a ces deux expressions du carré de l'élément linéaire :

$$(1 + p^2)\,d\xi^2 + 2pq\,d\xi\,d\eta + (1 + q^2)\,d\eta^2, \qquad \mathcal{A}^2 d\tau^2 + \mathcal{B}^2 d\upsilon^2,$$

$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ étant les valeurs de A, B pour $t + \tau$, $u + \upsilon$; et p, q étant les dérivées partielles de ζ; d'où

$$1 + p^2 = \mathcal{A}^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\right)^2 + \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2, \qquad 1 + q^2 = \mathcal{A}^2\left(\frac{\partial\tau}{\partial\eta}\right)^2 + \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}\right)^2,$$

$$pq = \mathcal{A}^2\frac{\partial\tau}{\partial\xi}\frac{\partial\tau}{\partial\eta} + \mathcal{B}^2\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\frac{\partial\upsilon}{\partial\eta}.$$

p et $\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}$ s'annulent avec les ξ et η; il en résulte

$$\mathcal{A}\frac{\partial\tau}{\partial\xi} = \sqrt{1 + p^2 - \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2} = 1 + \frac{1}{2}\left[p^2 - \mathcal{B}^2\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial\xi}\right)^2\right] + \ldots,$$

les termes non écrits dans le dernier membre étant au moins du quatrième degré en ξ, η. Ainsi

$$\mathcal{A}\tau'_\xi = 1 + \tfrac{1}{2}(\zeta'^2_{2\xi} - B^2\upsilon'^2_{2\xi}) + \ldots,$$

$$\mathcal{B}\upsilon'_\eta = 1 + \tfrac{1}{2}(\zeta'^2_{2\eta} - A^2\tau'^2_{2\eta}) + \ldots,$$

$$\mathcal{A}\tau'_\eta + \mathcal{B}\upsilon'_\xi = \zeta'_{2\xi}\zeta'_{2\eta} + \ldots.$$

Les termes du premier degré manquent dans les seconds membres;

en égalant à zéro ceux des premiers membres, il vient

$$A\tau'_{2\xi} = -\frac{1}{A}A_1, \qquad B\upsilon'_{2\eta} = -\frac{1}{B}B_1, \qquad A\tau'_{2\eta} + B\upsilon'_{2\xi} = 0,$$

d'où

$$\tau_2 = -\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\xi^2}{A^2} + 2\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\zeta\eta}{AB} - \frac{\partial B}{\partial t}\frac{\eta^2}{AB}\right),$$

$$\upsilon_2 = -\frac{1}{2B}\left(-\frac{\partial A}{\partial u}\frac{\xi^2}{AB} + 2\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\xi\eta}{AB} + \frac{\partial B}{\partial u}\frac{\eta^2}{B^2}\right).$$

En égalant de part et d'autre les termes du second degré, on aurait des équations déterminant τ_3 et υ_3, et donnant en outre une relation entre a, b, c, A, B et les dérivées premières et secondes de A, B par rapport à t et à u; on en tire l'expression de la courbure totale déjà établie au n° 6 et qui peut ici s'écrire

$$(1) \qquad AB(ab - c^2) = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right].$$

La partie principale de la distance du point $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$ au plan tangent au point ξ, η, est égale d'une part à

$$\tfrac{1}{2}(\alpha\mathcal{A}^2\,d\tau^2 + 2\gamma\mathcal{A}\mathcal{B}\,d\tau\,d\upsilon + \beta B^2\,d\upsilon^2),$$

α, β, γ étant les valeurs de a, b, c pour $t+\tau$, $u+\upsilon$; d'autre part, à

$$\frac{1}{2}\,\frac{\zeta''_{\xi^2}\,d\xi^2 + 2\zeta''_{\xi\eta}\,d\xi\,d\eta + \zeta''_{\eta^2}\,d\eta^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Égalant les termes du premier degré dans les coefficients correspondants de ces deux expressions, il vient

$$\zeta''_{3\xi^2} = a_1 + 2cB\upsilon'_{2\xi}, \qquad \zeta''_{3\eta^2} = b_1 + 2cA\tau'_{2\eta},$$
$$\zeta''_{3\xi\eta} = c_1 + aA\tau'_{2\eta} + bB\upsilon'_{2\xi};$$

mais

$$A\tau'_{2\eta} = -B\upsilon'_{2\xi} = -\frac{1}{AB}\left(\frac{\partial A}{\partial u}\xi - \frac{\partial B}{\partial t}\eta\right);$$

donc, en définitive,

$$A\frac{\partial a}{\partial u} - B\frac{\partial c}{\partial t} = (b-a)\frac{\partial A}{\partial u} + 2c\frac{\partial B}{\partial t},$$

$$B\frac{\partial b}{\partial t} - A\frac{\partial c}{\partial u} = (a-b)\frac{\partial B}{\partial t} + 2c\frac{\partial A}{\partial u},$$

$$6\zeta_3 = \left(\frac{\partial a}{\partial s} + \frac{2c}{A}\frac{\partial A}{\partial s_1}\right)\xi^3 + 3\left(\frac{\partial a}{\partial s_1} - \frac{2c}{B}\frac{\partial B}{\partial s}\right)\xi^2\eta$$
$$+3\left(\frac{\partial b}{\partial s} - \frac{2c}{A}\frac{\partial A}{\partial s_1}\right)\xi\eta^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial s_1} + \frac{2c}{B}\frac{\partial B}{\partial s}\right)\eta^3,$$

$\frac{\partial}{\partial s}$, $\frac{\partial}{\partial s_1}$ indiquant les dérivées prises par rapport aux arcs des courbes coordonnées; ainsi

$$\frac{\partial a}{\partial s} = \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial t}, \qquad \frac{\partial a}{\partial s_1} = \frac{1}{B}\frac{\partial a}{\partial u}.$$

8. Ces formules sont immédiates lorsque les courbes coordonnées sont les lignes de courbure de la surface, auquel cas $c = 0$. Les courbures principales, multipliées par $\sqrt{1+p^2+q^2}$, sont données par l'équation en ρ

$$(1) \qquad [\rho(1+p^2) - \zeta''_{\xi^2}][\rho(1+q^2) - \zeta''_{\eta^2}] - [pq\rho - \zeta''_{\xi\eta}]^2 = 0.$$

D'autre part, ces courbures sont égales à α, β, valeurs de a et b pour $t+\tau$, $u+\upsilon$. Substituant et annulant, dans le premier membre, les termes du premier degré dans chacune des équations obtenues, il vient

$$\zeta''_{3\xi^2} = \frac{\partial a}{\partial t}\frac{\xi}{A} + \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\eta}{B}, \qquad \zeta''_{3\eta^2} = \frac{\partial b}{\partial t}\frac{\xi}{A} + \frac{\partial b}{\partial u}\frac{\eta}{B}.$$

L'équation différentielle des lignes de courbure est

$$[pq\zeta''_{\eta^2} - (1+q^2)\zeta''_{\xi\eta}]d\eta^2 + [(1+p^2)\zeta''_{\eta^2} - \zeta''_{\xi^2}(1+q^2)]d\eta\,d\xi + [(1+p^2)\zeta''_{\xi\eta} - pq\zeta''_{\xi^2}]d\xi^2 = 0.$$

Or les équations de ces lignes de courbure s'obtiennent en donnant à τ et à υ des valeurs constantes; l'équation précédente est donc identiquement satisfaite si $d\xi$ et $d\eta$ sont liés par la relation

$$\tau'_\xi\,d\xi + \tau'_\eta\,d\eta = 0,$$

ou par la suivante

$$\upsilon'_\xi\, d\xi + \upsilon'_\eta\, d\eta = 0.$$

Cette dernière donne

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{AB}(-A'_u \xi + B'_t \eta) + \ldots;$$

substituant et annulant les termes du premier degré, il vient

$$(2) \qquad \frac{\partial a}{\partial u} + (a-b)\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{b-a}{B}\frac{\partial B}{\partial t} = 0.$$

En annulant les termes du second degré dans les fonctions obtenues en substituant à ρ, $\alpha\sqrt{1+p^2+q^2}$, $\beta\sqrt{1+p^2+q^2}$ dans le premier membre de l'équation (1), on obtient six équations pour déterminer les coefficients de ζ_4; ces équations donnent donc, en plus de ces coefficients, une relation entre les fonctions A, B, a, b de t et de u; cette relation n'est autre que celle qui donne la courbure totale de la surface au point t, u

$$(3) \qquad ABab = -\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial u}\right)\right].$$

9. Lorsque les lignes de courbure sont isothermiques, A et B ont des valeurs égales en choisissant convenablement les paramètres t, u. Les équations (2) et (3) du numéro précédent deviennent alors

$$(1) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{(a-b)}{A}\frac{\partial A}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial b}{\partial t} + \frac{b-a}{A}\frac{\partial A}{\partial t} = 0,\\ &\qquad A^2 ab = -\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} l\,.\,A + \frac{\partial^2}{\partial u^2} l\,.\,A\right].\end{aligned}\right.$$

Si a, b, A est un système de solutions de ces trois équations, mA^2a, $-mA^2b$, $\frac{1}{Am}$ en est un autre système, m constante arbitraire; les surfaces correspondantes ont même représentation sphérique

$$A^2(a^2\, dt^2 + b^2\, du^2)$$

et, par suite, peuvent être placées de manière à avoir leurs plans tangents parallèles aux points correspondants; de plus, le rapport des éléments linéaires mA^2, aux points correspondants, étant indépendant de la direction des éléments, la correspondance établie réalise une représentation conforme des deux surfaces l'une sur l'autre. La recherche des couples de surface jouissant de cette double propriété constitue le problème de Christoffel (Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*, t. II, Chap. XI).

Cherchons dans quels cas les surfaces que nous venons de trouver peuvent être parallèles. Portons une longueur l sur chaque normale à la surface

$$\zeta = \tfrac{1}{2}(a\xi^2 + b\eta^2) + \zeta_3 + \ldots;$$

il vient, pour les coordonnées ξ', η', ζ' de l'extrémité

$$\xi' = (1 - al) + \ldots, \qquad \eta' = \eta(1 - bl) + \ldots,$$
$$\zeta' - l = \tfrac{1}{2}[a(1 - al)\xi^2 + b(1 - bl)\eta^2] + \ldots;$$

d'où

$$\zeta' - l = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1 - al}\xi'^2 + \frac{b}{1 - bl}\eta'^2\right)$$
$$+ \frac{1}{6}\left[\frac{\xi'^3}{(1-al)^3}\frac{\partial a}{\partial s} + \frac{3\xi'^2\eta'}{(1-al)^2(1-bl)}\frac{\partial a}{\partial s_1} + \frac{3\xi'\eta'^2}{(1-al)(1-bl)^2}\frac{\partial b}{\partial s} + \frac{\eta'^3}{(1-bl)^3}\frac{\partial b}{\partial s_1}\right] + \ldots$$

Il faut qu'on ait

$$A^2 a = \frac{a}{1 - al}, \qquad -A^2 b = \frac{b}{1 - bl};$$

éliminant A^2, il vient

$$2 - (a + b)l = 0;$$

ainsi $a + b$ est constant; et les points correspondants sont conjugués harmoniques par rapport à leurs centres de courbure principaux communs; les parallèles aux éléments correspondants, menées par l'origine de l'un d'eux, sont symétriques par rapport aux plans principaux; on a ensuite

$$A^2 = \frac{a + b}{a - b}.$$

Ces valeurs satisfont bien aux équations (1); elles donnent, en posant $a + b = k$,

$$2a - k = a - b = \frac{C}{A^2}, \qquad \frac{C^2}{4A^2} - k^2\frac{A^2}{4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}lA + \frac{\partial^2}{\partial u^2}lA,$$

C étant une constante arbitraire.

L'hypothèse $a+b=k$, introduite dans les formules (2) du numéro précédent, donne

$$\frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial u}=-\frac{1}{2a-k}\frac{\partial a}{\partial u},\qquad \frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial t}=-\frac{1}{2a-k}\frac{\partial a}{\partial t}$$

et montre que la surface est isothermique

Ces dernières formules mettent en évidence les propositions dues à Bonnet et développées dans les *Leçons sur la Théorie générale des Surfaces* de M. Darboux (t. III, p. 382 et suivantes).

10. x, y, z, w étant quatre fonctions holomorphes des trois variables t, u, v, effectuons la transformation orthogonale, X, Y, Z, W étant des variables indépendantes :

$$\begin{aligned}
\xi &= l\,(X-x)+l_1\,(Y-y)+l_2\,(Z-z)+l_3\,(W-w),\\
\eta &= m(X-x)+m_1(Y-y)+m_2(Z-z)+m_3(W-w),\\
\zeta &= n\,(X-x)+n_1\,(Y-y)+n_2\,(Z-z)+n_3\,(W-w),\\
\omega &= p\,(X-x)+p_1\,(Y-y)+p_2\,(Z-z)+p_3\,(W-w).
\end{aligned}$$

Les seize coefficients l, m, n, p sont tels qu'on a identiquement

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\omega^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2+(W-w)^2;$$

ce qui donne entre eux dix relations.

Si l'on remplace X, Y, Z, W par les valeurs de x, y, z, w correspondant à $t+\tau$, $u+\upsilon$, $v+\nu$, valeurs qui sont données par la formule Taylor par hypothèse, on aura

$$(1)\qquad \begin{aligned}
&d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2+d\omega^2=dX^2+dY^2+dZ^2+dW^2\\
&\quad=\mathcal{E}\,d\tau^2+\mathcal{F}\,d\upsilon^2+\mathcal{G}\,d\nu^2+2\,\mathcal{L}\,d\upsilon\,d\nu+2\,\mathcal{M}\,d\nu\,d\tau+2\,\mathcal{N}\,d\tau\,d\upsilon,
\end{aligned}$$

$\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ étant pour $t+\tau$, $u+\upsilon$, $v+\nu$ les valeurs des fonctions E, F, G, L, M, N définies par l'équation

$$dx^2+dy^2+dz^2=E\,dt^2+F\,du^2+G\,dv^2+2L\,du\,dv+2M\,dv\,dt+2N\,dt\,du.$$

Supposons le déterminant

$$\begin{vmatrix} E & N & M\\ N & F & L\\ M & L & G\end{vmatrix}=H^2$$

différent de o. Alors on peut prendre pour ω

$$\omega = \frac{1}{\mathrm{H}} \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z & W - w \\ x'_t & y'_t & z'_t & w'_t \\ x'_u & y'_u & z'_u & w'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v & w'_v \end{vmatrix},$$

et il ne reste plus que trois indéterminées parmi les coefficients l, m, n. Posons

$$\xi = \alpha\tau + \beta\upsilon + \gamma\nu + \xi_2 + \ldots + \xi_n + \ldots, \qquad \eta = \alpha_1\tau + \beta_1\upsilon + \gamma_1\nu + \eta_2 + \ldots + \eta_n + \ldots,$$

$$\omega = \frac{\mathrm{D}\tau^2 + \mathrm{D}'\upsilon^2 + \mathrm{D}''\nu^2 + 2\Delta\upsilon\nu + 2\Delta'\nu\tau + 2\Delta''\tau\upsilon}{2\mathrm{H}} + \omega_3 + \ldots + \omega_n + \ldots,$$

$$\zeta = \alpha_2\tau + \beta_2\upsilon + \gamma_2\nu + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n + \ldots,$$

ξ_n, η_n, ζ_n, ω_n étant des fonctions homogènes de τ, υ, ν de degré n. On aura

$$(2) \quad \begin{vmatrix} d^2\xi & d^2\eta & d^2\zeta & d^2\omega \\ \xi'_\tau & \eta'_\tau & \zeta'_\tau & \omega'_\tau \\ \xi'_\upsilon & \eta'_\upsilon & \zeta'_\upsilon & \omega'_\upsilon \\ \xi'_\nu & \eta'_\nu & \zeta'_\nu & \omega'_\nu \end{vmatrix} = \mathbb{D}\, d\tau^2 + \mathbb{D}'\, d\upsilon^2 + \mathbb{D}''\, d\nu^2 + 2\delta\, d\upsilon\, d\nu + 2\delta'\, d\nu\, d\tau + 2\delta''\, d\tau\, d\upsilon;$$

$\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$, $\mathbb{D}''$, δ, δ', δ'' étant les valeurs, données par la formule de Taylor, de D, D', D'', Δ, Δ', Δ'' pour $t + \tau$, $u + \upsilon$, $v + \nu$; et $d^2\xi$, $d^2\eta$, $d^2\zeta$, $d^2\omega$, les différentielles secondes des fonctions ξ, η, ζ, ω.

Les égalités (1) et (2) nous donnent chacune un groupe de six égalités entre des fonctions de τ, υ, ν. Égalant les termes indépendants des variables, il vient

$$\alpha^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \mathrm{E}, \qquad \beta^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2 = \mathrm{F}, \qquad \gamma^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \mathrm{G},$$

$$\beta\gamma + \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 = \mathrm{L}, \qquad \gamma\alpha + \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 = \mathrm{M}, \qquad \alpha\beta + \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = \mathrm{N};$$

d'où l'on tire

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta & \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma & \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} \mathrm{E} & \mathrm{N} & \mathrm{M} \\ \mathrm{N} & \mathrm{F} & \mathrm{L} \\ \mathrm{M} & \mathrm{L} & \mathrm{G} \end{vmatrix} = \mathrm{H}^2;$$

et, entre les neuf quantités α, β, γ, il reste trois indéterminées, ce qui correspond à l'indétermination des l, m, n.

Posons, quel que soit l'indice n,

$$\alpha\xi_n + \alpha_1\eta_n + \alpha_2\zeta_n = \varphi_{n1} \qquad \beta\xi_n + \beta_1\eta_n + \beta_2\zeta_n = \psi_n,$$
$$\gamma\xi_n + \gamma_1\eta_n + \gamma_2\zeta_n = \chi_n.$$

En égalant entre eux les termes du premier degré dans le premier groupe d'égalités (1), il vient

$$\varphi'_{2\tau} = \tfrac{1}{2}E_1, \qquad \psi'_{2\upsilon} = \tfrac{1}{2}F_1, \qquad \chi'_{2\nu} = \tfrac{1}{2}G_1,$$
$$\chi'_{2\upsilon} + \psi'_{2\nu} = L_1, \qquad \varphi'_{2\nu} + \chi'_{2\tau} = M_1, \qquad \psi'_{2\tau} + \varphi'_{2\upsilon} = N_1;$$

équations qui déterminent φ_2, ψ_2, χ_2. Le second groupe d'égalités (2) donne dix-huit équations entre les coefficients de ω_3, au nombre de dix; ces équations déterminent les valeurs de ces coefficients et établissent huit relations entre les fonctions D, D', D'', Δ, Δ', Δ'', E, F, G, L, M, N et leurs dérivées premières.

11. Égalant de part et d'autre les termes du second degré, le premier groupe d'égalités (1) du numéro précédent donne

$$\varphi'_{3\tau} = f, \qquad \psi'_{3\upsilon} = f_1, \qquad \chi'_{3\nu} = f_2,$$
$$\chi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\nu} = g, \qquad \varphi'_{3\nu} + \chi'_{3\tau} = g_1, \qquad \varphi'_{3\upsilon} + \psi'_{3\tau} = g_2;$$

en posant

$$f = \tfrac{1}{2}(E_2 - \xi'^2_{2\tau} - \eta'^2_{1\tau} - \zeta'^2_{2\tau} - \omega'^2_{2\tau}), \qquad \ldots,$$
$$g = L_2 - \xi'_{2\upsilon}\xi'_{2\nu} - \eta'_{2\upsilon}\eta'_{2\nu} - \zeta'_{2\upsilon}\eta'_{2\nu} - \omega'_{2\upsilon}\omega'_{2\nu}, \qquad \ldots.$$

On en déduit facilement les relations

$$g''_{\upsilon\nu} - f''_{1\nu^2} - f''_{2\upsilon^2} = 0, \qquad g''_{1\nu\tau} - f''_{\nu^2} - f''_{2\tau^2} = 0, \qquad g''_{2\tau\upsilon} - f''_{\upsilon^2} - f''_{1\tau^2} = 0,$$
$$2f''_{\upsilon\nu} + g''_{\tau^2} - g''_{1\tau\upsilon} - g''_{2\tau\nu} = 0, \qquad 2f''_{1\nu\tau} + g''_{1\upsilon^2} - g''_{\tau\upsilon} - g''_{2\nu\upsilon} = 0,$$
$$2f''_{2\tau\upsilon} + g''_{2\nu^2} - g''_{\tau\nu} - g''_{1\nu\upsilon} = 0.$$

Ces relations donnent les valeurs de

$$(1) \qquad \begin{cases} D'D'' - \Delta^2, & D''D - \Delta'^2, & DD' - \Delta''^2, \\ \Delta'\Delta'' - \Delta D, & \Delta\Delta'' - \Delta'D', & \Delta\Delta' - \Delta''D'', \end{cases}$$

en fonctions de E, F, G, L, M, N et de leurs dérivées premières et secondes.

Si le déterminant

$$\begin{vmatrix} D'D''-\Delta^2 & \Delta\Delta''-\Delta'D' & \Delta\Delta'-\Delta''D'' \\ \Delta\Delta''-\Delta'D' & D''D-\Delta'^2 & \Delta'\Delta''-\Delta D \\ \Delta\Delta'-\Delta''D'' & \Delta'\Delta''-\Delta D & DD'-\Delta''^2 \end{vmatrix}$$

n'est pas nul, les valeurs de D, D′, D″, Δ, Δ′, Δ″ sont déterminées; transportant dans les huit équations aux dérivées partielles du premier ordre obtenues au numéro précédent, on a huit équations simultanées aux dérivées partielles du troisième ordre pour les six fonctions E, F, G, L, M, N.

Si les six quantités (1) sont nulles, la fonction

$$D\tau^2 + D'\upsilon^2 + D''\nu^2 + 2\Delta\upsilon\nu + 2\Delta'\nu\tau + 2\Delta''\tau\upsilon$$

est un carré parfait et les fonctions E, F, G, L, M, N satisfont à six équations aux dérivées partielles du second ordre. Si l'on exprime l'une des coordonnées primitives x, y, z, w, en fonction holomorphe des accroissements des trois autres, w par exemple,

$$w = w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n + \ldots,$$

w_n étant une fonction homogène de degré n de dx, dy, dz; w_2, c'est-à-dire la différentielle seconde de w, sera un carré parfait, et réciproquement. Ainsi w peut se définir par les équations

$$Ax + By + Cz + w + P = 0,$$
$$A'x + B'y + C'z + P' = 0,$$

A, B, C, P étant fonctions d'un paramètre et A′, B′, C′, P′ leurs dérivées. On se trouve dans ce cas lorsque

$$E\,dt^2 + F\,du^2 + G\,dv^2 + 2L\,du\,dv + 2M\,dv\,dt + 2N\,dt\,du$$

représente la partie principale du carré de la distance de deux points de l'espace euclidien, puisque, alors, w est nul. Les équations aux dérivées partielles du second ordre auxquelles on arrive ont été données par Lamé, lorsque les surfaces coordonnées sont orthogonales, et par l'abbé Aoust dans le cas où elles sont quelconques.

12. Rapportons l'espace euclidien à trois familles de surfaces orthogonales et soit $A^2\,dt^2 + B^2\,du^2 + C^2\,dv^2$ la partie principale du carré de la distance des points t, u, v et $t+dt, u+du, v+dv$. Prenons pour axes des ξ, η, ζ les tangentes aux courbes d'intersection des surfaces au point t, u, v; il vient, d'après les formules du n° 10,

$$\xi = A\tau + \frac{1}{2}\left(A'_t\tau^2 - \frac{BB'_t}{A}\upsilon^2 - \frac{CC'_t}{A}\nu^2 + 2A'_v\nu\tau + 2A'_u\tau\upsilon\right) + \ldots,$$

$$\eta = B\upsilon + \frac{1}{2}\left(-\frac{AA'_u}{B}\tau^2 + B'_u\upsilon^2 - \frac{CC'_u}{B}\nu^2 + 2B'_v\upsilon\nu + 2B'_t\upsilon\tau\right) + \ldots,$$

$$\zeta = C\nu + \frac{1}{2}\left(-\frac{AA'_v}{C}\tau^2 - \frac{BB'_v}{C}\upsilon^2 + C'_v\nu^2 + 2C'_u\upsilon\nu + 2C'_t\nu\tau\right) + \ldots;$$

ou, en prenant ξ, η, ζ pour variables indépendantes,

$$\tau = \frac{\xi}{A} - \frac{1}{2A^2}\left(A'_t\frac{\xi^2}{A} - \frac{B'_t}{B}\eta^2 - \frac{C'_t}{C}\zeta^2 + 2\frac{A'_v}{C}\zeta\xi + 2\frac{A'_u}{B}\xi\eta\right) + \ldots,$$

$$\upsilon = \frac{\eta}{B} - \frac{1}{2B^2}\left(-\frac{A'_u}{A}\xi^2 + \frac{B'_u}{B}\eta^2 - \frac{C'_u}{C}\zeta^2 + 2\frac{B'_v}{C}\eta\zeta + 2\frac{B'_t}{A}\xi\eta\right) + \ldots,$$

$$\nu = \frac{\zeta}{C} - \frac{1}{2C^2}\left(-\frac{A'_v}{A}\xi^2 - \frac{B'_v}{B}\eta^2 + \frac{C'_v}{C}\zeta^2 + 2\frac{C'_u}{B}\eta\zeta + 2\frac{C'_t}{A}\zeta\xi\right) + \ldots.$$

La surface $\nu = 0$ a donc pour équation

$$\zeta = -\frac{1}{2C}\left(\frac{A'_v}{A}\xi^2 + \frac{B'_v}{B}\eta^2\right) + \zeta_3 + \zeta_4 + \ldots. \tag{1}$$

On voit que les surfaces coordonnées se coupent suivant leurs lignes de courbure [1], et la connaissance des termes du second degré permet d'écrire immédiatement ceux du troisième, d'après le n° 8,

$$6\zeta_3 = -\left(\frac{\xi^3}{A}\frac{\partial}{\partial t}\frac{A'_v}{AC} + 3\frac{\xi^2\eta}{B}\frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_v}{AC} + 3\frac{\xi\eta^2}{A}\frac{\partial}{\partial t}\frac{B'_v}{BC} + \frac{\eta^3}{B}\frac{\partial}{\partial u}\frac{B'_v}{BC}\right). \tag{1'}$$

On a les relations différentielles du second ordre entre les fonctions A, B, C en appliquant les formules (2) et (3) du n° 8. Les formules (2) donnent

$$\frac{A'_u}{A}\left(-\frac{A'_v}{CA} + \frac{B'_v}{CB}\right) - \frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_v}{AC} = 0$$

ou

$$A''_{uv} = \frac{1}{B}B'_v A'_u + \frac{1}{C}C'_u A'_v; \tag{2}$$

[1] Théorème de Dupin.

et deux autres équations analogues, qu'on obtient en permutant, dans celle-ci, A et B, t et u, puis A et C, t et v,

$$(2)\qquad B''_{tv} = \frac{1}{A}A'_v B'_t + \frac{1}{C}C'_t B'_v, \qquad C''_{ut} = \frac{1}{B}B'_t C'_u + \frac{1}{A}A'_u C'_t.$$

La formule (3) donne un second groupe de trois équations, qu'on obtient en permutant dans la suivante : C en A, v en t, puis C en B et v en u,

$$(3)\qquad \frac{A'_v B'_v}{C^2} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{B'_t}{A} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{A'_u}{B}.$$

13. Supposons les trois familles de surfaces d'un système orthogonal isothermiques, et qu'on ait pris pour t, u, v les paramètres isothermiques de ces surfaces (Lamé, *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, Chap. II). On a alors les trois équations

$$\Delta_2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0, \qquad \Delta^2 u = 0, \qquad \Delta^2 v = 0,$$

lesquelles subsistent pour les τ, υ, ν, exprimées en fonction de ξ, η, ζ; donc

$$\Delta_2 t = \frac{1}{A^2}\left(\frac{A'_t}{A} - \frac{B'_t}{B} - \frac{B'_c}{C}\right) = \frac{1}{A^2}\left(l\frac{BC}{A}\right)'_t = 0.$$

Ainsi

$$\frac{BC}{A} = Q^2, \qquad \frac{AC}{B} = Q_1^2, \qquad \frac{BA}{C} = Q_2^2,$$

Q ne dépendant pas de t, Q_1 de u, Q_2 de v;

$$A^2 = Q_1^2 Q_2^2, \qquad B^2 = Q^2 Q_2^2, \qquad C^2 = Q^2 Q_1^2.$$

Posons

$$Q = e^q, \qquad Q_1 = e^{q_1}, \qquad Q_2 = e^{q_2}.$$

Le groupe des trois équations (2) du numéro précédent deviennent

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} q'_{2u} q'_{1v} &= q'_{2u} q'_v + q'_{1v} q'_u, \\ q'_{2t} q'_v &= q'_{2t} q'_{1v} + q'_v q'_{1t}, \\ q'_u q'_{1t} &= q'_u q'_{2t} + q'_{1t} q'_{2u}. \end{aligned}\right.$$

L'une d'elles est la conséquence des deux autres. On en tire

$$q'_{2u} = \frac{q'_{1v} q'_u}{q'_{1v} - q'_v}, \qquad q'_{2t} = \frac{q'_v q'_{1t}}{q'_v - q'_{1v}}.$$

Égalant la dérivée par rapport à t du second membre de la première égalité à la dérivée par rapport à u du second membre de la deuxième, on a la première des trois équations :

$$(1') \qquad \frac{q''_{uv}}{q'_u q'_v} = \frac{q''_{1tv}}{q'_{1t} q'_{1v}} = \frac{q''_{2tu}}{q'_{2t} q'_{2u}} = \frac{-1}{k},$$

k étant une constante arbitraire.

14. Pour $\frac{1}{k}$ nul, si aucune des quantités q' n'est nulle, les courbures a, b d'une surface du système, et les valeurs de A, B pour cette surface satisferaient aux équations

$$\frac{\partial^2 lA}{\partial t \, \partial u} = \frac{\partial^2 lB}{\partial t \, \partial u} = \frac{\partial^2 la}{\partial t \, \partial u} = \frac{\partial^2 lb}{\partial t \, \partial u} = 0,$$

le rapport $\frac{a}{b}$, en outre, étant constant. Les trois équations (2) et (3) du n° 8 sont impossibles dans ces conditions.

Faisant l'hypothèse $q'_{2u} = 0$, les équations (1) donnent $q'_{1v} = 0$, $q'_{1t} = q'_{2t}$, et laissent q complètement indéterminé. Écrivant que les valeurs qu'on en déduit pour A, B, C satisfont aux trois équations du groupe (3) du n° 12, on obtient les deux systèmes de solutions :

$$(2) \qquad A = \frac{1}{t^2}, \qquad B = \frac{Q}{t}, \qquad C = \frac{Q}{t},$$

Q étant une solution de l'équation

$$Q^2 = -\frac{\partial^2}{\partial v^2} lQ - \frac{\partial^2}{\partial u^2} lQ;$$

et

$$(2') \qquad A = 1, \qquad B = Q, \qquad C = Q,$$

Q étant une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2}{\partial v^2} lQ + \frac{\partial^2}{\partial u^2} lQ = 0.$$

Le système (2) est formé de sphères concentriques et de cônes ayant leur sommet au centre commun des sphères, et les coupant suivant des courbes rectangulaires isothermiques.

Le système (2') est formé de plans parallèles et de cylindres orthogonaux les coupant, suivant des courbes orthogonales isothermiques.

15. $\frac{1}{k}$ étant différent de zéro, posons

$$q = kl\chi, \qquad q_1 = kl\chi_1, \qquad q_2 = kl\chi_2;$$

ce qui donne

$$Q = \chi^k, \qquad Q_1 = \chi_1^k, \qquad Q_2 = \chi_2^k;$$

les équations (1') deviennent

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \chi_1}{\partial v\, \partial t} = \frac{\partial^2 \chi_2}{\partial t\, \partial u} = 0,$$

et la première des équations (1)

$$\chi \chi'_{2u} \chi'_{1v} = \chi_1 \chi'_{2u} \chi'_v + \chi_2 \chi'_{1v} \chi'_u.$$

Dérivant cette dernière par rapport à t, et tenant compte des précédentes, il vient

$$\chi'_{1t} \chi'_{2u} \chi'_v + \chi'_{2t} \chi'_{1v} \chi'_u = 0.$$

On a donc

$$\chi = Af_1 + A'f_2, \qquad \chi_1 = Bf + B'f_2, \qquad \chi_2 = Cf + C'f_1,$$

f étant une fonction de t, f_1 de u, f_2 de v, et les constantes étant liées par l'équation

$$BC'A' + CB'A = 0.$$

Mais en remplaçant t, u, v par mt, nu, pv, m, n, p étant trois constantes, on peut les choisir de façon que $B' = -A'$, $C = -B$; et alors la relation qui précède devient $C' = -A$. Donc, en définitive, dans le cas qui nous occupe, on peut prendre

$$\chi = f_1 - f_2, \qquad \chi_1 = f_2 - f, \qquad \chi_2 = f - f_1.$$

Les fonctions A, B, C doivent satisfaire aux trois équations du groupe (3) du n° 13. En remplaçant A, B, C par leurs valeurs en fonction des quantités f, on obtient trois équations du premier degré par rapport aux dérivées secondes des fonctions f, f_1, f_2 qui ne sont compatibles que si la quantité

$$(1) \qquad (2k-1)\left[(f_1-f_2)^{2k+2}f'^2 + (f_2-f)^{2k+2}f_1'^2 + (f-f_1)^{2k+2}f_2'^2\right]$$

est nulle; d'où $k = \frac{1}{2}$.

En effet, l'une des équations du groupe est

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\chi_1^k}{\chi^k}\,\frac{-f_1'}{\chi_2}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi^k}{\chi_1^k}\,\frac{f'}{\chi_2}\right) - k\,\frac{\chi_2^{2k}}{\chi^{k+1}\chi_1^{k+1}}\,f_2'^2 = 0;$$

ou en divisant par χ_2^{k-1}, après avoir effectué les dérivations,

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}\left(-\frac{1}{\chi_2}+\frac{k}{\chi}\right)f_1'^2 &- \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}\left(\frac{1}{\chi_2}-\frac{k}{\chi_1}\right)f'^2 - k\,\frac{\chi_2^{k+1}\,f_2'^2}{\chi^{k+1}\chi_1^{k+1}}\\ &= \frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}f_1'' - \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}f''.\end{aligned}$$

Permutant les indices 2 et 0, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}\left(-\frac{1}{\chi}+\frac{k}{\chi_2}\right)f_1'^2 &- \frac{\chi_2^k}{\chi_1^k\chi^k}\left(\frac{1}{\chi}-\frac{k}{\chi_1}\right)f_2'^2 - k\,\frac{\chi^{k+1}}{\chi_2^{k+1}\chi_1^{k+1}}f'^2\\ &= -\frac{\chi_1^k}{\chi^k\chi_2^k}f_1'' + \frac{\chi_2^k}{\chi_1^k\chi^k}f_2'',\end{aligned}$$

en remarquant que χ, χ_1, χ_2 doivent respectivement être changés en $-\chi_2$, $-\chi_1$, $-\chi$; pour simplifier, on n'a pas écrit l'indice 0. De même en permutant les indices 1 et 2

$$\begin{aligned}\frac{\chi_2^k}{\chi^k\chi_1^k}\left(-\frac{1}{\chi_1}+\frac{k}{\chi}\right)f_2'^2 &- \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}\left(\frac{1}{\chi_1}-\frac{k}{\chi_2}\right)f'^2 - k\,\frac{\chi_1^{k+1}}{\chi^{k+1}\chi_2^{k+1}}f_1'^2\\ &= -\frac{\chi_2^k}{\chi^k\chi_1^k}f_2'' + \frac{\chi^k}{\chi_1^k\chi_2^k}f''.\end{aligned}$$

Ajoutant ces trois équations membre à membre, les dérivées secondes f'', f''_1, f''_2 disparaissent et on a la condition (1). La condition $k = \frac{1}{2}$, que nous venons de trouver, équivaut à la relation, établie par Bonnet, entre les courbures principales des surfaces ([1]).

16. Pour avoir les fonctions f, il reste à intégrer deux équations du second ordre. Mais cette intégration n'est pas indispensable pour voir que le système est formé de surfaces homofocales du second degré. En effet, on a

$$A^2 = (f - f_1)(f_2 - f),$$
$$B^2 = (f_1 - f_2)(f - f_1),$$
$$C^2 = (f_2 - f)(f_1 - f_2).$$

Substituant ces valeurs dans les formules (1) et (1′) du n° 12, il vient, pour l'équation de la surface $\nu = 0$,

$$\zeta = \zeta_2 + \zeta_3 + \ldots + \zeta_n + \ldots$$
$$\zeta_2 = -\frac{f'_2}{4\rho}\left(\frac{\xi^2}{f_2 - f} - \frac{\eta^2}{f_1 - f_2}\right),$$
$$\zeta_3 = -\frac{f'_2}{8\sqrt{(f - f_1)(f_1 - f_2)(f_2 - f)}}\left(\frac{\xi^2}{f_2 - f} - \frac{\eta^2}{f_1 - f_2}\right)\left[\frac{\xi f'}{(f_2 - f)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\eta f'_1}{(f_1 - f_2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

ζ_3 s'annulant pour les mêmes valeurs de ξ, η que ζ_2, les lignes asymptotiques ont un contact du second ordre au moins avec leur tangente et du troisième ordre au moins avec leur plan osculateur. Ce fait se reproduisant tout le long d'une ligne asymptotique, celle-ci est une ligne droite. Les surfaces admettant deux systèmes de génératrices rectilignes sont des quadriques et on a le théorème de Lamé.

---

(1) *Journal de l'École Polytechnique*, XXX^e Cahier (1845).