ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

S. MANGEOT

Sur un mode de développement en série des fonctions algébriques explicites

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 247-250.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__247_0>

SUR UN

MODE DE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE

DES

FONCTIONS ALGÉBRIQUES EXPLICITES,

PAR M. S. MANGEOT,

DOCTEUR ÈS SCIENCES

Si l'on possède une méthode particulière permettant de calculer les termes du développement en série entière d'une fonction de x de la forme

$$u = [f_1(x)]^{m_1}[f_2(x)]^{m_2}\ldots[f_r(x)]^{m_r},$$

les exposants m_λ étant des constantes quelconques, il est facile de se rendre compte que l'application de cette méthode, répétée s'il y a lieu, pourra conduire au développement analogue de toute fonction algébrique et explicite d'une variable.

Je vais indiquer un procédé spécial pour calculer les dérivées de la fonction u : j'aurai résolu la question, en la généralisant un peu.

Je pose

$$S_{1\lambda} = -\frac{f'_\lambda(x)}{f_\lambda(x)}, \qquad (n-1)!\,S_{n\lambda} = \frac{d^{n-1}S_{1\lambda}}{dx^{n-1}}$$

et

$$t_n = m_1 S_{n1} + m_2 S_{n2} + \ldots + m_r S_{nr}; \tag{1}$$

puis j'effectue des différentiations successives sur les deux formules

$$S_{1\lambda} f_\lambda + f'_\lambda = 0, \qquad \log u = \Sigma m_\lambda \log f_\lambda.$$

Je suis alors conduit à ces deux relations

$$S_{n\lambda} f_\lambda + S_{(n-1)\lambda}\frac{f'_\lambda}{1} + S_{(n-2)\lambda}\frac{f''_\lambda}{2!} + \ldots + S_{1\lambda}\frac{f_\lambda^{(n-1)}}{(n-1)!} + n\frac{f_\lambda^{(n)}}{n!} = 0, \tag{2}$$

$$t_n u + t_{n-1}\frac{u'}{1} + t_{n-2}\frac{u''}{2!} + \ldots + t_1\frac{u^{(n-1)}}{(n-1)!} + n\frac{u^{(n)}}{n!} = 0 \tag{3}$$

Elles donnent une solution du problème : car, ayant calculé successivement

$$
\begin{array}{cccc}
S_{11}, & S_{21}, & S_{31}, & \ldots, \\
S_{12}, & S_{22}, & S_{32}, & \ldots, \\
\ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots.
\end{array}
$$

au moyen de la relation (2), puis t_1, t_2, ..., à l'aide de l'égalité (1), la formule (3) fera connaître, de proche en proche, les valeurs de u', u'', u''', ... On obtient, de la sorte, les dérivées d'une fonction telle que u en résolvant un certain nombre de fois une équation du premier degré à une inconnue, les équations à résoudre étant soumises à des lois de formation particulièrement simples.

La formule de récurrence (3), qui lie la fonction u et ses dérivées successives, peut être exprimée simplement à l'aide des données. On a, en effet, en vertu des égalités (1) et (2),

$$t_h = (-1)^h \sum_{\lambda=1}^{\lambda=r} \frac{m_\lambda D_\lambda}{(f_\lambda)^h},$$

D_λ désignant le déterminant d'ordre h dans lequel l'élément qui appartient à la colonne de rang p et à la ligne de rang q a pour valeur

$$\left[1 + (-1)^h (1-q)\, C_{p-2}^{h-1}\right] \frac{f_\lambda^{(q-p+1)}}{(q-p+1)!}.$$

La dérivée $u^{(n)}$ est dès lors exprimable elle-même en fonction des données : elle est déterminée par la formule

$$
(-1)^n \frac{u^{(n)}}{u} = \begin{vmatrix}
t_1 & 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\
t_2 & t_1 & 2 & 0 & . & . & 0 \\
t_3 & t_2 & t_1 & 3 & . & . & 0 \\
. & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & 0 \\
t_{n-1} & t_{n-2} & t_{n-3} & . & . & t_1 & n-1 \\
t_n & {}_{n-1} & t_{n-2} & . & . & t_2 & t_1
\end{vmatrix},
$$

où t_h a la valeur indiquée ci-dessus.

En partant des résultats qui précèdent, on est conduit à énoncer ce théorème :

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_r$, r nombres donnés, commensurables ou incommensurables, et

$$f_\lambda(x) = a_{0\lambda} + a_{1\lambda}x + a_{2\lambda}x^2 + \ldots \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, r)$$

autant de séries entières ne s'annulant pas avec x. Si l'on pose

$$[f_1(x)]^{m_1}[f_2(x)]^{m_2}\ldots[f_r(x)]^{m_r} = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots,$$

chaque coefficient A_n de cette série peut être exprimé, en fonction linéaire et homogène des coefficients précédents $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, par la formule

$$nA_n = \sum_{h=1}^{h=n}(-1)^h A_{n-h}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=r}\frac{m_\lambda}{a_{0\lambda}^h}\begin{vmatrix} 1\,a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & 0 & . & 0 \\ 2\,a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & 0 & . & 0 \\ 3\,a_{3\lambda} & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} & 0 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ (h-1)\,a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & a_{(h-3)\lambda} & . & . & a_{1\lambda} & a_{0\lambda} \\ h\,a_{h\lambda} & a_{(h-1)\lambda} & a_{(h-2)\lambda} & . & . & a_{2\lambda} & a_{1\lambda} \end{vmatrix}.$$

Quand r est égal à 1, c'est-à-dire quand la fonction u est de la forme $[f(x)]^m$, l'expression de sa dérivée $n^{\text{ième}}$ peut être écrite ainsi

$$\frac{d^n[f(x)]^m}{dx^n} = mf^{m-n}\left|\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & \Delta & & . \\ & & & & 0 \\ \hline & & & & (1-n)f \\ \dfrac{f^{(n)}}{(n-1)!} & \dfrac{f^{(n-1)}}{(n-2)!} & \cdots & \dfrac{f''}{1} & f' \end{array}\right|,$$

en appelant Δ le déterminant d'ordre $n-1$ dans lequel l'élément appartenant à la $p^{\text{ième}}$ colonne et à la $q^{\text{ième}}$ ligne a pour valeur

$$[m(q-p+1)-q]\,\frac{f^{(q-p+1)}}{(q-p+1)!}.$$

Comme application de cette dernière formule, j'indiquerai les deux développements suivants, où je suppose a_0 différent de zéro :

$$\frac{1}{\sum\limits_0^\infty a_n x^n} = \frac{1}{a_0} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n x^n}{n!\, a_0^{n+1}} G_n, \qquad \sqrt{\sum_0^\infty a_n x^n} = \sqrt{a_0} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n!\, 2^n a_0^{n-\frac{1}{2}}} H_n,$$

G_n et H_n ayant respectivement les valeurs

$$\begin{vmatrix} 2a_1 & 1a_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 4a_2 & 3a_1 & 2a_0 & 0 & . & . & 0 \\ 6a_3 & 5a_2 & 4a_1 & 3a_0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ (2n-2)a_{n-1} & (2n-3)a_{n-2} & . & . & . & . & (n-1)a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & . & . & . & 2a_2 & 1a_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1a_1 & 2a_0 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ 2a_2 & 3a_1 & 4a_0 & 0 & . & . & 0 \\ 3a_3 & 4a_2 & 5a_1 & 6a_0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ (n-1)a_{n-1} & na_{n-2} & . & . & . & . & (2n-2)a_0 \\ na_n & (n-1)a_{n-1} & . & . & . & 2a_2 & 1a_1 \end{vmatrix}.$$