C. RIQUIER

Sur les systèmes différentiels les plus généraux

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 14 (1897), p. 99-108.

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1897_3_14__99_0>

SUR LES

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS

LES PLUS GÉNÉRAUX,

PAR M. C. RIQUIER,

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE CAEN.

Dans un récent Mémoire de M. Delassus [*Extension du théorème de Cauchy aux systèmes les plus généraux d'équations aux dérivées partielles* (*Annales de l'École Normale*, novembre et décembre 1896)], on peut lire le passage suivant (p. 422 et 423) :

La solution du problème (il s'agit d'établir, dans les circonstances générales, l'existence des intégrales d'un système différentiel quelconque) dépend de la recherche d'une forme canonique générale. M. Riquier, en faisant correspondre aux variables et aux inconnues des nombres entiers qu'il appelle *cotes premières*, *cotes secondes*, etc., est conduit à définir des *systèmes orthonomes* qu'il prend pour base de tous ses raisonnements. Il montre que tout système d'équations aux dérivées partielles peut se ramener à un système orthonome passif linéaire et du premier ordre. Dans de tels systèmes, la formation par différentiation de toutes les équations, jusqu'à l'ordre infini, permet de séparer les dérivées des fonctions inconnues en deux classes, les unes étant principales et les autres paramétriques, et M. Riquier montre qu'en se donnant arbitrairement les valeurs initiales des dérivées paramétriques, on peut reconstruire les développements en séries des intégrales cherchées, et que ces développements sont convergents [1].

Ces résultats sont établis en toute rigueur par M. Riquier, mais la démonstration qu'il en donne, non seulement est très compliquée, mais est bien artificielle à cause de l'introduction de ces *cotes* qui interviennent d'une façon bien bizarre dans la question. Ceci justifierait déjà la publication de ce Travail où les résultats de M. Riquier sont retrouvés d'une façon beaucoup plus

(1) RIQUIER, *Mémoire sur l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque et sur la réduction d'un semblable système à une forme linéaire et complètement intégrable du premier ordre* (*Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3).

naturelle et plus simple en suivant une voie toute différente; mais il y a plus, c'est que le Mémoire de M. Riquier n'a pas résolu la question aussi complètement qu'il est possible de le faire.

Ce qui fait l'intérêt du théorème de Cauchy, sous la forme classique que lui a donnée M^me de Kowalewsky, c'est que non seulement ce théorème démontre l'existence des intégrales, mais indique en même temps des fonctions arbitraires, *en nombre fini,* ayant des relations simples avec les intégrales, les déterminant complètement, et susceptibles d'être interprétées géométriquement.

Les intégrales de M. Riquier sont des séries dont une infinité de coefficients sont arbitraires. Ces coefficients arbitraires sont les valeurs initiales des dérivées paramétriques, et les systèmes orthonomes, auxquels cet auteur ramène tout, sont d'une forme tellement générale, qu'il est impossible d'apercevoir la loi de succession de ces dérivées, et, par suite, d'avoir une idée de la façon dont on pourrait les grouper pour former des fonctions arbitraires ayant des relations simples avec les intégrales cherchées.

Je m'étonne d'avoir été aussi peu compris. Que M. Delassus, retrouvant les résultats que j'ai le premier obtenus, estime y être arrivé par une voie plus simple, c'est une croyance que je m'explique chez lui, bien que je ne la partage pas, et que ses démonstrations me paraissent tout aussi compliquées que les miennes. Libre encore à M. Delassus de trouver « bizarre » l'attribution de *cotes* entières aux variables et aux inconnues, bien que cette idée ne me semble pas, à moi, plus singulière que celle de les ranger, comme il le fait, dans un ordre déterminé. Mais lorsqu'il soutient, et c'est là le point important de sa critique, que je n'ai pas résolu la question d'une manière complète, et qu'il est impossible, en suivant ma méthode, d'apercevoir « comment on pourrait grouper les coefficients arbitraires des développements des intégrales pour former des fonctions arbitraires, *en nombre fini*, ayant avec ces dernières des relations simples », je ne puis, sans protester, laisser passer de semblables affirmations.

L'intégration des systèmes différentiels quelconques se ramène, comme je l'ai démontré, à celle des systèmes orthonomes passifs. Dans le cas éminemment simple où le système orthonome passif est du premier ordre, la détermination initiale de l'une quelconque des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées est une fonction arbitraire des diverses variables indépendantes s, t, ..., auxquelles se rapportent les dérivées paramétriques premières de la fonction inconnue considérée : car, en pareil cas, celle-ci a pour dérivées paramétriques de tous ordres celles qui se rapportent aux seules variables s, t, ... D'autre part, l'intégration d'un système orthonome passif d'ordre supérieur au premier se ramène, par un mécanisme que j'ai décrit, à celle d'un système orthonome passif du premier ordre. Le simple rapprochement de ces deux faits, auquel M. Delassus semble n'avoir pas songé, l'aurait sans doute mis en défiance contre le jugement trop hâtif formulé au début de son Mémoire : les quelques exemples traités ci-après suffiront, je l'espère, à l'édifier complètement sur ce point.

Exemple I. — Supposons qu'un système différentiel ait été mis sous une forme orthonome passive, et que le système S ainsi obtenu se compose de trois équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial y^3},$$

où u désigne une fonction inconnue des trois variables indépendantes x, y, z. On peut le ramener, par la méthode exposée dans mon Mémoire, à un système S′, à la fois orthonome, passif et du premier ordre, savoir :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{y^2}}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \ldots &
\end{array}$$

Dès lors (et en convenant de dire qu'une fonction est à elle-même sa dérivée unique d'ordre zéro), les dérivées paramétriques de la fonction u, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° ∂z^α, où $\alpha \geqq 0$;

2° ∂y et ∂y^2;

car, dans le système S', les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour u et u'_z des constantes arbitraires, et pour u''_{z^2} une fonction arbitraire de z;

2° Pour u'_y et u''_{y^2} des constantes arbitraires.

En conséquence, si l'on désigne par x_0, y_0, z_0 les valeurs initiales choisies pour les variables indépendantes, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, cette intégrale u se réduise à une fonction donnée de z;

2° Que pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ se réduisent à des constantes données.

Exemple II. — Considérons un système orthonome passif S, composé de quatre équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial z^2}.$$

Le système S' sera, dans le cas actuel :

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial u}{\partial x} = u'_x, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}, & \dfrac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}, & \dfrac{\partial u'_x}{\partial z} = u''_{xz}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_y}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'_z}{\partial x} = u''_{xz}, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial x} = u'''_{x^3}, & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{x^2}}{\partial z} = u'''_{x^2 z}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = u'''_{xz^2}, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{z^2}}{\partial z} = u'''_{z^3}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial x} = u'''_{x^2 z}, & \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u''_{xz}}{\partial z} = u'''_{xz^2}
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
 & \dfrac{\partial u'''_{x^3}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'''_{x^3}}{\partial z} = \dfrac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial x}, \\[2ex]
 & \dfrac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial y} = \ldots, & \dfrac{\partial u'''_{x^2 z}}{\partial z} = \ldots, \\[2ex]
\dfrac{\partial u'''_{z^3}}{\partial x} = \dfrac{\partial u'''_{x z^2}}{\partial z}, & \dfrac{\partial u'''_{z^3}}{\partial y} = \ldots, & \\[2ex]
\dfrac{\partial u'''_{x z^2}}{\partial x} = \ldots, & \dfrac{\partial u'''_{x z^2}}{\partial y} = \ldots. &
\end{array}
$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction u, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1°	∂z^{α},	où $\alpha \geqq 0$;
2°	$\partial x\,(\partial z^{\alpha})$,	où $\alpha \geqq 0$;
3°	$\partial x^2(\partial x^{\alpha})$,	où $\alpha \geqq 0$;
4°	$\partial x^2\,\partial z(\partial x^{\alpha})$,	où $\alpha \geqq 0$;
5°	∂y et $\partial x\,\partial y$;	

car, dans le système S', les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour u, u'_z, u''_{z^2} des constantes arbitraires, et pour u'''_{z^3} une fonction arbitraire de z;

2° Pour u'_x, u''_{xz} des constantes arbitraires, et pour u'''_{xz^2} une fonction arbitraire de z;

3° Pour u''_{x^2} une constante arbitraire, et pour u'''_{x^3} une fonction arbitraire de x;

4° Pour $u'''_{x^2 z}$ une fonction arbitraire de x;

5° Pour u'_y et u''_{xy} des constantes arbitraires.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, cette intégrale u et sa dérivée $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ se réduisent à des fonctions données de z;

2° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$ se réduisent à des fonctions données de x;

3° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduisent à des constantes données.

Observons ici qu'en faisant abstraction pour un instant des conditions initiales relatives à ces deux dernières dérivées, tout est symétrique par rapport aux variables x et z dans l'ensemble des conditions restantes, puisque, dans le système S', les inconnues u, u'_x, u'_z, u''_{x^2}, u''_{z^2}, u''_{xz} ont pour déterminations initiales des constantes arbitraires, les inconnues u'''_{x^3}, $u'''_{x^2 z}$ des fonctions arbitraires de x, et les inconnues u'''_{z^3}, u'''_{xz^2} des fonctions arbitraires de z. D'après cela, une intégrale ordinaire de S se trouve tout aussi bien déterminée par les conditions :

1° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, cette intégrale u et sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial z}$ se réduisent à des fonctions données de x;

2° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ et $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z^2}$ se réduisent à des fonctions données de z;

3° Que, pour $x - x_0 = y - y_0 = z - z_0 = 0$, les deux dérivées $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduisent à des constantes données.

Exemple III. — Considérons un système orthonome passif S, composé de deux équations ayant respectivement pour premiers membres

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}.$$

Le système S' sera, dans le cas actuel,

$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x, & \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, & \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z, \\
 & \frac{\partial u'_x}{\partial y} = \ldots, & \frac{\partial u'_x}{\partial z} = \ldots, \\
\frac{\partial u'_y}{\partial x} = \ldots, & & \frac{\partial u'_y}{\partial z} = \frac{\partial u'_z}{\partial y}, \\
\frac{\partial u'_z}{\partial x} = \ldots . & &
\end{array}$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction u, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1° ∂y^α, où $\alpha \geqq 0$;

2° $\partial z . \partial y^\alpha \partial z^\beta$, où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;

3° $\partial x (\partial x^\alpha)$, où $\alpha \geqq 0$;

car, dans le système S′, les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour u une constante arbitraire, et pour u'_y une fonction arbitraire de y;

2° Pour u'_z une fonction arbitraire de y et z;

3° Pour u'_x une fonction arbitraire de x.

D'ailleurs, les groupes 1° et 2° peuvent évidemment être réunis en un seul, et les dérivées paramétriques de u relativement au système S être classées en deux groupes, suivant qu'elles ont pour dénominateurs de leurs notations

1° $\partial y^\alpha \partial z^\beta$, où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;

2° $\partial x (\partial x^\alpha)$, où $\alpha \geqq 0$.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = 0$, cette intégrale u se réduise à une fonction donnée de y et z;

2° Que, pour $y - y_0 = z - z_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduise à une fonction donnée de x.

Exemple IV. — Considérons enfin un système orthonome S, composé d'une équation unique ayant pour premier membre $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$. Pour un pareil système, nécessairement passif, le système S′ sera

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u'_y, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = u'_z,$$

$$\frac{\partial u'_x}{\partial x} = u''_{x^2}, \qquad \frac{\partial u'_x}{\partial y} = u''_{xy}, \qquad \frac{\partial u'_x}{\partial z} = u''_{xz},$$

$$\frac{\partial u'_y}{\partial x} = u''_{xy}, \qquad \frac{\partial u'_y}{\partial y} = u''_{y^2}, \qquad \frac{\partial u'_y}{\partial z} = u''_{yz},$$

$$\frac{\partial u'_z}{\partial x} = u''_{xz}, \qquad \frac{\partial u'_z}{\partial y} = u''_{yz}, \qquad \frac{\partial u'_z}{\partial z} = u''_{z^2},$$

$$\frac{\partial u''_{x^2}}{\partial y} = \frac{\partial u''_{xy}}{\partial x}, \qquad \frac{\partial u''_{x^2}}{\partial z} = \frac{\partial u''_{xz}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u''_{y^2}}{\partial x} = \frac{\partial u''_{xy}}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u''_{y^2}}{\partial z} = \frac{\partial u''_{yz}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u''_{z^2}}{\partial x} = \frac{\partial u''_{xz}}{\partial z}, \qquad \frac{\partial u''_{z^2}}{\partial y} = \frac{\partial u''_{yz}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial u''_{yz}}{\partial x} = \ldots,$$

$$\frac{\partial u''_{xz}}{\partial y} = \ldots,$$

$$\frac{\partial u''_{xy}}{\partial z} = \ldots.$$

Il en résulte que les dérivées paramétriques de la fonction u, considérée dans le système S, sont celles qui ont pour dénominateurs de leurs notations :

1°	∂y^α,	où	$\alpha \geqq 0$;
2°	$\partial z . \partial z^\alpha$,	où	$\alpha \geqq 0$;
3°	$\partial y \partial z . \partial y^\alpha \partial z^\beta$,	où	$\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;
4°	$\partial x (\partial x^\alpha)$,	où	$\alpha \geqq 0$;
5°	$\partial x (\partial z . \partial x^\alpha \partial z^\beta)$,	où	$\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;
6°	$\partial x \partial y (\partial x^\alpha \partial y^\beta)$,	où	$\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;

car, dans le système S′, les déterminations initiales des fonctions inconnues sont :

1° Pour u, u'_y des constantes arbitraires, et pour u''_{y^2} une fonction arbitraire de y;

2° Pour u'_z une constante arbitraire, et pour u''_{z^2} une fonction arbitraire de z;

3° Pour u''_{yz} une fonction arbitraire de y et z;

4° Pour u'_x une constante arbitraire, et pour u''_{x^2} une fonction arbitraire de x;

5° Pour u''_{xz} une fonction arbitraire de x et z;

6° Pour u''_{xy} une fonction arbitraire de x et y.

D'ailleurs, les groupes 1°, 2° et 3° peuvent évidemment être réunis en un seul, ainsi que les groupes 4° et 5°, et les dérivées paramétriques de u relativement au système S être classées en trois groupes, suivant qu'elles ont pour dénominateurs de leurs notations :

1°	$\partial y^\alpha \partial z^\beta$,	où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;
2°	$\partial x(\partial x^\alpha \partial z^\beta)$,	où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$;
3°	$\partial x \partial y(\partial x^\alpha \partial y^\beta)$,	où $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$.

En conséquence, une intégrale ordinaire de S se trouve entièrement déterminée par les conditions :

1° Que, pour $x - x_0 = 0$, cette intégrale u se réduise à une fonction donnée de y et z;

2° Que, pour $y - y_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial u}{\partial x}$ se réduise à une fonction donnée de x et z;

3° Que, pour $z - z_0 = 0$, sa dérivée $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ se réduise à une fonction donnée de x et y.

Comme d'ailleurs le premier membre $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ de l'équation considérée est une dérivée symétrique par rapport aux trois variables x, y, z, et qu'il y a six permutations de ces trois variables, on pourra varier de six manières différentes l'économie des conditions initiales.

Les exemples précédents, pris entièrement au hasard, suffisent amplement à faire comprendre comment, étant donné un système différentiel quelconque, on peut déterminer le nombre et la nature des éléments arbitraires, constantes ou fonctions, dont dépendent ses intégrales générales. Du reste, la possibilité de cette détermination ressort de mon Mémoire avec une telle évidence, que tout exemple était, à vrai dire, superflu. Comme je l'ai rappelé, en effet, tout système différentiel est réductible à un autre composé : 1° d'un groupe de relations finies exprimant certaines des fonctions inconnues à l'aide des autres et des variables indépendantes; 2° d'un groupe orthonome passif du premier ordre, où se trouvent engagées, avec les inconnues restantes, quelques-unes de leurs dérivées à titre d'inconnues adjointes. L'économie des conditions initiales, évidente dans ce dernier système, se trouve par là même immédiatement connue dans le système proposé, et, dans l'un comme dans l'autre, la solution générale dépend de fonctions arbitraires en *nombre fini*.

Ainsi, et contrairement aux assertions de M. Delassus, le Mémoire dont l'Académie des Sciences m'a fait l'honneur d'ordonner l'impression, a résolu *le premier*, et d'une façon *complète* autant que rigoureuse, le problème de l'existence des intégrales dans un système différentiel quelconque.

Il me reste, après avoir rectifié une inexactitude, à relever une omission. M. Delassus démontre, au début de son Mémoire (*Annales de l'École Normale*, 1896, p. 431 et 432), que *si l'on considère une suite infinie d'ensembles canoniques d'ordres croissants*

$$E^n, \quad E^{n+1}, \quad \ldots, \quad E^{\mu}, \quad \ldots,$$

tels que l'on ait, quel que soit μ

$$(E^{\mu})' \leqq E^{\mu+1},$$

le nombre des termes de la suite pour lesquels il y a inégalité est forcement limité; il ajoute que cette proposition est identique, au fond, à un théorème de M. Tresse, publié en 1894 dans les *Acta mathematica*, et qui constitue, d'après lui, « un des progrès les plus considérables réalisés jusqu'à ce jour dans la théorie générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles ». Or, mes propres recherches sur la réduction d'un système quelconque à une forme complètement intégrable ont été publiées dès 1893, et M. Delassus omet de dire que dans leur exposé figure la proposition suivante, dont la sienne, formulée ci-dessus, n'est qu'un simple cas particulier : *Si l'on forme successivement, avec des dérivées de fonctions $u, v, \ldots, w$, un premier groupe quelconque, un second étranger au premier et à sa descendance, un troisième étranger aux deux premiers et à leur descendance, et ainsi de suite, le nombre de ces groupes est forcément limité* (*Annales de l'École Normale*, 1893, p. 171, 172, 173; *Recueil des Savants étrangers*, t. XXXII, n° 3, p. 36, 37, 38).