C. RIQUIER

Sur la réduction des systèmes différentiels quelconques à une forme canonique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 259-285.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__259_0>

SUR LA RÉDUCTION

DES

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS QUELCONQUES

A UNE FORME CANONIQUE,

PAR M. C. RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

Dans diverses Notes communiquées à l'Académie des Sciences (1), et dans un Mémoire *in extenso* dont elle m'a fait l'honneur d'ordonner l'insertion au *Recueil de Mémoires des Savants étrangers* (2), j'ai établi que tout système différentiel peut, *sans changement de variables ni intégration*, se ramener à un autre composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes; 2° d'un groupe *orthonome* passif et linéaire du premier ordre où se trouvent engagées, avec les inconnues restantes, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes. L'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système, se trouve par là même immédiatement connue dans le système proposé, et, dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépend de fonctions arbitraires *en nombre fini*.

Cela posé, et un système orthonome passif et linéaire du premier

---

(1) Voir les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* des 28 mars 1892, 27 février 1893, 24 avril 1893.

(2) T. XXXII, n° 3. Voir aussi, dans les *Annales de l'École Normale*, deux Mémoires publiés en 1893 et une courte Note publiée en 1897.

ordre étant donné, on peut toujours, *par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes*, modifiant, il est vrai, l'économie des conditions initiales, le mettre sous une forme telle, que la recherche d'intégrales ordinaires répondant à des conditions initiales données s'y ramène à une recherche semblable exécutée successivement sur divers systèmes de forme très simple. Ce résultat a été communiqué à l'Académie des Sciences dans la séance du 8 mars 1897, et son exposition détaillée constitue l'objet du présent Mémoire.

1.

Je rappellerai tout d'abord la définition suivante :

Étant donné un système du premier ordre résolu par rapport à un certain nombre de dérivées, on peut, pour en disposer nettement les diverses équations, les écrire dans les cases d'un quadrillage rectangulaire dont les lignes correspondent aux variables indépendantes et les colonnes aux fonctions inconnues, en mettant l'équation qui aurait, par exemple, $\frac{du}{dx}$ pour premier membre, dans la case qui appartient à la fois à la colonne (u) et à la ligne (x). Parmi de semblables systèmes, je distinguerai spécialement ceux dont les lignes peuvent être rangées dans un ordre tel, qu'en faisant abstraction pour un instant des colonnes vides et des colonnes pleines, chacune des autres, parcourue de bas en haut, soit formée par la succession d'un fragment vide et d'un fragment plein : c'est, avec quelques restrictions en moins dans la définition, le type de système différentiel que nous avons étudié, M. Méray et moi, il y a quelques années [1], sous le nom de *système régulier;* il constitue, comme je l'ai établi dans le Mémoire cité plus haut [2], un cas très particulier du type que j'ai nommé *orthonome*.

Cela posé, *tout système orthonome, passif et linéaire du premier ordre*

---

[1] Méray et Riquier, *Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles partielles* (*Annales de l'École Normale*, 1890).

[2] *Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3, p. 10 et 11.

peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, se ramener à un système régulier, passif et linéaire du premier ordre, dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes du proposé.

I. Considérons un système orthonome et linéaire du premier ordre, et, dans le second membre de l'une quelconque des équations qui le composent, désignons le coefficient d'une dérivée paramétrique première par la lettre A affectée de quatre indices, deux indices inférieurs rappelant la dérivée principale première qui figure dans le premier membre correspondant, et deux indices supérieurs rappelant la dérivée paramétrique première que multiplie le coefficient considéré : par exemple, si $x, y, z, \ldots, u, v, w, q, \ldots$ désignent respectivement les variables indépendantes et les fonctions inconnues engagées dans le système donné, la notation A_{ux}^{vy} désignera, conformément à cette convention, le coefficient de $\frac{dv}{dy}$ dans le second membre d'une équation ayant pour premier membre $\frac{du}{dx}$.

Considérons maintenant un produit obtenu en multipliant entre eux quelques-uns de ces coefficients, et écrivons à la suite les uns des autres, sur une première ligne horizontale, tous leurs indices supérieurs, puis de même, sur une deuxième ligne horizontale, tous leurs indices inférieurs; cela posé, *si, abstraction faite de l'ordre de leurs lettres, les deux lignes ainsi obtenues sont identiques l'une à l'autre, le produit considéré ne peut manquer d'être identiquement nul en x, y, $z, \ldots, u, v, w, q, \ldots$.*

Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du produit

$$A_{vx}^{vy} A_{wx}^{ux} A_{uy}^{qx} A_{qz}^{wz}, \tag{1}$$

où les indices des facteurs satisfont évidemment à la condition indiquée; désignons par

$$\begin{array}{cccc} c_1^x, & c_2^x, & \ldots, & c_n^x, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ c_1^u, & c_2^u, & \ldots, & c_n^u, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

les cotes respectives des variables indépendantes et des fonctions inconnues; puis, formons les différences

$$\left\{\begin{array}{llll}
(c_1^v + c_1^x) - (c_1^v + c_1^y), & (c_2^v + c_2^x) - (c_2^v + c_2^y), & \ldots, & (c_n^v + c_n^x) - (c_n^v + c_n^y), \\
(c_1^w + c_1^x) - (c_1^u + c_1^x), & (c_2^w + c_2^x) - (c_2^u + c_2^x), & \ldots, & (c_n^w + c_n^x) - (c_n^u + c_n^x), \\
(c_1^u + c_1^y) - (c_1^q + c_1^x), & (c_2^u + c_2^y) - (c_2^q + c_2^x), & \ldots, & (c_n^u + c_n^y) - (c_n^q + c_n^x), \\
(c_1^q + c_1^z) - (c_1^w + c_1^z), & (c_2^q + c_2^z) - (c_2^w + c_2^z), & \ldots, & (c_n^q + c_n^z) - (c_n^w + c_n^z),
\end{array}\right.$$

qui existent respectivement entre les cotes des dérivées

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{dw}{dx}, \quad \frac{du}{dy}, \quad \frac{dq}{dz},$$

et celles des dérivées

$$\frac{dv}{dy}, \quad \frac{du}{dx}, \quad \frac{dq}{dx}, \quad \frac{dw}{dz}.$$

Si le produit (1) n'était pas identiquement nul en $x, y, z, \ldots, u, v, w, g, \ldots$, aucun de ses quatre facteurs ne le serait non plus; il résulte alors de l'orthonomie du système que, dans chacune des quatre lignes (2), les différences ne seraient pas toutes nulles, et que, dans chacune d'elles, la première différence non égale à zéro serait positive : la ligne obtenue en ajoutant les lignes (2) par colonnes verticales jouirait donc, elle aussi, de cette propriété, et l'on aurait, pour quelque valeur de l'indice i,

$$c_i^v + c_i^x + c_i^w + c_i^x + c_i^u + c_i^y + c_i^q + c_i^z > c_i^v + c_i^y + c_i^u + c_i^x + c_i^q + c_i^x + c_i^w + c_i^z,$$

inégalité impossible, puisque, en vertu de notre hypothèse, ses deux membres se composent respectivement des mêmes termes à l'ordre près.

II. *Tout système orthonome et linéaire du premier ordre peut, par un simple changement linéaire et homogène des variables indépendantes, se ramener à un système régulier et linéaire du premier ordre, dont les colonnes contiennent respectivement les mêmes nombres d'équations que les colonnes correspondantes du proposé.*

Pour rendre ce point plus aisément saisissable, nous raisonnerons sur des exemples (¹).

A. Considérons le système orthonome

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dx} = A_{ux}^{uy}\dfrac{du}{dy} + A_{ux}^{vy}\dfrac{dv}{dy} + A_{ux}^{wy}\dfrac{dw}{dy} + A_{ux}^{px}\dfrac{dp}{dx} + A_{ux}^{qx}\dfrac{dq}{dx} + A_{ux}, \\ \dfrac{dv}{dx} = A_{vx}^{uy}\dfrac{du}{dy} + A_{vx}^{vy}\dfrac{dv}{dy} + A_{vx}^{wy}\dfrac{dw}{dy} + A_{vx}^{px}\dfrac{dp}{dx} + A_{vx}^{qx}\dfrac{dq}{dx} + A_{vx}, \\ \dfrac{dw}{dx} = A_{wx}^{uy}\dfrac{du}{dy} + A_{wx}^{vy}\dfrac{dv}{dy} + A_{wx}^{wy}\dfrac{dw}{dy} + A_{wx}^{px}\dfrac{dp}{dx} + A_{wx}^{qx}\dfrac{dq}{dx} + A_{wx}, \\ \dfrac{dp}{dy} = A_{py}^{uy}\dfrac{du}{dy} + A_{py}^{vy}\dfrac{dv}{dy} + A_{py}^{wy}\dfrac{dw}{dy} + A_{py}^{px}\dfrac{dp}{dx} + A_{py}^{qx}\dfrac{dq}{dx} + A_{py}, \\ \dfrac{dq}{dy} = A_{qy}^{uy}\dfrac{du}{dy} + A_{qy}^{vy}\dfrac{dv}{dy} + A_{qy}^{wy}\dfrac{dw}{dy} + A_{qy}^{px}\dfrac{dp}{dx} + A_{qy}^{qx}\dfrac{dq}{dx} + A_{qy}, \end{cases}$$

où u, v, w, p, q désignent cinq fonctions inconnues des deux variables indépendantes x et y.

	u	v	w	p	q
x	$\dfrac{du}{dx}=\ldots$	$\dfrac{dv}{dx}=\ldots$	$\dfrac{dw}{dx}=\ldots$		
y				$\dfrac{dp}{dy}=\ldots$	$\dfrac{dq}{dy}=\ldots$

Si, dans le système (3), on effectue la transformation

$$x' = \alpha_1 x + \beta_1 y,$$
$$y' = \alpha_2 x + \beta_2 y,$$

(¹) Le lecteur est prié de tracer pour chaque exemple, comme nous le faisons pour l'exemple *A*, le Tableau quadrillé qui correspond au système proposé, et celui qui correspond au système transformé mis sous forme régulière.

où x', y' désignent les nouvelles variables indépendantes, et α_1, β_1, α_2, β_2 des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$(4) \qquad \frac{du}{dx'}, \frac{dv}{dx'}, \frac{dw}{dx'}, \frac{dp}{dx'}, \frac{dq}{dx'}$$

a pour valeur

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \beta_1 A_{ux}^{uy} - \alpha_1 & \beta_1 A_{ux}^{vy} & \beta_1 A_{ux}^{wy} & \alpha_1 A_{ux}^{px} & \alpha_1 A_{ux}^{qx} \\ \beta_1 A_{vx}^{uy} & \beta_1 A_{vx}^{vy} - \alpha_1 & \beta_1 A_{vx}^{wy} & \alpha_1 A_{vx}^{px} & \alpha_1 A_{vx}^{qx} \\ \beta_1 A_{wx}^{uy} & \beta_1 A_{wx}^{vy} & \beta_1 A_{wx}^{wy} - \alpha_1 & \alpha_1 A_{wx}^{px} & \alpha_1 A_{wx}^{qx} \\ \beta_1 A_{py}^{uy} & \beta_1 A_{py}^{vy} & \beta_1 A_{py}^{wy} & \alpha_1 A_{py}^{px} - \beta_1 & \alpha_1 A_{py}^{qx} \\ \beta_1 A_{qy}^{uy} & \beta_1 A_{qy}^{vy} & \beta_1 A_{qy}^{wy} & \alpha_1 A_{qy}^{px} & \alpha_1 A_{qy}^{qx} - \beta_1 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant (5) peut être considéré comme une fonction, soit des quantités

$$(6) \qquad \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ x,\ y,\ u,\ v,\ w,\ p,\ q,$$

soit des quantités

$$(7) \qquad \alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ x',\ y',\ u,\ v,\ w,\ p,\ q.$$

Considérons-le actuellement comme une fonction des quantités (6), et supposons établi, ce qui fera l'objet de la démonstration ci-après, que, pour toutes valeurs particulières de x, y, u, v, w, p, q, considérées comme initiales, on tombe sur une fonction non identiquement nulle de α_1, β_1, α_2, β_2; on pourra alors, en considérant le déterminant (5) comme une fonction des quantités (7), trouver, pour α_1, β_1, α_2, β_2, des valeurs numériques qui laissent différents de zéro, et le déterminant (5) dans le voisinage des valeurs initiales de x', y', u, v, w, p, q, et le déterminant $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ des formules de la transformation; le système transformé pourra donc être résolu par rapport aux dérivées (4) et, par suite, être mis sous forme régulière.

	u	v	w	p	q
x'	$\dfrac{du}{dx'} = \ldots$	$\dfrac{dv}{dx'} = \ldots$	$\dfrac{dw}{dx'} = \ldots$	$\dfrac{dp}{dx'} = \ldots$	$\dfrac{dq}{dx'} = \ldots$
y'					

Or nous allons effectivement faire voir que, dans le déterminant (5), considéré comme fonction des quantités (6) et ordonné par rapport aux coefficients de la transformation, le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1^3 \beta_1^2$, se réduit à ± 1.

Observons à cet effet que chaque colonne du déterminant (5) peut être décomposée en deux sous-colonnes ayant pour éléments : la première, les produits de α_1 par de simples fonctions des quantités x, y, u, v, w, p, q, la seconde, les produits de β_1 par des fonctions de ces mêmes quantités; nous les appellerons, pour abréger, la *sous-colonne* (α_1) et la *sous-colonne* (β_1). Cela étant, on remplacera, dans le déterminant (5), trois des colonnes par leurs sous-colonnes (α_1) et les deux colonnes restantes par leurs sous-colonnes (β_1), on répétera cette opération de toutes les manières possibles, et l'addition de tous les déterminants ainsi formés donnera évidemment le terme cherché. Ces déterminants sont au nombre de dix et correspondent aux combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{lllll}
(\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1), & (\alpha_1); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_1).
\end{array}$$

En conséquence, le coefficient du terme en $\alpha_1^3 \beta_1^2$ est la somme des dix déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}
A^{uy}_{ux} & A^{vy}_{ux} & 0 & A^{px}_{ux} & A^{qx}_{ux} \\
A^{uy}_{vx} & A^{vy}_{vx} & 0 & A^{px}_{vx} & A^{qx}_{vx} \\
A^{uy}_{wx} & A^{vy}_{wx} & -1 & A^{px}_{wx} & A^{qx}_{wx} \\
A^{uy}_{py} & A^{vy}_{py} & 0 & A^{px}_{py} & A^{qx}_{py} \\
A^{uy}_{qy} & A^{vy}_{qy} & 0 & A^{px}_{qy} & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
A^{uy}_{ux} & 0 & A^{wy}_{ux} & A^{px}_{ux} & A^{qx}_{ux} \\
A^{uy}_{vx} & -1 & A^{wy}_{vx} & A^{px}_{vx} & A^{qx}_{vx} \\
A^{uy}_{wx} & 0 & A^{wy}_{wx} & A^{px}_{wx} & A^{qx}_{wx} \\
A^{uy}_{py} & 0 & A^{wy}_{py} & A^{px}_{py} & A^{qx}_{py} \\
A^{uy}_{qy} & 0 & A^{wy}_{qy} & A^{px}_{qy} & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
A^{uy}_{ux} & 0 & 0 & 0 & A^{qx}_{ux} \\
A^{uy}_{vx} & -1 & 0 & 0 & A^{qx}_{vx} \\
A^{uy}_{wx} & 0 & -1 & 0 & A^{qx}_{wx} \\
A^{uy}_{py} & 0 & 0 & -1 & A^{qx}_{py} \\
A^{uy}_{qy} & 0 & 0 & 0 & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
A^{uy}_{ux} & 0 & 0 & A^{px}_{ux} & 0 \\
A^{uy}_{vx} & -1 & 0 & A^{px}_{vx} & 0 \\
A^{uy}_{wx} & 0 & -1 & A^{px}_{wx} & 0 \\
A^{uy}_{py} & 0 & 0 & A^{px}_{py} & 0 \\
A^{uy}_{qy} & 0 & 0 & A^{px}_{qy} & -1
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
-1 & A^{vy}_{ux} & A^{wy}_{ux} & A^{px}_{ux} & A^{qx}_{ux} \\
0 & A^{vy}_{vx} & A^{wy}_{vx} & A^{px}_{vx} & A^{qx}_{vx} \\
0 & A^{vy}_{wx} & A^{wy}_{wx} & A^{px}_{wx} & A^{qx}_{wx} \\
0 & A^{vy}_{py} & A^{wy}_{py} & A^{px}_{py} & A^{qx}_{py} \\
0 & A^{vy}_{qy} & A^{wy}_{qy} & A^{px}_{qy} & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
-1 & A^{vy}_{ux} & 0 & 0 & A^{qx}_{ux} \\
0 & A^{vy}_{vx} & 0 & 0 & A^{qx}_{vx} \\
0 & A^{vy}_{wx} & -1 & 0 & A^{qx}_{wx} \\
0 & A^{vy}_{py} & 0 & -1 & A^{qx}_{py} \\
0 & A^{vy}_{qy} & 0 & 0 & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
-1 & A^{vy}_{ux} & 0 & A^{px}_{ux} & 0 \\
0 & A^{vy}_{vx} & 0 & A^{px}_{vx} & 0 \\
0 & A^{vy}_{wx} & -1 & A^{px}_{wx} & 0 \\
0 & A^{vy}_{py} & 0 & A^{px}_{py} & 0 \\
0 & A^{vy}_{qy} & 0 & A^{px}_{qy} & -1
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & A^{wy}_{ux} & 0 & A^{qx}_{ux} \\
0 & -1 & A^{wy}_{vx} & 0 & A^{qx}_{vx} \\
0 & 0 & A^{wy}_{wx} & 0 & A^{qx}_{wx} \\
0 & 0 & A^{wy}_{py} & -1 & A^{qx}_{py} \\
0 & 0 & A^{wy}_{qy} & 0 & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}
-1 & 0 & A^{wy}_{ux} & A^{px}_{ux} & 0 \\
0 & -1 & A^{wy}_{vx} & A^{px}_{vx} & 0 \\
0 & 0 & A^{wy}_{wx} & A^{px}_{wx} & 0 \\
0 & 0 & A^{wy}_{py} & A^{px}_{py} & 0 \\
0 & 0 & A^{wy}_{qy} & A^{px}_{qy} & -1
\end{vmatrix}, \quad
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix}.$$

De ces dix déterminants, le premier se réduit à

$$-\begin{vmatrix}
A^{uy}_{ux} & A^{vy}_{ux} & A^{px}_{ux} & A^{qx}_{ux} \\
A^{uy}_{vx} & A^{vy}_{vx} & A^{px}_{vx} & A^{qx}_{vx} \\
A^{uy}_{py} & A^{vy}_{py} & A^{px}_{py} & A^{qx}_{py} \\
A^{uy}_{qy} & A^{vy}_{qy} & A^{px}_{qy} & A^{qx}_{qy}
\end{vmatrix};$$

au signe près, chacun de ces termes s'obtient, comme on sait, en prenant un élément, et un seul, dans chaque ligne et dans chaque colonne, et faisant le produit de ces quatre éléments; or, les éléments du déterminant sont affectés, dans les lignes successives, des indices inférieurs

$$ux,\quad vx,\quad py,\quad qy,\tag{8}$$

et, dans les colonnes successives, des indices supérieurs

$$uy,\quad vy,\quad px,\quad qx;\tag{9}$$

si donc on observe que les indices supérieurs (9) sont les mêmes, à l'ordre près, que les indices inférieurs (8), on voit immédiatement, en vertu de l'alinéa I, que tous les termes du déterminant sont identiquement nuls, et, par suite, le déterminant lui-même.

Ainsi, le premier de nos dix déterminants est identiquement nul, et l'on ferait une démonstration analogue pour chacun des autres, abstraction faite du dernier qui se réduit évidemment à -1. Donc, la somme de nos dix déterminants se réduit bien à ± 1, comme nous voulions l'établir.

B. Considérons le système orthonome

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A_{ux}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{ux}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{ux}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{ux}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ux}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{ux}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{ux}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{ux}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{ux},\\
\frac{du}{dy} &= A_{uy}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{uy}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{uy}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uy}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{uy}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{uy}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{uy}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{uy},\\
\frac{du}{dz} &= A_{uz}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{uz}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{uz}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{uz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uz}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{uz}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{uz}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{uz}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{uz},\\
\frac{du}{ds} &= A_{us}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{us}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{us}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{us}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{us}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{us}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{us}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{us}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{us},\\
\frac{du}{dt} &= A_{ut}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{ut}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{ut}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{ut}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ut}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{ut}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{ut}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{ut}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{ut},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{vx}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{vx}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{vx}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{vx}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{vx}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{vx},\\
\frac{dv}{d\lambda} &= A_{v\lambda}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{v\lambda}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{v\lambda}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{v\lambda}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{v\lambda}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{v\lambda}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{v\lambda}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{v\lambda}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{v\lambda},\\
\frac{dv}{d\mu} &= A_{v\mu}^{u\lambda}\frac{du}{d\lambda} + A_{v\mu}^{u\mu}\frac{du}{d\mu} + A_{v\mu}^{u\rho}\frac{du}{d\rho} + A_{v\mu}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{v\mu}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{v\mu}^{vs}\frac{dv}{ds} + A_{v\mu}^{vt}\frac{dv}{dt} + A_{v\mu}^{v\rho}\frac{dv}{d\rho} + A_{v\mu},
\end{aligned}\right.$$

où u, v désignent deux fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z, s, t, λ, μ, ρ.

Si dans le système (10) on effectue la transformation

$$\begin{aligned}
x' &= x ,\\
y' &= \alpha_1 y + \beta_1 z + \gamma_1 s + \delta_1 t + \varepsilon_1 \lambda + \theta_1 \mu ,\\
z' &= \alpha_2 y + \beta_2 z + \gamma_2 s + \delta_2 t + \varepsilon_2 \lambda + \theta_2 \mu ,\\
s' &= \alpha_3 y + \beta_3 z + \gamma_3 s + \delta_3 t + \varepsilon_3 \lambda + \theta_3 \mu ,\\
t' &= \alpha_4 y + \beta_4 z + \gamma_4 s + \delta_4 t + \varepsilon_4 \lambda + \theta_4 \mu ,\\
\lambda' &= \alpha_5 y + \beta_5 z + \gamma_5 s + \delta_5 t + \varepsilon_5 \lambda + \theta_5 \mu ,\\
\mu' &= \alpha_6 y + \beta_6 z + \gamma_6 s + \delta_6 t + \varepsilon_6 \lambda + \theta_6 \mu ,\\
\rho' &= \rho,
\end{aligned}$$

où x', y', z', s', t', λ', μ', ρ' désignent les nouvelles variables indépendantes, et

$$(11) \qquad \left\{\begin{matrix}
\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, & \delta_1, & \varepsilon_1, & \theta_1,\\
\alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2, & \varepsilon_2, & \theta_2,\\
\alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3, & \varepsilon_3, & \theta_3,\\
\alpha_4, & \beta_4, & \gamma_4, & \delta_4, & \varepsilon_4, & \theta_4,\\
\alpha_5, & \beta_5, & \gamma_5, & \delta_5, & \varepsilon_5, & \theta_5,\\
\alpha_6, & \beta_6, & \gamma_6, & \delta_6, & \varepsilon_6, & \theta_6
\end{matrix}\right.$$

des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'}, \quad \frac{du}{dy'}, \quad \frac{du}{dz'}, \quad \frac{du}{ds'}, \quad \frac{du}{dt'}, \quad \frac{dv}{dx'}, \quad \frac{dv}{dy'}, \quad \frac{dv}{dz'}$$

se réduit immédiatement, grâce à la nullité d'un certain nombre d'éléments, à un déterminant du sixième ordre ayant pour colonnes verticales successives

$$
\begin{array}{|llll}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_1 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_2 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_3 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{uy} + \theta_4 A^{u\mu}_{uy} - \alpha_4,\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_1 A^{u\mu}_{uz} - \beta_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_3 A^{u\mu}_{uz} - \beta_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{uz} + \theta_4 A^{u\mu}_{uz} - \beta_4,\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{us} + \theta_1 A^{u\mu}_{us} - \gamma_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{us} + \theta_2 A^{u\mu}_{us} - \gamma_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{us} + \theta_3 A^{u\mu}_{us} - \gamma_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{us} + \theta_4 A^{u\mu}_{us} - \gamma_4,\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_1 A^{u\mu}_{ut} - \delta_1, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_2 A^{u\mu}_{ut} - \delta_2, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_3 A^{u\mu}_{ut} - \delta_3, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{ut} + \theta_4 A^{u\mu}_{ut} - \delta_4,\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_1 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_5 A^{u\mu}_{v\lambda}, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{v\lambda} + \theta_4 A^{u\mu}_{v\lambda},\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_1 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_2 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_3 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_3 A^{u\mu}_{v\mu}, & \varepsilon_4 A^{u\lambda}_{v\mu} + \theta_4 A^{u\mu}_{v\mu},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{|ll}
\alpha_1 A^{vy}_{uy} + \beta_1 A^{vz}_{uy} + \gamma_1 A^{vs}_{uy} + \delta_1 A^{vt}_{uy}, & \alpha_2 A^{vy}_{uy} + \beta_2 A^{vz}_{uy} + \gamma_2 A^{vs}_{uy} + \delta_2 A^{vt}_{uy},\\
\alpha_1 A^{vy}_{uz} + \beta_1 A^{vz}_{uz} + \gamma_1 A^{vs}_{uz} + \delta_1 A^{vt}_{uz}, & \alpha_2 A^{vy}_{uz} + \beta_2 A^{vz}_{uz} + \gamma_2 A^{vs}_{uz} + \delta_2 A^{vt}_{uz},\\
\alpha_1 A^{vy}_{us} + \beta_1 A^{vz}_{us} + \gamma_1 A^{vs}_{us} + \delta_1 A^{vt}_{us}, & \alpha_2 A^{vy}_{us} + \beta_2 A^{vz}_{us} + \gamma_2 A^{vs}_{us} + \delta_2 A^{vt}_{us},\\
\alpha_1 A^{vy}_{ut} + \beta_1 A^{vz}_{ut} + \gamma_1 A^{vs}_{ut} + \delta_1 A^{vt}_{ut}, & \alpha_2 A^{vy}_{ut} + \beta_2 A^{vz}_{ut} + \gamma_2 A^{vs}_{ut} + \delta_2 A^{vt}_{ut},\\
\alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} + \beta_1 A^{vz}_{v\lambda} + \gamma_1 A^{vs}_{v\lambda} + \delta_1 A^{vt}_{v\lambda} - \varepsilon_1, & \alpha_2 A^{vy}_{v\lambda} + \beta_2 A^{vz}_{v\lambda} + \gamma_2 A^{vs}_{v\lambda} + \delta_2 A^{vt}_{v\lambda} - \varepsilon_2,\\
\alpha_1 A^{vy}_{v\mu} + \beta_1 A^{vz}_{v\mu} + \gamma_1 A^{vs}_{v\mu} + \delta_1 A^{vt}_{v\mu} - \theta_1, & \alpha_2 A^{vy}_{v\mu} + \beta_2 A^{vz}_{v\mu} + \gamma_2 A^{vs}_{v\mu} + \delta_2 A^{vt}_{v\mu} - \theta_2.
\end{array}
$$

Il s'agit de prouver que dans ce déterminant, considéré comme fonction de $x, y, z, s, t, \lambda, \mu, \rho, u, v$ et des quantités (11), et ordonné par rapport aux quantités (11), le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4\varepsilon_1\theta_2$, se réduit à ± 1. Or, pour évaluer le coefficient en question, il est évidemment permis de remplacer par zéro toutes les quantités (11) à l'exception de α_1, β_2, γ_3, δ_4, ε_1, θ_2; le déterminant (12) se réduit alors au suivant :

$$
\begin{vmatrix}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} - \alpha_1 & \theta_2 A^{u\mu}_{uy} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{uy} & \beta_2 A^{vz}_{uy}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} & \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2 & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{uz} & \beta_2 A^{vz}_{uz}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{us} & \theta_2 A^{u\mu}_{us} & -\gamma_3 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{us} & \beta_2 A^{vz}_{us}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{ut} & \theta_2 A^{u\mu}_{ut} & 0 & -\delta_4 & \alpha_1 A^{vy}_{ut} & \beta_2 A^{vz}_{ut}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} - \varepsilon_1 & \beta_2 A^{vz}_{v\lambda}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu} & 0 & 0 & \alpha_1 A^{vy}_{v\mu} & \beta_2 A^{vz}_{v\mu} - \theta_2
\end{vmatrix},
$$

c'est-à-dire au produit de $\gamma_3\delta_4$ par le déterminant

$$
(13)\qquad
\begin{vmatrix}
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uy} - \alpha_1 & \theta_2 A^{u\mu}_{uy} & \alpha_1 A^{vy}_{uy} & \beta_2 A^{vz}_{uy}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{uz} & \theta_2 A^{u\mu}_{uz} - \beta_2 & \alpha_1 A^{vy}_{uz} & \beta_2 A^{vz}_{uz}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\lambda} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\lambda} & \alpha_1 A^{vy}_{v\lambda} - \varepsilon_1 & \beta_2 A^{vz}_{v\lambda}\\
\varepsilon_1 A^{u\lambda}_{v\mu} & \theta_2 A^{u\mu}_{v\mu} & \alpha_1 A^{vy}_{v\mu} & \beta_2 A^{vz}_{v\mu} - \theta_2
\end{vmatrix}.
$$

Dans le déterminant (13), comme dans le déterminant (5), chaque colonne peut être décomposée en deux sous-colonnes, et il nous suffira, pour obtenir le coefficient cherché, d'ajouter ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$
\begin{array}{llll}
(\alpha_1), & (\beta_2), & (\varepsilon_1), & (\theta_2); \\
(\alpha_1), & (\theta_2), & (\varepsilon_1), & (\beta_2); \\
(\varepsilon_1), & (\beta_2), & (\alpha_1), & (\theta_2); \\
(\varepsilon_1), & (\theta_2), & (\alpha_1), & (\beta_2).
\end{array}
$$

On a ainsi à faire la somme des quatre déterminants

$$
\begin{vmatrix}
-1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
-1 & A^{u\mu}_{uy} & 0 & A^{vz}_{uy} \\
0 & A^{u\mu}_{uz} & 0 & A^{vz}_{uz} \\
0 & A^{u\mu}_{v\lambda} & -1 & A^{vz}_{v\lambda} \\
0 & A^{u\mu}_{v\mu} & 0 & A^{vz}_{v\mu}
\end{vmatrix},
$$

$$
\begin{vmatrix}
A^{u\lambda}_{uy} & 0 & A^{vy}_{uy} & 0 \\
A^{u\lambda}_{uz} & -1 & A^{vy}_{uz} & 0 \\
A^{u\lambda}_{v\lambda} & 0 & A^{vy}_{v\lambda} & 0 \\
A^{u\lambda}_{v\mu} & 0 & A^{vy}_{v\mu} & -1
\end{vmatrix},
\qquad
\begin{vmatrix}
A^{u\lambda}_{uy} & A^{u\mu}_{uy} & A^{vy}_{uy} & A^{vz}_{uy} \\
A^{u\lambda}_{uz} & A^{u\mu}_{uz} & A^{vy}_{uz} & A^{vz}_{uz} \\
A^{u\lambda}_{v\lambda} & A^{u\mu}_{v\lambda} & A^{vy}_{v\lambda} & A^{vz}_{v\lambda} \\
A^{u\lambda}_{v\mu} & A^{u\mu}_{v\mu} & A^{vy}_{v\mu} & A^{vz}_{v\mu}
\end{vmatrix},
$$

dont le premier se réduit évidemment à 1, et dont les trois autres sont identiquement nuls en vertu d'un raisonnement tout semblable à celui que nous avons déjà fait dans l'exemple *A*. Le coefficient du terme considéré dans le déterminant (12) se réduit donc bien à ± 1, comme nous voulions l'établir.

C. Considérons le système orthonome

$$
(14) \qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dy} &= A^{ux}_{uy}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{uy}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{uy}\frac{dw}{dz} + A_{uy}, \\
\frac{du}{dz} &= A^{ux}_{uz}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{uz}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{uz}\frac{dw}{dz} + A_{uz}, \\
\frac{dv}{dx} &= A^{ux}_{vx}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{vx}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{vx}\frac{dw}{dz} + A_{vx}, \\
\frac{dv}{dz} &= A^{ux}_{vz}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{vz}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{vz}\frac{dw}{dz} + A_{vz}, \\
\frac{dw}{dx} &= A^{ux}_{wx}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{wx}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{wx}\frac{dw}{dz} + A_{wx}, \\
\frac{dw}{dy} &= A^{ux}_{wy}\frac{du}{dx} + A^{vy}_{wy}\frac{dv}{dy} + A^{wz}_{wy}\frac{dw}{dz} + A_{wy},
\end{aligned}
\right.
$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Si, dans le système (14), on effectue la transformation

$$(15)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ y' = \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ z' = \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \end{cases}$$

où x', y', z' désignent les nouvelles variables indépendantes et

$$(16)\qquad \begin{cases} \alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1, \\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2, \\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3 \end{cases}$$

des constantes provisoirement indéterminées, le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'}, \quad \frac{dv}{dx'}, \quad \frac{dw}{dx'}, \quad \frac{du}{dy'}, \quad \frac{dv}{dy'}, \quad \frac{dw}{dy'}$$

a pour valeur

$$(17)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 A^{ux}_{uy} - \beta_1 & \beta_1 A^{vy}_{uy} & \gamma_1 A^{wz}_{uy} & \alpha_2 A^{ux}_{uy} - \beta_2 & \beta_2 A^{vy}_{uy} & \gamma_2 A^{wz}_{uy} \\ \alpha_1 A^{ux}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_2 A^{ux}_{uz} - \gamma_2 & \beta_2 A^{vy}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz} \\ \alpha_1 A^{ux}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_2 A^{ux}_{vx} & \beta_2 A^{vy}_{vx} - \alpha_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vx} \\ \alpha_1 A^{ux}_{vz} & \beta_1 A^{vy}_{vz} - \gamma_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vz} & \alpha_2 A^{ux}_{vz} & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vz} \\ \alpha_1 A^{ux}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_2 A^{ux}_{wx} & \beta_2 A^{vy}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2 \\ \alpha_1 A^{ux}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} & \gamma_1 A^{wz}_{wy} - \beta_1 & \alpha_2 A^{ux}_{wy} & \beta_2 A^{vy}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Il s'agit de prouver que dans ce déterminant, considéré comme fonction de x, y, z, u, v, w et des quantités (16), et ordonné par rapport aux quantités (16), le coefficient d'un terme convenablement choisi, par exemple du terme en $\alpha_1^2 \beta_1 \beta_2 \gamma_2^2$, se réduit à ± 1. Or, pour évaluer le coefficient en question, il est évidemment permis de remplacer γ_1 et α_2 par zéro; le déterminant (17) se réduit alors au suivant :

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 A^{ux}_{uy} - \beta_1 & \beta_1 A^{vy}_{uy} & 0 & -\beta_2 & \beta_2 A^{vy}_{uy} & \gamma_2 A^{wz}_{uy} \\ \alpha_1 A^{ux}_{uz} & \beta_1 A^{vy}_{uz} & 0 & -\gamma_2 & \beta_2 A^{vy}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz} \\ \alpha_1 A^{ux}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} - \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{vx} & \gamma_2 A^{wz}_{vx} \\ \alpha_1 A^{ux}_{vz} & \beta_1 A^{vy}_{vz} & 0 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2 & \gamma_2 A^{wz}_{vz} \\ \alpha_1 A^{ux}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} & -\alpha_1 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx} \\ \alpha_1 A^{ux}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} & -\beta_1 & 0 & \beta_2 A^{vy}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2 \end{vmatrix}.$$

Dans le déterminant (18), chaque colonne peut, comme dans les déterminants (5) et (13), être décomposée en deux sous-colonnes, et il nous suffira, pour obtenir le coefficient cherché, d'ajouter ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$
\begin{array}{llllll}
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1) & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\beta_2), & (\gamma_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_2), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_2), & (\gamma_2), & (\beta_2).
\end{array}
$$

Des neuf déterminants ainsi formés, le troisième se réduit à ± 1, et les huit autres s'annulent, soit comme ayant deux colonnes identiques, soit en vertu du raisonnement déjà fait dans les exemples *A* et *B*.

D. Considérons le système orthonome

$$
(19)\quad \left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= \mathrm{A}_{ux}^{uy}\frac{du}{dy} + \mathrm{A}_{ux}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{ux}^{vx}\frac{dv}{dx} + \mathrm{A}_{ux}^{vz}\frac{dv}{dz} + \mathrm{A}_{ux}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{ux}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{ux}, \\
\frac{dv}{dy} &= \mathrm{A}_{vy}^{uy}\frac{du}{dy} + \mathrm{A}_{vy}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{vy}^{vx}\frac{dv}{dx} + \mathrm{A}_{vy}^{vz}\frac{dv}{dz} + \mathrm{A}_{vy}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{vy}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{vy}, \\
\frac{dw}{dz} &= \mathrm{A}_{wz}^{uy}\frac{du}{dy} + \mathrm{A}_{wz}^{uz}\frac{du}{dz} + \mathrm{A}_{wz}^{vx}\frac{dv}{dx} + \mathrm{A}_{wz}^{vz}\frac{dv}{dz} + \mathrm{A}_{wz}^{wx}\frac{dw}{dx} + \mathrm{A}_{wz}^{wy}\frac{dw}{dy} + \mathrm{A}_{wz},
\end{aligned}
\right.
$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Si, dans le système (19), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'}, \quad \frac{dv}{dx'}, \quad \frac{dw}{dx'}$$

a pour valeur

$$
\begin{vmatrix}
\beta_1\mathrm{A}_{ux}^{uy} + \gamma_1\mathrm{A}_{ux}^{uz} - \alpha_1 & \alpha_1\mathrm{A}_{ux}^{vx} + \gamma_1\mathrm{A}_{ux}^{vz} & \alpha_1\mathrm{A}_{ux}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{ux}^{wy} \\
\beta_1\mathrm{A}_{vy}^{uy} + \gamma_1\mathrm{A}_{vy}^{uz} & \alpha_1\mathrm{A}_{vy}^{vx} + \gamma_1\mathrm{A}_{vy}^{vz} - \beta_1 & \alpha_1\mathrm{A}_{vy}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{vy}^{wy} \\
\beta_1\mathrm{A}_{wz}^{uy} + \gamma_1\mathrm{A}_{wz}^{uz} & \alpha_1\mathrm{A}_{wz}^{vx} + \gamma_1\mathrm{A}_{wz}^{vz} & \alpha_1\mathrm{A}_{wz}^{wx} + \beta_1\mathrm{A}_{wz}^{wy} - \gamma_1
\end{vmatrix},
$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à α_1, β_1, γ_1, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1\beta_1\gamma_1$; on remarquera, à cet effet, que chaque colonne peut être décomposée en trois sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{llllll}
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_1); & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1);\\
(\alpha_1), & (\gamma_1), & (\beta_1); & (\beta_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1);\\
(\gamma_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); & (\gamma_1), & (\beta_1), & (\alpha_1);
\end{array}$$

ces six déterminants sont nuls, à l'exception d'un seul qui se réduit à ± 1.

E. Considérons le système orthonome

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{du}{dx} &= A_{ux}^{uz}\frac{du}{dz} + A_{ux}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{ux}^{wx}\frac{dw}{dx} + A_{ux}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{ux},\\
\frac{du}{dy} &= A_{uy}^{uz}\frac{du}{dz} + A_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uy}^{wx}\frac{dw}{dx} + A_{uy}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{uy},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{uz}\frac{du}{dz} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{wx}\frac{dw}{dx} + A_{vx}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{vx},\\
\frac{dv}{dz} &= A_{vz}^{uz}\frac{du}{dz} + A_{vz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vz}^{wx}\frac{dw}{dx} + A_{vz}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{vz},\\
\frac{dw}{dz} &= A_{wz}^{uz}\frac{du}{dz} + A_{wz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wz}^{wx}\frac{dw}{dx} + A_{wz}^{wy}\frac{dw}{dy} + A_{wz},
\end{aligned}\right.$$

où u, v, w désignent trois fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Si, dans le système (20), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport aux dérivées

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{dv}{dy'}$$

a pour valeur

$$\begin{vmatrix}
\gamma_1 A_{ux}^{uz} - \alpha_1 & \beta_1 A_{ux}^{vy} & \alpha_1 A_{ux}^{wx} + \beta_1 A_{ux}^{wy} & \gamma_2 A_{ux}^{uz} - \alpha_2 & \beta_2 A_{ux}^{vy}\\
\gamma_1 A_{uy}^{uz} - \beta_1 & \beta_1 A_{uy}^{vy} & \alpha_1 A_{uy}^{wx} + \beta_1 A_{uy}^{wy} & \gamma_2 A_{uy}^{uz} - \beta_2 & \beta_2 A_{uy}^{vy}\\
\gamma_1 A_{vx}^{uz} & \beta_1 A_{vx}^{vy} - \alpha_1 & \alpha_1 A_{vx}^{wx} + \beta_1 A_{vx}^{wy} & \gamma_2 A_{vx}^{uz} & \beta_2 A_{vx}^{vy} - \alpha_2\\
\gamma_1 A_{vz}^{uz} & \beta_1 A_{vz}^{vy} - \gamma_1 & \alpha_1 A_{vz}^{wx} + \beta_1 A_{vz}^{wy} & \gamma_2 A_{vz}^{uz} & \beta_2 A_{vz}^{vy} - \gamma_2\\
\gamma_1 A_{wz}^{uz} & \beta_1 A_{wz}^{vy} & \alpha_1 A_{wz}^{wx} + \beta_1 A_{wz}^{wy} - \gamma_1 & \gamma_2 A_{wz}^{uz} & \beta_2 A_{wz}^{vy}
\end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^2\gamma_1\beta_2\gamma_2$. A cet effet, on y remplacera β_1 et α_2 par zéro, ce qui donnera

$$\begin{vmatrix} \gamma_1 A_{ux}^{uz} - \alpha_1 & 0 & \alpha_1 A_{ux}^{wx} & \gamma_2 A_{ux}^{uz} & \beta_2 A_{ux}^{vy} \\ \gamma_1 A_{uy}^{uz} & 0 & \alpha_1 A_{uy}^{wx} & \gamma_2 A_{uy}^{uz} - \beta_2 & \beta_2 A_{uy}^{vy} \\ \gamma_1 A_{vx}^{uz} & -\alpha_1 & \alpha_1 A_{vx}^{wx} & \gamma_2 A_{vx}^{uz} & \beta_2 A_{vx}^{vy} \\ \gamma_1 A_{vz}^{uz} & -\gamma_1 & \alpha_1 A_{vz}^{wx} & \gamma_2 A_{vz}^{uz} & \beta_2 A_{vz}^{vy} - \gamma_2 \\ \gamma_1 A_{wz}^{uz} & 0 & \alpha_1 A_{wz}^{wx} - \gamma_1 & \gamma_2 A_{wz}^{uz} & \beta_2 A_{wz}^{vy} \end{vmatrix}; \tag{21}$$

puis, on remarquera que chaque colonne du déterminant (21) ainsi obtenu peut être décomposée en deux sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{lllll} (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\ (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\ (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\ (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\gamma_2), & (\beta_2); \\ (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\beta_2), & (\gamma_2); \\ (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\gamma_2), & (\beta_2); \end{array}$$

tous ces déterminants s'annulent, à l'exception d'un seul qui se réduit à ± 1.

F. Considérons le système orthonome

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dz} &= A_{uz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{uz}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{uz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uz}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{uz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{uz}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{uz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{uz}, \\ \frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{vx}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{vx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{vx}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{vx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{vx}, \\ \frac{dw}{dx} &= A_{wx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wx}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{wx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wx}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{wx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wx}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{wx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wx}, \\ \frac{dw}{dy} &= A_{wy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wy}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{wy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wy}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{wy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wy}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{wy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wy}, \\ \frac{dp}{dy} &= A_{py}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{py}^{uy}\frac{du}{dy} + A_{py}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{py}^{vz}\frac{dv}{dz} + A_{py}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{py}^{px}\frac{dp}{dx} + A_{py}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{py}, \end{aligned} \right. \tag{22}$$

où u, v, w, p désignent quatre fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Si dans le système (22) on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport à

$$\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{dp}{dx'},\quad \frac{dw}{dy'}$$

a pour valeur

$$\begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uz} + \beta_1 A^{uy}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} + \gamma_1 A^{vz}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_1 A^{px}_{uz} + \gamma_1 A^{pz}_{uz} & \gamma_2 A^{wz}_{uz} \\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} + \beta_1 A^{uy}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} + \gamma_1 A^{vz}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_1 A^{px}_{vx} + \gamma_1 A^{pz}_{vx} & \gamma_2 A^{wz}_{vx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} + \beta_1 A^{uy}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} + \gamma_1 A^{vz}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_1 A^{px}_{wx} + \gamma_1 A^{pz}_{wx} & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2 \\
\alpha_1 A^{ux}_{wy} + \beta_1 A^{uy}_{wy} & \beta_1 A^{vy}_{wy} + \gamma_1 A^{vz}_{wy} & \gamma_1 A^{wz}_{wy} - \beta_1 & \alpha_1 A^{px}_{wy} + \gamma_1 A^{pz}_{wy} & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2 \\
\alpha_1 A^{ux}_{py} + \beta_1 A^{uy}_{py} & \beta_1 A^{vy}_{py} + \gamma_1 A^{vz}_{py} & \gamma_1 A^{wz}_{py} & \alpha_1 A^{px}_{py} + \gamma_1 A^{pz}_{py} - \beta_1 & \gamma_2 A^{wz}_{py}
\end{vmatrix}.$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^2 \beta_1 \gamma_1 \beta_2$. A cet effet, on y remplacera α_2 et γ_2 par zéro, ce qui donnera le produit de β_2 par le déterminant du quatrième ordre

$$(23)\quad \begin{vmatrix}
\alpha_1 A^{ux}_{uz} + \beta_1 A^{uy}_{uz} - \gamma_1 & \beta_1 A^{vy}_{uz} + \gamma_1 A^{vz}_{uz} & \gamma_1 A^{wz}_{uz} & \alpha_1 A^{px}_{uz} + \gamma_1 A^{pz}_{uz} \\
\alpha_1 A^{ux}_{vx} + \beta_1 A^{uy}_{vx} & \beta_1 A^{vy}_{vx} + \gamma_1 A^{vz}_{vx} - \alpha_1 & \gamma_1 A^{wz}_{vx} & \alpha_1 A^{px}_{vx} + \gamma_1 A^{pz}_{vx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{wx} + \beta_1 A^{uy}_{wx} & \beta_1 A^{vy}_{wx} + \gamma_1 A^{vz}_{wx} & \gamma_1 A^{wz}_{wx} - \alpha_1 & \alpha_1 A^{px}_{wx} + \gamma_1 A^{pz}_{wx} \\
\alpha_1 A^{ux}_{py} + \beta_1 A^{uy}_{py} & \beta_1 A^{vy}_{py} + \gamma_1 A^{vz}_{py} & \gamma_1 A^{wz}_{py} & \alpha_1 A^{px}_{py} + \gamma_1 A^{pz}_{py} - \beta_1
\end{vmatrix};$$

puis on remarquera que la troisième colonne du déterminant (23) peut être décomposée en deux sous-colonnes et toutes les autres en trois sous-colonnes, et l'on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les combinaisons suivantes des sous-colonnes :

$$\begin{array}{llll}
(\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\beta_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1); \\
(\alpha_1), & (\beta_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1); \\
(\beta_1), & (\alpha_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1); \\
(\beta_1), & (\gamma_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1); \\
(\gamma_1), & (\beta_1), & (\alpha_1), & (\alpha_1);
\end{array}$$

tous ces déterminants sont identiquement nuls, à l'exception d'un seul qui se réduit à ± 1.

G. Considérons enfin le système orthonome

$$
(24)\quad\left\{
\begin{aligned}
\frac{du}{dy} &= A_{uy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{uy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{uy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{uy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{uy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{uy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{uy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{uy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{uy},\\
\frac{du}{dz} &= A_{uz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{uz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{uz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{uz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{uz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{uz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{uz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{uz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{uz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{uz},\\
\frac{dv}{dx} &= A_{vx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{vx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{vx}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{vx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{vx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{vx}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{vx}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{vx}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{vx},\\
\frac{dv}{dz} &= A_{vz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{vz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{vz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{vz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{vz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{vz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{vz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{vz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{vz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{vz},\\
\frac{dw}{dx} &= A_{wx}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wx}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wx}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wx}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{wx}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wx}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{wx}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{wx}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{wx}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{wx},\\
\frac{dw}{dy} &= A_{wy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{wy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{wy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{wy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{wy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{wy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{wy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{wy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{wy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{wy},\\
\frac{dp}{dx} &= A_{px}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{px}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{px}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{px}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{px}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{px}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{px}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{px}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{px}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{px},\\
\frac{dq}{dy} &= A_{qy}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{qy}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{qy}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{qy}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{qy}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{qy}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{qy}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{qy}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{qy}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{qy},\\
\frac{ds}{dz} &= A_{sz}^{ux}\frac{du}{dx} + A_{sz}^{vy}\frac{dv}{dy} + A_{sz}^{wz}\frac{dw}{dz} + A_{sz}^{py}\frac{dp}{dy} + A_{sz}^{pz}\frac{dp}{dz} + A_{sz}^{qx}\frac{dq}{dx} + A_{sz}^{qz}\frac{dq}{dz} + A_{sz}^{sx}\frac{ds}{dx} + A_{sz}^{sy}\frac{ds}{dy} + A_{sz},
\end{aligned}
\right.
$$

où u, v, w, p, q, s désignent six fonctions inconnues des variables indépendantes x, y, z. Si, dans le système (24), on effectue la transformation (15), le déterminant différentiel du système transformé par rapport à

$$
\frac{du}{dx'},\quad \frac{dv}{dx'},\quad \frac{dw}{dx'},\quad \frac{dp}{dx'},\quad \frac{dq}{dx'},\quad \frac{ds}{dx'},\quad \frac{du}{dy'},\quad \frac{dv}{dy'},\quad \frac{dw}{dy'}
$$

a pour colonnes successives :

$$
\begin{array}{llll}
\alpha_1 A_{uy}^{ux} - \beta_1, & \beta_1 A_{uy}^{vy}, & \gamma_1 A_{uy}^{wz}, & \beta_1 A_{uy}^{py} + \gamma_1 A_{uy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{uz}^{ux} - \gamma_1, & \beta_1 A_{uz}^{vy}, & \gamma_1 A_{uz}^{wz}, & \beta_1 A_{uz}^{py} + \gamma_1 A_{uz}^{pz},\\
\alpha_1 A_{vx}^{ux}, & \beta_1 A_{vx}^{vy} - \alpha_1, & \gamma_1 A_{vx}^{wz}, & \beta_1 A_{vx}^{py} + \gamma_1 A_{vx}^{pz},\\
\alpha_1 A_{vz}^{ux}, & \beta_1 A_{vz}^{vy} - \gamma_1, & \gamma_1 A_{vz}^{wz}, & \beta_1 A_{vz}^{py} + \gamma_1 A_{vz}^{pz},\\
\alpha_1 A_{wx}^{ux}, & \beta_1 A_{wx}^{vy}, & \gamma_1 A_{wx}^{wz} - \alpha_1, & \beta_1 A_{wx}^{py} + \gamma_1 A_{wx}^{pz},\\
\alpha_1 A_{wy}^{ux}, & \beta_1 A_{wy}^{vy}, & \gamma_1 A_{wy}^{wz} - \beta_1, & \beta_1 A_{wy}^{py} + \gamma_1 A_{wy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{px}^{ux}, & \beta_1 A_{px}^{vy}, & \gamma_1 A_{px}^{wz}, & \beta_1 A_{px}^{py} + \gamma_1 A_{px}^{pz} - \alpha_1,\\
\alpha_1 A_{qy}^{ux}, & \beta_1 A_{qy}^{vy}, & \gamma_1 A_{qy}^{wz}, & \beta_1 A_{qy}^{py} + \gamma_1 A_{qy}^{pz},\\
\alpha_1 A_{sz}^{ux}, & \beta_1 A_{sz}^{vy}, & \gamma_1 A_{sz}^{wz}, & \beta_1 A_{sz}^{py} + \gamma_1 A_{sz}^{pz},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\alpha_1 A^{qx}_{uy} + \gamma_1 A^{qz}_{uy}, & \alpha_1 A^{sx}_{uy} + \beta_1 A^{sy}_{uy}, & \alpha_2 A^{ux}_{uy} - \beta_2, & \beta_2 A^{vy}_{uy}, & \gamma_2 A^{wz}_{uy}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{uz} + \gamma_1 A^{qz}_{uz}, & \alpha_1 A^{sx}_{uz} + \beta_1 A^{sy}_{uz}, & \alpha_2 A^{ux}_{uz} - \gamma_2, & \beta_2 A^{vy}_{uz}, & \gamma_2 A^{wz}_{uz}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{vx} + \gamma_1 A^{qz}_{vx}, & \alpha_1 A^{sx}_{vx} + \beta_1 A^{sy}_{vx}, & \alpha_2 A^{ux}_{vx}, & \beta_2 A^{vy}_{vx} - \alpha_2, & \gamma_2 A^{wz}_{vx}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{vz} + \gamma_1 A^{qz}_{vz}, & \alpha_1 A^{sx}_{vz} + \beta_1 A^{sy}_{vz}, & \alpha_2 A^{ux}_{vz}, & \beta_2 A^{vy}_{vz} - \gamma_2, & \gamma_2 A^{wz}_{vz}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{wx} + \gamma_1 A^{qz}_{wx}, & \alpha_1 A^{sx}_{wx} + \beta_1 A^{sy}_{wx}, & \alpha_2 A^{ux}_{wx}, & \beta_2 A^{vy}_{wx}, & \gamma_2 A^{wz}_{wx} - \alpha_2, \\
\alpha_1 A^{qx}_{wy} + \gamma_1 A^{qz}_{wy}, & \alpha_1 A^{sx}_{wy} + \beta_1 A^{sy}_{wy}, & \alpha_2 A^{ux}_{wy}, & \beta_2 A^{vy}_{wy}, & \gamma_2 A^{wz}_{wy} - \beta_2, \\
\alpha_1 A^{qx}_{px} + \gamma_1 A^{qz}_{px}, & \alpha_1 A^{sx}_{px} + \beta_1 A^{sy}_{px}, & \alpha_2 A^{ux}_{px}, & \beta_2 A^{vy}_{px}, & \gamma_2 A^{wz}_{px}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{qy} + \gamma_1 A^{qz}_{qy} - \beta_1, & \alpha_1 A^{sx}_{qy} + \beta_1 A^{sy}_{qy}, & \alpha_2 A^{ux}_{qy}, & \beta_2 A^{vy}_{qy}, & \gamma_2 A^{wz}_{qy}, \\
\alpha_1 A^{qx}_{sz} + \gamma_1 A^{qz}_{sz}, & \alpha_1 A^{sx}_{sz} + \beta_1 A^{sy}_{sz} - \gamma_1, & \alpha_2 A^{ux}_{sz}, & \beta_2 A^{vy}_{sz}, & \gamma_2 A^{wz}_{sz}.
\end{array}
$$

Dans ce déterminant, ordonné par rapport à α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, on cherchera le coefficient du terme en $\alpha_1^3 \beta_1^2 \gamma_1 \beta_2 \gamma_2^2$. A cet effet, on y remplacera α_2 par zéro, ce qui simplifiera les trois dernières colonnes; puis on remarquera que, dans le déterminant ainsi obtenu, chacune des trois colonnes dont il s'agit peut être décomposée en deux sous-colonnes, et chacune des six premières en trois sous-colonnes; finalement, on ajoutera ensemble les coefficients partiels fournis par les diverses combinaisons des sous-colonnes. Or, les 180 déterminants qui en résultent se réduisent tous à zéro, à l'exception d'un seul qui se réduit à ± 1.

III. *Si deux systèmes orthonomes et linéaires du premier ordre,* S *et* S′, *peuvent se déduire l'un de l'autre par un changement des variables indépendantes, et si, dans l'un et dans l'autre, les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues contiennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les deux systèmes sont à la fois passifs ou non passifs.*

Supposons, en effet, que le système S soit passif, et soient

$u, \ldots,$ les fonctions inconnues;
$x, \ldots,$ les anciennes variables;
$x', \ldots,$ les nouvelles;
f les formules qui lient $x, \ldots$ à $x', \ldots$;
$\mathfrak{F}$ celles qui expriment les anciennes dérivées premières et secondes de $u, \ldots,$ en fonctions de leurs nouvelles dérivées des mêmes ordres (ou inversement);

$\mathfrak{U}$ les relations ultimes distinctes des deux premiers ordres du système S;

$\mathfrak{U}'$ les relations ultimes distinctes des mêmes ordres du système S';

$(\mathfrak{U})$ le groupe transformé de $\mathfrak{U}$ à l'aide des formules $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, et composé, comme lui, de relations toutes distinctes.

Puisque, dans l'un et l'autre système, les colonnes correspondant aux mêmes fonctions inconnues comprennent les mêmes nombres respectifs d'équations, les fonctions inconnues ont, de part et d'autre, les mêmes nombres respectifs de dérivées principales dans chaque ordre: nous désignerons par N le nombre total des dérivées principales premières et secondes, soit du système S, soit du système S'. En vertu de la passivité du système S, chacun des groupes $\mathfrak{U}$, $(\mathfrak{U})$ contient exactement N relations.

Cela posé, si l'on transforme l'une quelconque des relations $\mathfrak{U}'$ à l'aide des formules $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{F}$, la formule résultante, vérifiée pour toutes les intégrales du système S, est une conséquence algébrique de $\mathfrak{U}$, car autrement la solution générale de S ne posséderait pas le degré d'indétermination qui résulte de la nature passive du système; on en conclut qu'avant sa transformation, la relation considérée du groupe $\mathfrak{U}'$ est une conséquence algébrique de $(\mathfrak{U})$. Donc le groupe $\mathfrak{U}'$, composé par hypothèse d'équations toutes distinctes, ne peut comprendre plus de N relations. Ainsi, chacune des nouvelles dérivées principales premières et secondes, et en particulier chacune des nouvelles dérivées cardinales, n'a qu'une seule expression ultime, d'où résulte, comme on sait, la passivité du système S'.

IV. Si l'on observe, comme je l'ai rappelé plus haut, que tout système régulier est orthonome, le simple rapprochement des alinéas II et III suffit à établir l'exactitude de notre énoncé général.

2.

J'appellerai, pour abréger, *système simple* un système du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des m fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et résolu par rapport aux m dérivées qui intéressent une seule et même variable; ou, en d'autres termes, un système linéaire du premier ordre dont le Tableau ne contienne qu'une seule ligne entièrement pleine avec des lignes entièrement vides.

Cela posé, *dans tout système régulier, passif et linéaire du premier ordre, la recherche d'intégrales ordinaires correspondant à des conditions initiales données se ramène à une recherche semblable effectuée successivement sur divers systèmes simples* (1).

Supposons, pour fixer les idées, que le système régulier, passif et linéaire du premier ordre auquel on a affaire ait pour Tableau

(25)

	u	v	w	p
x	$\frac{du}{dx}=\dots$	$\frac{dv}{dx}=\dots$	$\frac{dw}{dx}=\dots$	$\frac{dp}{dx}=\dots$
y	$\frac{du}{dy}=\dots$	$\frac{dv}{dy}=\dots$	$\frac{dw}{dy}=\dots$	
z	$\frac{du}{dz}=\dots$			
s	$\frac{du}{ds}=\dots$			
t				

où u, v, w, p désignent quatre fonctions inconnues des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t. Désignons en outre par x_0, y_0, z_0, s_0, t_0 les valeurs initiales choisies pour ces dernières, par $U_5(t)$, $V_3(z, s, t)$, $W_3(z, s, t)$, $P_2(y, z, s, t)$ quatre fonctions données, et supposons qu'on cherche les intégrales ordinaires du système (25) déterminées par les

(1) Dans un Mémoire publié l'année dernière [*Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896)], M. Delassus a ramené l'intégration de ses *systèmes canoniques* à l'intégration successive de plusieurs systèmes de Mme de Kowalevsky : la réduction analogue que j'effectue, dans le n° 2 du présent Mémoire, sur l'intégration des systèmes réguliers, conduit, comme on le voit, à un résultat plus simple.

conditions initiales

$$
\begin{aligned}
u &= \mathrm{U}_5(t) && \text{pour } x-x_0=y-y_0=z-z_0=s-s_0=0,\\
v &= \mathrm{V}_3(z,s,t) && \text{pour } x-x_0=y-y_0=0,\\
w &= \mathrm{W}_3(z,s,t) && \text{pour } x-x_0=y-y_0=0,\\
p &= \mathrm{P}_2(y,z,s,t) && \text{pour } x-x_0=0.
\end{aligned}
$$

Il est clair que les intégrales dont il s'agit peuvent, par un groupement convenable des termes de leurs développements, être mises sous la forme

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= (x-x_0)\,\mathrm{U}_1(x,y,z,s,t)+(y-y_0)\,\mathrm{U}_2(y,z,s,t)\\
&\quad+(z-z_0)\,\mathrm{U}_3(z,s,t)+(s-s_0)\,\mathrm{U}_4(s,t)+\mathrm{U}_5(t),\\
v &= (x-x_0)\,\mathrm{V}_1(x,y,z,s,t)+(y-y_0)\,\mathrm{V}_2(y,z,s,t)+\mathrm{V}_3(z,s,t),\\
w &= (x-x_0)\,\mathrm{W}_1(x,y,z,s,t)+(y-y_0)\,\mathrm{W}_2(y,z,s,t)+\mathrm{W}_3(z,s,t),\\
p &= (x-x_0)\,\mathrm{P}_1(x,y,z,s,t)+\mathrm{P}_2(y,z,s,t).
\end{aligned}
\right.
$$

En posant

$$
(27)\qquad (s-s_0)\,\mathrm{U}_4(s,t)+\mathrm{U}_5(t)=\Upsilon_4(s,t),
$$

la première formule (26) devient

$$
\begin{aligned}
(28)\qquad u = {}&(x-x_0)\,\mathrm{U}_1(x,y,z,s,t)+(y-y_0)\,\mathrm{U}_2(y,z,s,t)\\
&+(z-z_0)\,\mathrm{U}_3(z,s,t)+\Upsilon_4(s,t).
\end{aligned}
$$

Cela étant, si, dans la quatrième ligne du Tableau (25), on donne aux trois premières variables x, y, z leurs valeurs initiales x_0, y_0, z_0, la fonction u et ses dérivées $\frac{du}{ds}, \frac{du}{dt}$ se réduisent respectivement à Υ_4, $\frac{d\Upsilon_4}{ds}, \frac{d\Upsilon_4}{dt}$, et les quantités $v, w, p, \frac{dv}{dz}, \frac{dv}{ds}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dz}, \frac{dw}{ds}, \frac{dw}{dt}, \frac{dp}{dy}, \frac{dp}{dz}, \frac{dp}{ds}, \frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de s, t, comme on le voit sans peine par la formule (28) et les trois dernières formules (26). La fonction $\Upsilon_4(s,t)$ vérifie donc une équation aux dérivées partielles, linéaire et du premier ordre, résolue par rapport à $\frac{d\Upsilon_4}{ds}$; elle se réduit d'ailleurs, pour $s=s_0$, à une fonction connue $\mathrm{U}_5(t)$, comme le montre la formule (27).

On est donc ramené, pour la déterminer, à rechercher dans un certain système simple (impliquant une seule fonction inconnue) l'intégrale ordinaire qui répond à des conditions initiales données.

Supposons connue la fonction $\Upsilon_4(s, t)$, et posons

$$(z - z_0)\, U_3(z, s, t) + \Upsilon_4(s, t) = \Upsilon_3(z, s, t).$$

Si, dans la troisième ligne du Tableau (25), on donne aux deux premières variables x, y leurs valeurs initiales x_0, y_0, on verra, par un raisonnement semblable, que u, $\frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dt}$ se réduisent respectivement à Υ_3, $\frac{d\Upsilon_3}{dz}$, $\frac{d\Upsilon_3}{dt}$, et v, w, p, $\frac{dv}{dz}$, $\frac{dv}{ds}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dz}$, $\frac{dw}{ds}$, $\frac{dw}{dt}$, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de z, s, t. La fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$ vérifie donc une équation aux dérivées partielles, linéaire et du premier ordre, résolue par rapport à $\frac{d\Upsilon_3}{dz}$; elle se réduit d'ailleurs, pour $z = z_0$, à une fonction connue $\Upsilon_4(s, t)$. On est donc ramené, pour la déterminer, à rechercher, dans un certain système simple (impliquant une seule fonction inconnue), l'intégrale ordinaire qui répond à des conditions initiales données.

Supposons connue à son tour la fonction $\Upsilon_3(z, s, t)$, et posons

$$\begin{aligned}
(y - y_0)\, U_2(y, z, s, t) + \Upsilon_3(z, s, t) &= \Upsilon_2(y, z, s, t),\\
(y - y_0)\, V_2(y, z, s, t) + V_3(z, s, t) &= \Phi_2(y, z, s, t),\\
(y - y_0)\, W_2(y, z, s, t) + W_3(z, s, t) &= \Psi_2(y, z, s, t).
\end{aligned}$$

Si, dans la deuxième ligne du Tableau (25), on donne à la première variable x sa valeur initiale x_0, on verra, comme ci-dessus, que

$$u,\quad v,\quad w,\quad \frac{du}{dy},\quad \frac{du}{dt},\quad \frac{dv}{dy},\quad \frac{dv}{dz},\quad \frac{dv}{ds},\quad \frac{dv}{dt},\quad \frac{dw}{dy},\quad \frac{dw}{dz},\quad \frac{dw}{ds},\quad \frac{dw}{dt}$$

se réduisent respectivement à

$$\Upsilon,\quad \Phi_2,\quad \Psi_2,\quad \frac{d\Upsilon_2}{dy},\quad \frac{d\Upsilon_2}{dt},\quad \frac{d\Phi_2}{dy},\quad \frac{d\Phi_2}{dz},\quad \frac{d\Phi_2}{ds},\quad \frac{d\Phi_2}{dt},\quad \frac{d\Psi_2}{dy},\quad \frac{d\Psi_2}{dz},\quad \frac{d\Psi_2}{ds},\quad \frac{d\Psi_2}{dt},$$

et p, $\frac{dp}{dy}$, $\frac{dp}{dz}$, $\frac{dp}{ds}$, $\frac{dp}{dt}$ à des fonctions connues de y, z, s, t. Les fonctions

$$(29) \qquad \Upsilon_2(y, z, s, t), \quad \Phi_2(y, z, s, t), \quad \Psi_2(y, z, s, t)$$

vérifient donc un système partiel linéaire et du premier ordre, résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{d\Upsilon_2}{dy}$, $\frac{d\Phi_2}{dy}$, $\frac{d\Psi_2}{dy}$; elles se réduisent d'ailleurs respectivement, pour $y = y_0$, à trois fonctions connues

$$\Upsilon_3(z, s, t), \quad V_3(z, s, t), \quad W_3(z, s, t).$$

On est donc ramené, pour les déterminer, à rechercher, dans un certain système simple (impliquant trois fonctions inconnues), le groupe d'intégrales ordinaires qui répond à des conditions initiales données.

Finalement, si l'on suppose connues les fonctions (29), les intégrales cherchées vérifient les équations de la première ligne du Tableau (25) et se réduisent, pour $x = x_0$, à des fonctions connues

$$\Upsilon_2(y, z, s, t), \quad \Phi_2(y, z, s, t), \quad \Psi_2(y, z, s, t), \quad P_2(y, z, s, t).$$

On est donc ramené, pour les déterminer, à rechercher, dans un dernier système simple (impliquant quatre fonctions inconnues), le groupe d'intégrales ordinaires qui répond à des conditions initiales données.

APPENDICE.

Dans un Mémoire publié ici même à la fin de l'année dernière ([1]), M. Delassus a émis sur mes travaux certaines critiques auxquelles j'ai répondu dans un article publié en mars ([2]); une Note de M. Delassus, parue dans le numéro de juin ([3]), m'oblige à une nouvelle réponse, qui, je l'espère, fera cesser tout malentendu.

([1]) *Extension du théorème de Cauchy, etc.* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896).

([2]) *Sur les systèmes différentiels les plus généraux* (*Annales de l'École Normale*, mars 1897).

([3]) *Note sur les systèmes différentiels* (*Annales de l'École Normale*, juin 1897).

En ce qui concerne le théorème de M. Tresse ([1]), il est exact, comme le dit M. Delassus, que je ne l'ai pas démontré, et je ne fais aucune difficulté de le reconnaître.

J'arrive maintenant à l'objet principal de notre débat.

Si, dans son Mémoire sur l'*Extension du théorème de Cauchy*, M. Delassus se fût borné à dire qu'il avait retrouvé mes résultats, ou plutôt certains de mes résultats, *avec quelque chose en plus*, il eût été dans le vrai, et cette prétention de sa part m'eût semblé toute naturelle; je n'ai jamais songé, comme il semble le croire, à revendiquer comme mien ce *quelque chose*, et si j'ai, en mars 1897, publié une Note, en réponse à son Mémoire, c'est que ce dernier contenait sur mes travaux une critique que je persiste à ne pas trouver justifiée : j'estime, en effet, contrairement à ses assertions, avoir établi le premier ce fait, que, *dans tout système différentiel composé d'équations en nombre fini, la solution générale, si elle existe, dépend d'un nombre fini d'éléments arbitraires, constantes ou fonctions.*

Dans la Note qu'il a publiée en juin dernier, M. Delassus s'exprime ainsi :

« Les intégrales des systèmes différentiels peuvent être considérées comme dépendant d'une infinité de constantes arbitraires, ou d'un nombre fini de constantes et fonctions arbitraires, le second point de vue pouvant d'ailleurs se déduire du premier si l'on sait trouver une loi convenable pour le groupement des constantes arbitraires en nombre infini. Dans *tous* les Mémoires que M. Riquier a publiés, en collaboration avec M. Méray ou seul, les intégrales sont considérées *uniquement sous le premier point de vue*, et M. Riquier s'occupe, *pour la première fois*, du groupement en fonctions arbitraires dans sa Note récente, qui constitue une *addition* à son Mémoire, addition postérieure de près d'un an à la publication de mes résultats sur la question considérée à ce point de vue. »

Il m'est on ne peut plus facile de répondre à ce qui précède.

Effectivement, dans le Mémoire que M. Méray et moi avons publié en collaboration il y a sept ans, et dans lequel nous étudions des systèmes du premier ordre résolus par rapport à certaines dérivées, nous nommons *détermination initiale* d'une intégrale *la fonction de ses seules variables paramétriques à laquelle se réduit cette dernière, quand on donne à ses variables principales leurs valeurs initiales* ([2]); nous faisons remarquer ensuite que, dans un pareil système, l'hypothèse de la passivité, combinée avec celle de laconvergence des développements, assure l'existence d'intégrales ordinaires

---

([1]) *Tout système différentiel composé d'équations en nombre illimité équivaut, au point de vue de l'intégration, à quelque système différentiel n'en comprenant qu'un nombre limité.*

([2]) Voir les *Annales de l'École Normale*, p. 37; 1890.

répondant à des déterminations initiales arbitrairement choisies, en sorte que, sous le bénéfice de ces hypothèses, la solution générale du système dépend de fonctions (ou constantes) arbitraires en nombre égal à celui des inconnues ([1]). Une remarque analogue avait d'ailleurs été faite sur tous les types du premier ordre étudiés antérieurement au point de vue de l'existence des intégrales, et, en la présentant à notre tour, nous n'avons fait, M. Méray et moi, que l'étendre à un type du premier ordre plus général. Je l'ai donc, dans tous mes travaux ultérieurs, considérée, et à juste titre, comme un lieu commun de la théorie des systèmes du premier ordre; cela étant, la question de l'existence des intégrales se posait pour moi dans les termes suivants : *Étant donné un système différentiel quelconque* (que je supposais ne comprendre qu'un nombre limité d'équations), *le réduire, sauf constatation éventuelle d'impossibilité, à un système du premier ordre où se trouve réalisée la double condition :* 1° *de la passivité;* 2° *de la convergence des développements des intégrales.* Ce problème, j'en ai publié la solution dès 1893, c'est-à-dire antérieurement aux travaux de MM. Tresse et Delassus; c'est donc à moi qu'il convient de l'attribuer, et, du même coup, la proposition formulée au début de la présente Note.

Ainsi, la raison du silence que, dans mes travaux postérieurs à cette date, j'ai gardé sur le groupement des constantes arbitraires en fonctions, sautait aux yeux de tout lecteur attentif : par le seul fait de la réduction à une forme orthonome passive du premier ordre, la solution générale d'un système donné devait dépendre finalement de fonctions arbitraires en nombre fini, et ces fonctions se dégager d'elles-mêmes, sans que j'eusse besoin de m'en inquiéter.

M. Delassus semble s'étonner que l'article publié par moi en mars 1897 soit postérieur de près d'un an à la Note qu'il a communiquée à l'Académie des Sciences. La raison en est fort simple. J'avais remarqué avec intérêt, en lisant le *Compte rendu* du 30 mars 1896, que M. Delassus avait retrouvé une partie de mes résultats avec quelque chose en plus, et c'est précisément ce quelque chose qui justifiait à mes yeux la publication de sa Note; mais, en ce qui concerne l'objet de notre débat actuel, que j'ai nettement spécifié plus haut, ma priorité ne me semblait pas pouvoir faire l'ombre d'un doute, et il

---

([1]) Nous disons, en effet (*Annales de l'École Normale,* p. 37 et 38) :

Pour qu'il existe un groupe d'intégrales ordinaires répondant à des déterminations initiales données d'avance, il faut et il suffit : 1° que, dans le calcul des valeurs initiales des dérivées principales, il y ait concordance entre les relations ultimes; 2° que les développements construits par la méthode des coefficients indéterminés soient convergents. — Et, quelques lignes plus loin, nous nommons système *passif* un système où la concordance des relations ultimes a lieu pour un choix arbitraire des déterminations initiales.

ne me serait jamais venu à l'esprit que M. Delassus pût la contester; je n'ai eu connaissance de cette prétention que dans les derniers jours de janvier 1897, époque à laquelle les numéros de novembre et décembre 1896 des *Annales de l'École Normale*, qui contiennent le Mémoire de M. Delassus, sont parvenus à la Bibliothèque universitaire de Caen. Je me suis hâté alors de rédiger une réponse, et, dès le 1er février, M. Darboux avait cette réponse entre les mains. On serait donc mal fondé à me taxer de lenteur en cette circonstance.

Comme je l'ai dit au début de cette Note, on ne retrouve, dans le Mémoire de M. Delassus, qu'une partie de mes résultats, et M. Delassus laisse entièrement de côté la réduction d'un système complètement intégrable d'ordre quelconque à un système linéaire et complètement intégrable du premier ordre, réduction qui, selon toute probabilité, doit procurer, dans plus d'une circonstance, des avantages notables. D'autre part, et c'est là un point qui ne me paraît pas sans importance, ma méthode dispense entièrement de recourir au changement de variables, dont l'emploi peut, dans certains cas, présenter des inconvénients sérieux, et que l'on trouve, dans le Mémoire de M. Delassus, à la base de tous les raisonnements.

En terminant, je tiens à remercier M. Delassus des appréciations élogieuses que, nonobstant ses critiques, il a cru devoir émettre sur mes travaux. De mon côté, et abstraction faite des cas où le changement de variables est à éviter, je reconnais avoir appliqué avec fruit, dans le présent Mémoire, l'idée fondamentale du sien, pour simplifier mes résultats.