

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

P. APPELL

Sur les équations linéaires intégrables à l'aide de la fonction $\chi_m(x, y)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 5 (1888), p. 211-218

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1888_3_5__211_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR DES ÉQUATIONS LINÉAIRES

INTÉGRABLES A L'AIDE DE LA FONCTION

$$\gamma_m(x, y),$$

PAR M. P. APPELL.



Nous avons introduit précédemment ⁽¹⁾ une fonction de deux variables $\gamma_m(x, y)$ qui joue un rôle fondamental dans la décomposition des fonctions doublement périodiques de troisième espèce en éléments simples et dans le développement de ces fonctions en séries. M. Halphen nous a fait l'honneur de donner une place à ces recherches dans son *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 468 et suiv.

Nous nous proposons, dans cette Note, d'indiquer une équation différentielle linéaire avec second membre dont les coefficients sont composés avec des fonctions Θ et leurs dérivées, et dont l'intégrale générale s'exprime à l'aide de fonctions Θ et de la fonction $\gamma_m(x, y)$.

1. Prenons d'abord la fonction $\gamma_1(a, z)$ définie par la série

$$\gamma_1(a, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi z i}{K}} q^{n(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K} (a - z - 2niK'),$$

où l'on désigne, comme d'habitude, par q la quantité $e^{-\pi \frac{K'}{K}}$.

Cette fonction γ_1 admet la période $2K$ pour chacune des variables a

⁽¹⁾ *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. I, II et III.

et z : elle vérifie de plus les deux relations

$$\begin{aligned} \zeta_1(a, z + 2iK') &= e^{-\frac{\pi zi}{K}} \zeta_1(a, z), \\ \zeta_1(a + 2iK', z) &= e^{\frac{\pi ai}{K}} \zeta_1(a, z) - \frac{\pi i}{2K} \left(1 + e^{\frac{\pi ai}{K}}\right) g_0^{(1)}(z), \end{aligned}$$

dans la seconde desquelles la fonction $g_0^{(1)}(z)$ est la fonction entière

$$g_0^{(1)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{n\pi zi}{K}} q^{n(n-1)} = \frac{1}{\sqrt{q}} e^{\frac{\pi zi}{2K}} \mathbf{H}_1(z)$$

admettant la période $2K$ et vérifiant la relation

$$g_0^{(1)}(z + 2iK') = e^{-\frac{\pi zi}{K}} g_0^{(1)}(z).$$

On déduit facilement de ces relations l'identité

$$(1) \quad \begin{vmatrix} \zeta_1(a, z) & \zeta_1(a, t) \\ g_0^{(1)}(z) & g_0^{(1)}(t) \end{vmatrix} = A e^{\frac{\pi i}{2K}(z+t-a)} \frac{\mathbf{H}(z+t-a-K) \mathbf{H}(t-z)}{\mathbf{H}(a-z) \mathbf{H}(a-t)},$$

où A désigne une constante indépendante de a, z, t . Cette identité (1), que nous avons démontrée dans un Mémoire antérieur (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. I, p. 155), résulte immédiatement des propriétés du déterminant du premier membre considéré successivement comme fonction de a, z, t .

Si l'on divise les deux membres de la relation (1) par $(t-z)$ et si l'on fait tendre t vers z , on obtient la nouvelle relation

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \zeta_1(a, z) & \frac{d}{dz} \zeta_1(a, z) \\ g_0^{(1)}(z) & \frac{d}{dz} g_0^{(1)}(z) \end{vmatrix} = B e^{\frac{\pi i}{2K}(2z-a)} \frac{\mathbf{H}(2z-a-K)}{\mathbf{H}^2(a-z)},$$

B désignant une constante que l'on peut déterminer en multipliant les

(1) Des identités du même genre dont le premier membre est un déterminant de fonctions Z ont été indiquées par M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 82).

deux membres de la relation (2) par $(a - z)^2$ et faisant ensuite $a = z$. Comme le produit

$$(a - z)^2 \frac{d}{dz} \chi_1(a, z)$$

tend vers l'unité quand a tend vers z , on trouve ainsi

$$-g_0^{(1)}(z) = B e^{\frac{\pi z i}{2K}} \frac{H(z - K)}{\eta'^2},$$

en désignant par η' la constante $H'(0)$. Mais on a

$$H(z - K) = H_1(z), \quad g_0^{(1)}(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi z i}{2K}} H_1(z),$$

d'où

$$B = -\frac{\eta'^2}{\sqrt[4]{q}}.$$

La relation (2) peut alors s'écrire

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{d}{dz} \chi_1(a, z) & \chi_1(a, z) \\ \frac{d}{dz} g_0^{(1)}(z) & g_0^{(1)}(z) \end{vmatrix} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z - a)}{H^2(a - z)}$$

ou encore, en développant,

$$(4) \quad \frac{d}{dz} \chi_1(a, z) - \chi_1(a, z) \frac{d \log g_0^{(1)}(z)}{dz} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z - a)}{g_0^{(1)}(z) H^2(a - z)}.$$

Cette dernière relation montre que l'équation différentielle linéaire avec second membre

$$(5) \quad \frac{du}{dz} - u \frac{d \log g_0^{(1)}(z)}{dz} = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z - a)}{g_0^{(1)}(z) H^2(a - z)}$$

a pour intégrale générale

$$u = \chi_1(a, z) + C g_0^{(1)}(z),$$

C désignant une constante arbitraire.

En remplaçant $g_0^{(1)}(z)$ par son expression

$$\frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\frac{\pi zi}{2K}} \mathbf{H}_1(z),$$

on peut encore dire que l'équation

$$(6) \quad \frac{du}{dz} - u \left[\frac{\mathbf{H}'_1(z)}{\mathbf{H}_1(z)} + \frac{\pi i}{2K} \right] = \eta'^2 \frac{e^{\frac{\pi i(z-a)}{2K}} \mathbf{H}_1(2z-a)}{\mathbf{H}_1(z) \mathbf{H}^2(z-a)}$$

a pour intégrale générale

$$u = \gamma_1(a, z) + \lambda e^{\frac{\pi zi}{2K}} \mathbf{H}_1(z),$$

λ étant une constante arbitraire.

La formule (4) pourrait aussi être obtenue par la décomposition en éléments simples de la fonction de a

$$\varphi(a) = \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{\mathbf{H}^2(a-z)},$$

qui est doublement périodique de troisième espèce et admet, dans un parallélogramme élémentaire, le seul pôle $a = z$.

2. L'équation différentielle (4) que vérifie la fonction $\gamma_1(a, z)$ est immédiatement intégrable à l'aide des méthodes élémentaires. Écrivons-la

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{\gamma_1(a, z)}{g_0^{(1)}(z)} \right] = \eta'^2 \frac{g_0^{(1)}(2z-a)}{[g_0^{(1)}(z)]^2 \mathbf{H}^2(a-z)}$$

et nous serons ramenés à une quadrature.

Le second membre de cette dernière relation est une fonction de z aux périodes $2K$ et $2iK'$: décomposons-le en éléments simples par la méthode de M. Hermite, l'élément simple étant la fonction

$$Z(z) = \frac{d \log \mathbf{H}(z)}{dz}.$$

Nous aurons

$$g_0^{(1)}(a) \frac{d}{dz} \left[\frac{\gamma_1(a, z)}{g_0^{(1)}(z)} \right] = Z'(z-K) - Z'(z-a);$$

d'où, en intégrant,

$$(7) \quad \frac{g_0^{(1)}(a)}{g_0^{(1)}(z)} \gamma_1(a, z) = Z(z - K) - Z(z - a) + \psi(a),$$

$\psi(a)$ désignant une constante par rapport à z , c'est-à-dire une fonction de a . Cette fonction $\psi(a)$ est une fonction entière que l'on peut déterminer en développant les deux membres de la formule (7) en séries procédant suivant les puissances ascendantes de $(z - a)$. On trouve, de cette façon,

$$\psi(a) = \frac{\pi i}{2K} - \frac{\pi}{K} \sum_{n=1}^{n=\infty} q^{n^2} \frac{1 + q^{2n}}{1 - q^{2n}} \sin \frac{n\pi}{K} (a - iK').$$

La formule (7) à laquelle on est ainsi conduit n'est autre chose qu'une formule que M. Halphen a établie directement dans son *Traité des fonctions elliptiques*, pages 481 et 482, formules (45) et (46), et dont on pourrait par différentiation déduire l'équation (4).

3. La méthode que nous venons de suivre pour la fonction $\gamma_1(a, z)$ permet de former une équation différentielle linéaire d'ordre m , avec second membre, que vérifie la fonction $\gamma_m(a, z)$, m désignant un entier positif.

Cette fonction est définie par la série

$$\gamma_m(a, z) = \frac{\pi}{2K} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi zi}{K}} q^{mn(n-1)} \cot \frac{\pi}{2K} (a - z - 2niK');$$

elle admet la période $2K$ par rapport à chacune des variables a et z , et vérifie les deux relations

$$\begin{aligned} \gamma_m(a, z + 2iK') &= e^{-\frac{m\pi zi}{K}} \gamma_m(a, z), \\ \gamma_m(a + 2iK', z) &= e^{\frac{m\pi ai}{K}} \gamma_m(a, z) - \frac{\pi i}{2K} \left(1 + e^{\frac{m\pi ai}{K}} \right) g_0^{(m)}(z) \\ &\quad - \frac{\pi i}{K} \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} e^{\frac{(m-\nu)\pi ai}{K}} g_\nu^{(m)}(z), \end{aligned}$$

où l'on désigne par $g_v^{(m)}(z)$ la fonction entière

$$g_v^{(m)}(z) = e^{\frac{\nu\pi z i}{K}} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\frac{mn\pi z i}{K}} q^{mn(n-1)+2n\nu},$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, (m-1).$$

Dans ce qui suit, pour simplifier l'écriture, nous laisserons de côté l'indice supérieur m , et nous écrirons

$$g_0(z), g_1(z), \dots, g_{m-1}(z)$$

au lieu de

$$g_0^{(m)}(z), g_1^{(m)}(z), \dots, g_{m-1}^{(m)}(z).$$

Nous avons démontré (*Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. I, p. 155) que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \chi_m(\beta, \alpha_1) & \chi_m(\beta, \alpha_2) & \dots & \chi_m(\beta, \alpha_{m+1}) \\ g_0(\alpha_1) & g_0(\alpha_2) & \dots & g_0(\alpha_{m+1}) \\ g_1(\alpha_1) & g_1(\alpha_2) & \dots & g_1(\alpha_{m+1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{m-1}(\alpha_1) & g_{m-1}(\alpha_2) & \dots & g_{m-1}(\alpha_{m+1}) \end{vmatrix}$$

a pour expression

$$(8) \quad \Delta = A e^{\frac{m\pi i}{2K}(\Sigma\alpha - \beta)} \frac{\mathbb{H}(\Sigma\alpha - \beta - mK) \prod_{ij} \mathbb{H}(\alpha_i - \alpha_j)}{\mathbb{H}(\beta - \alpha_1) \mathbb{H}(\beta - \alpha_2) \dots \mathbb{H}(\beta - \alpha_{m+1})},$$

A désignant une constante, $\Sigma\alpha$ la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{m+1}$, et le produit \prod_{ij} étant étendu à toutes les combinaisons des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ deux à deux.

Si, dans cette identité (8), on remplace β par a et si l'on fait tendre toutes les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m+1}$ vers une limite commune z , après avoir divisé les deux membres par

$$\prod_{ij} (\alpha_i - \alpha_j),$$

on obtient la nouvelle identité

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi_m(a, z) \quad D\chi_m(a, z) \quad D^2\chi_m(a, z) \quad \dots \quad D^m\chi_m(a, z) \\ g_0(z) \quad Dg_0(z) \quad D^2g_0(z) \quad \dots \quad D^mg_0(z) \\ g_1(z) \quad Dg_1(z) \quad D^2g_1(z) \quad \dots \quad D^mg_1(z) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ g_{m-1}(z) \quad Dg_{m-1}(z) \quad D^2g_{m-1}(z) \quad \dots \quad D^mg_{m-1}(z) \end{array} \right. \\ = B e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]} \frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)},$$

où B représente une constante et où la notation $D^n f$ désigne la dérivée d'ordre n d'une fonction f par rapport à z . La constante B s'obtiendrait facilement en multipliant les deux membres de l'identité (9) par $(a-z)^{m+1}$ et faisant $a = z$.

La relation (9) montre que l'équation différentielle suivante, définissant u en fonction de z ,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} u \quad \frac{du}{dz} \quad \frac{d^2u}{dz^2} \quad \dots \quad \frac{d^m u}{dz^m} \\ g_0(z) \quad Dg_0(z) \quad D^2g_0(z) \quad \dots \quad D^mg_0(z) \\ g_1(z) \quad Dg_1(z) \quad D^2g_1(z) \quad \dots \quad D^mg_1(z) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ g_{m-1}(z) \quad Dg_{m-1}(z) \quad D^2g_{m-1}(z) \quad \dots \quad D^mg_{m-1}(z) \end{array} \right. \\ = B e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]} \frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)}$$

admet, comme intégrale générale, l'expression

$$u = \chi_m(a, z) + \lambda_0 g_0(z) + \lambda_1 g_1(z) + \dots + \lambda_{m-1} g_{m-1}(z)$$

avec les m constantes arbitraires

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1}.$$

Cette équation différentielle (10) est une équation linéaire avec second membre, dont les coefficients sont exprimables à l'aide des fonctions Θ et de leurs dérivées. L'intégrale générale de l'équation sans

second membre est

$$\lambda_0 g_0(z) + \lambda_1 g_1(z) + \dots + \lambda_{m-1} g_{m-1}(z).$$

En employant les méthodes connues pour former une intégrale particulière de l'équation avec second membre, on obtiendrait une expression donnant $\chi_m(a, z)$, qui fournirait la généralisation de la formule (7).

L'équation différentielle (9) peut aussi être obtenue par l'application de la méthode de décomposition en éléments simples à la fonction de a ,

$$\Phi(a) = e^{\frac{m\pi i}{2K}[(m+1)z-a]} \frac{H[(m+1)z-a-mK]}{H^{m+1}(a-z)},$$

qui possède, dans un parallélogramme des périodes, le pôle $a = z$ d'ordre $(m+1)$.

Remarque. — La différentiation de l'identité (9) par rapport à a fournit d'autres équations différentielles auxquelles satisfont les fonctions

$$\frac{\partial \chi_m(a, z)}{\partial a}, \quad \frac{\partial^2 \chi_m(a, z)}{\partial a^2}, \quad \dots$$