ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

C. GUICHARD

Sur la résolution de l'équation aux différences fines $G(x+1) - G(x) = H(x)$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 4 (1887), p. 361-380

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1887_3_4__361_0>

SUR LA RÉSOLUTION

DE

L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES

$$G(x+1) - G(x) = H(x),$$

PAR M. C. GUICHARD,

MAITRE DE CONFÉRENCES A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE RENNES.

INTRODUCTION.

Le but principal de ce travail est de démontrer le théorème suivant :

Étant donnée une fonction entière quelconque $H(x)$, *il existe une autre fonction entière* $G(x)$ *vérifiant l'équation aux différences finies*

$$(1) \qquad G(x+1) - G(x) = H(x).$$

On sait trouver cette intégrale finie quand $H(x)$ est un polynôme. Il était donc naturel de chercher à résoudre la question, en prenant la somme des intégrales finies des termes du développement en série de $H(x)$; mais la série ainsi formée n'est pas convergente, quelle que soit la fonction entière H. Nous avons dû alors chercher une autre méthode. Pour arriver au résultat, nous formons, à l'aide d'une intégrale définie renfermant un paramètre variable, une fonction qui a des lignes de discontinuités et qui vérifie la relation donnée. En faisant disparaître ces discontinuités, on arrive au résultat cherché.

Les autres questions que nous abordons ensuite ne sont qu'une application de ce théorème. Tout d'abord, comme généralisation du problème (1) vient la résolution de l'équation

$$(2) \qquad a_0 G(x+n) + a_1 G(x+n-1) + \ldots + a_n G(x) = H(x),$$

où les a sont des constantes. Cette équation a déjà été résolue, dans le cas où le second membre est nul, par M. Picard (1) et par M. Floquet (2), dans la recherche des propriétés des intégrales uniformes d'une équation différentielle linéaire à coefficients simplement périodiques.

Puis, au lieu de l'équation (2), on peut considérer le groupe des deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} a_0\, G(x+n\omega) + a_1\, G[x+(n-1)\omega] + \ldots + a_n\, G(x) = H(x), \\ b_0\, G(x+m\omega') + b_1\, G[x+(m-1)\omega'] + \ldots + b_m\, G(x) = H_1(x). \end{cases}$$

On trouve facilement la relation qui doit exister entre les fonctions entières H et H_1. Cette relation étant vérifiée, les équations (3) n'admettent, en général, qu'une seule solution entière. Il y a, en outre, des solutions méromorphes qu'on obtient en ajoutant à la fonction entière trouvée les solutions des équations (3) privées de second membre. Cette dernière question a été traitée par M. Picard (3) et M. Floquet (4).

Enfin, on ramène facilement au problème (1) la résolution de l'équation

$$\frac{G(x+1)}{G(x)} = H(x).$$

Nous terminons cette étude par la résolution des deux équations

$$\frac{G(x+u)}{G(x)} = H(x),$$

$$\frac{G(x+u')}{G(x)} = H_1(x).$$

Les conditions auxquelles doivent satisfaire H et H_1 sont un peu compliquées; elles se simplifieraient beaucoup si l'on ne s'astreignait pas à trouver une solution entière.

M. Appell a traité quelques questions de calcul fonctionnel, analogues aux précédentes (*Mathematische Annalen*, 1881).

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* (1880).

(2) *Comptes rendus* et *Annales de l'École Normale* (1882).

(3) *Comptes rendus* (1880).

(4) *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques* (*Annales de l'École Normale*, 1884).

1. *Étude de la fonction*

$$\Pi(x) = \int_A^B \frac{f(z)\,e^{2i\pi z}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}\,dz.$$

Prenons sur l'axe des y un segment positif AB (*fig.* 1); soit $f(z)$ une fonction uniforme, continue sur AB. L'intégrale

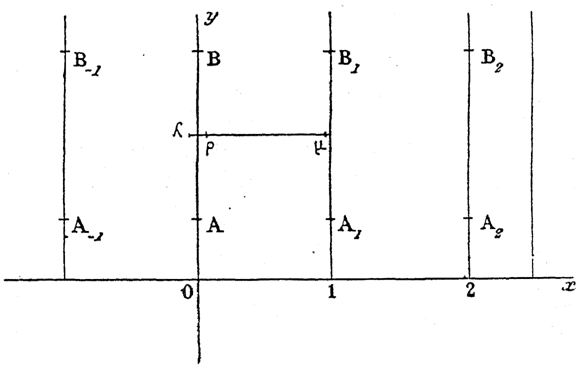
$$\int_A^B \frac{f(z)\,e^{2i\pi z}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}\,dz,$$

prise le long de l'axe des y, définit une fonction uniforme $\Pi(x)$. Cette fonction est discontinue pour les valeurs de x qui vérifient l'équation

$$e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x} = 0 \quad (x = z + n),$$

z étant un point de AB et n un nombre entier, ce qui donne comme

Fig. 1.



lignes de discontinuité ou coupures de la fonction Π une infinité de segments de droites, parallèles à l'axe des y, passant par les points dont l'abscisse est n et dont les extrémités sont situées sur des parallèles à l'axe des x menées par A et B.

Si λ et ρ sont deux points situés en regard l'un de l'autre sur les bords opposés de la coupure AB, ρ à droite, λ à gauche, on a, à un infiniment petit près,

$$\Pi(\lambda) - \Pi(\rho) = f(\rho);$$

si $\mu = \lambda + 1$,

$$\Pi(\lambda) = \Pi(\mu),$$

car tous les éléments de l'intégrale sont égaux.

Il en résulte que, à des infiniment petits près, on a

$$\Pi(\mu) - \Pi(\rho) = f(\rho).$$

2. *Limite de l'intégrale quand x vient sur* AB.

Cette limite n'est pas la même quand x vient sur AB en restant à droite ou à gauche de la coupure. Je supposerai que x s'approche de AB en restant sur le bord droit. On peut, quel que soit x, écrire

$$\Pi(x) = \int_A^B \frac{f(z)\,e^{2i\pi z} - f(x)\,e^{2i\pi x}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}\,dz$$
$$+ f(x)\int_A^B \left(\frac{e^{2i\pi x}}{e^{2\pi i z} - e^{2i\pi x}} - \frac{1}{2i\pi}\,\frac{1}{z-x}\right)dz + \frac{f(x)}{2i\pi}\int_A^B \frac{dz}{z-x}.$$

Les deux premières intégrales représentent des fonctions de x continues sur AB; la troisième a pour valeur

$$\frac{f(x)}{2i\pi}\,\mathrm{L}\,\frac{\mathrm{B}-x}{\mathrm{A}-x}.$$

Quand on suppose x à droite de l'axe des y, il faut prendre celle des valeurs du logarithme qui est nulle pour x infini. Cette expression a une limite quand x vient sur AB, sauf aux points A et B. Il faut prendre celle des valeurs du logarithme qui est réelle.

3. *Résolution de l'équation*

$$\mathrm{G}(x+1) - \mathrm{G}(x) = \mathrm{H}(x).$$

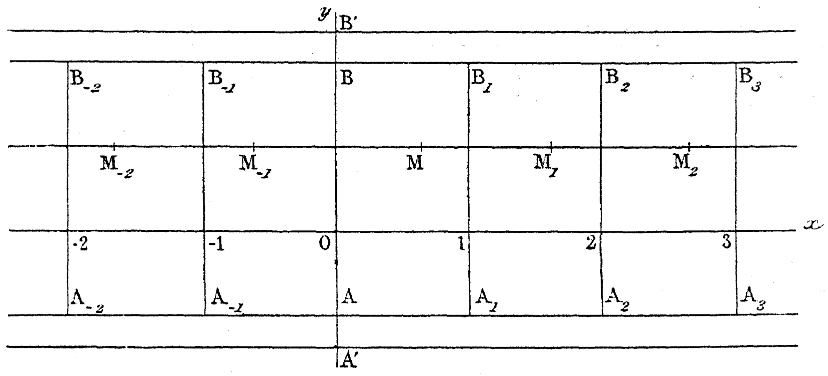
Soit $\mathrm{H}(z)$ une fonction uniforme entre deux droites A′ et B′ parallèles à l'axe des x. Je suppose qu'elle n'ait pas de discontinuités sur l'axe des y. (S'il en était autrement, on pourrait prendre une parallèle à cet axe.) Je mène deux droites A, B voisines respectivement de A′ et B′, situées entre ces deux droites (*fig.* 2).

Puis je divise l'aire comprise entre A et B en rectangles, en menant par les points dont l'abscisse est un nombre entier des parallèles à l'axe des y. Je dirai que deux points de deux rectangles sont correspondants quand leurs affixes diffèrent d'un nombre entier. Cela posé, je forme une fonction ayant pour valeur, à l'intérieur du rectangle $\mathrm{ABA_1B_1}$, l'intégrale

$$\Pi(x) = \int_{A'}^{B'} \frac{H(z)\, e^{2i\pi z}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}\, dz.$$

Je prendrai comme valeur de la fonction sur AB la limite de l'intégrale quand x vient sur AB du côté droit.

Fig. 2.



Soit M un point du premier rectangle ABA_1B_1; marquons ses correspondants $M_1, M_2, \ldots, M_{-1}, M_{-2}, \ldots$. Nous prendrons pour valeurs de la fonction en ces points

En M_1..........	$\Pi(M) + H(M)$,
En M_2..........	$\Pi(M) + H(M) + H(M_1)$,
....	......................,
En M_{-1}.........	$\Pi(M) - H(M_{-1})$,
En M_{-2}.........	$\Pi(M) - H(M_{-1}) - H(M_{-2})$.

Si l'on se reporte aux propriétés de l'intégrale $\Pi(x)$, on voit que la fonction $G(x)$ que nous venons de former n'a pas de lignes de discontinuité. Elle vérifie évidemment l'équation

$$G(x+1) - G(x) = H(x).$$

On obtient toutes les autres solutions en ajoutant à G une fonction uniforme entre les droites A et B, et ayant pour période 1.

Si la fonction H est uniforme dans tout le plan, on pourra, autant qu'on le voudra, éloigner les droites A, B de l'axe des x. La fonction G variera avec la position de ces droites; la méthode suivie ne permet pas d'obtenir comme solution une fonction G, uniforme dans tout le plan. L'intégrale Π cesse, en général, d'avoir un sens quand les points A et B s'éloignent indéfiniment sur l'axe des y. On peut, dans le cas où H est holomorphe dans tout le plan, remédier à cet inconvénient en remplaçant l'intégrale Π par d'autres qui jouissent de propriétés analogues.

4. *Intégrales qui jouissent de propriétés analogues à celles de* $\Pi(x)$.

Soit $\psi(z)$ une fonction uniforme ayant pour période 1, et telle que $\frac{1}{\psi(z)}$ n'ait pas de discontinuités sur le segment AB de l'axe des y. Formons l'intégrale

$$\Pi_1(x) = \int_A^B \frac{f(z)\,e^{2i\pi z}\,\psi(x)}{\psi(z)[e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}]}\,dx.$$

Aux points λ, ρ, μ, on a, comme pour la fonction Π,

$$\Pi_1(\lambda) - \Pi_1(\rho) = f(\rho),$$
$$\Pi_1(\lambda) = \Pi_1(\mu);$$

d'où

$$\Pi_1(\mu) - \Pi_1(\rho) = f(\rho).$$

On pourra donc, dans la résolution de notre problème, remplacer l'intégrale Π par l'intégrale Π_1.

5. *Cas où la fonction* $\mathrm{H}(x)$ *est entière.*

Nous allons montrer qu'on peut choisir la fonction entière périodique ψ, de telle sorte qu'elle ne s'annule pas sur l'axe des y et que l'intégrale Π_1 ait une limite quand A et B s'éloignent indéfiniment sur l'axe des y.

Soit ρ le module de z. On a évidemment

$$|\mathrm{H}(z)| \leqq a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots \leqq \sum_0^\infty a_n\rho^n,$$

a_n étant positif.

Formons maintenant la fonction périodique

$$\psi_1(z) = \sum_0^\infty a_n(e^{2ni\pi z} + e^{-2ni\pi z}),$$

ρ étant le module d'un point de l'axe des y; la valeur de ψ_1 en ce point est

$$\psi_1(\rho) = \sum_0^\infty a_n (e^{-2n\pi\rho} + e^{2n\pi\rho}).$$

Tous les éléments de cette somme sont positifs et plus grands que les modules des termes correspondants de $\mathrm{H}(z)$.

Nous prendrons alors

$$\psi(z) = (e^{2i\pi z} + e^{-2i\pi z})\,\psi_1(z).$$

Quand ρ croît indéfiniment, le module de

$$\frac{\mathrm{H}(z)}{\psi(z)}$$

est infiniment petit par rapport aux puissances de $\frac{1}{\rho}$. D'autre part, $\frac{e^{2i\pi z}}{e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}}$ reste fini quand le point z s'éloigne indéfiniment sur l'axe des y. Il en résulte que l'intégrale

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{H}(z)\,e^{2i\pi z}\,\psi(x)}{\psi(z)[e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}]}\,dz$$

définit une fonction de x quand A et B s'éloignent indéfiniment. Nous la représenterons par

$$\Pi(x) = \int_{y-\infty}^{y+\infty} \frac{\mathrm{H}(z)\,e^{2i\pi z}\,\psi(x)}{\psi(z)[e^{2i\pi z} - e^{2i\pi x}]}\,dz.$$

L'intégrale a encore une limite quand x tend vers un point de l'axe des y. La forme sous laquelle nous l'avons obtenue devient illusoire; mais on peut toujours partager l'intégrale en deux parties : l'une en faisant varier z de A_1 à B_1, l'autre en faisant varier z en dehors de ces limites. On peut faire en sorte que cette dernière soit aussi petite qu'on le veut. La première a une limite; il en est donc de même pour Π.

On pourra, à l'aide de cette fonction Π, former, comme dans le cas précédent, une fonction G; elle sera évidemment holomorphe dans tout le plan. Ainsi :

Étant donnée une fonction entière $\mathrm{H}(x)$, *on pourra trouver une autre* *fonction entière* $G(x)$, *telle que*

$$G(x+1)-G(x)=H(x).$$

On obtiendra toutes les autres solutions en ajoutant à celle-ci une fonction ayant la période 1.

Il est clair qu'on déduit immédiatement de là la solution de l'équation

$$G(x+\omega)-G(x)=H(x).$$

6. *Résolution de l'équation*

$$a\,G(x+1)+b\,G(x)=H(x).$$

Posons

$$G(x)=e^{\rho x}\varphi(x),$$

d'où

$$G(x+1)=e^{\rho}e^{\rho x}\varphi(x+1).$$

L'équation devient

$$e^{\rho x}[ae^{\rho}\varphi(x+1)+b\,\varphi(x)]=H(x).$$

Déterminons ρ par l'équation

$$ae^{\rho}=-b;$$

on a alors

$$\varphi(x+1)-\varphi(x)=-\frac{1}{b}e^{-\rho x}H(x).$$

On est ramené au cas précédent.

7. *Résolution de l'équation*

$$a_0\,G(x+n)+a_1\,G(x+n-1)+\ldots+a_n\,G(x)=H(x).$$

Posons

$$G(x+1)-\lambda\,G(x)=G_1(x),$$

on aura la suite des relations

$$\begin{array}{ll}
G(x+1)-\lambda\,G(x) & =G_1(x),\\
G(x+2)-\lambda\,G(x+1) & =G_1(x+1),\\
G(x+3)-\lambda\,G(x+2) & =G_1(x+2),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots,\\
G(x+n)-\lambda\,G(x+n-1) & =G_1(x+n-1).
\end{array}$$

Multiplions ces équations respectivement par $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$, on pourra choisir λ et les b de manière à vérifier les relations

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \quad\;\; -\lambda b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-1} - \lambda b_{n-2} = a_{n-1}, \\ b_{n-2} - \lambda b_{n-3} = a_{n-2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ b_1 \quad - \lambda b_0 \quad = a_1, \\ \qquad\quad b_0 \quad = a_0. \end{array}\right.$$

On sera alors ramené à résoudre les deux équations

$$(2)\qquad \begin{array}{c} b_0 G_1(x+n-1) + b_1 G_1(x+n-2) + \ldots + b_{n-1} G_1(x) = H(x), \\ G(x+1) - \lambda G(x) = G_1(x). \end{array}$$

En réduisant successivement, par la méthode ci-dessus, la première de ces deux équations, on sera ramené à n équations successives du type 2, qu'on sait résoudre.

Les équations (1) donnent, pour déterminer λ, l'équation algébrique

$$(3)\qquad F(\lambda) = a_n + a_{n-1}\lambda + a_{n-2}\lambda^2 + \ldots + a_0\lambda^n = 0$$

que nous appellerons *équation caractéristique* de l'équation donnée.

Soit λ_1 une racine de cette équation; à cette valeur de λ_1, les équations (1) font correspondre un seul système de valeurs pour les b. L'équation caractéristique, formée avec les coefficients b, sera

$$\frac{F(\lambda)}{\lambda - \lambda_1} = 0.$$

Donc, si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont les racines distinctes ou non de l'équation (3), on pourra résoudre la question proposée à l'aide des n équations

$$\begin{array}{lll} G(x+1) & -\lambda_1 G(x) & = G_1(x), \\ G_1(x+1) & -\lambda_2 G_1(x) & = G_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots, \\ G_{n-1}(x+1) & -\lambda_n G_{n-1}(x) & = H(x). \end{array}$$

D'autre part, si l'on a une solution de la question proposée, on obtiendra toutes les autres en y ajoutant l'intégrale générale de l'équation

$$(4) \qquad a_0\,G(x+n) + a_1\,G(x+n-1) + \ldots + a_n\,G(x) = 0.$$

Notre méthode permet facilement de trouver cette intégrale; mais cette question a déjà été résolue par M. Picard (1). Je me bornerai donc à énoncer le résultat qui nous sera utile dans la suite.

Si l'on pose $e^{\rho_p} = \lambda_p$, l'intégrale générale sera

$$(5) \qquad \sum_1^n e^{\rho_p x}\,\varphi_p(x),$$

φ_p ayant pour période 1. Cette forme n'est applicable qu'autant que l'équation en λ a ses racines distinctes. Si λ est une racine multiple d'ordre α, il faudra remplacer les α termes correspondants de (5) par

$$e^{\rho x}(\varphi_0 + P_1\,\varphi_1 + \ldots + P_{\alpha-1}\,\varphi_{\alpha-1}),$$

les fonctions φ ayant la période 1, les polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_{\alpha-1}$ étant respectivement de degré $1, 2, \ldots, \alpha-1$.

8: *Résolution du système*

$$G(x+\omega) - G(x) = H(x),$$
$$G(x+\omega') - G(x) = H_1(x).$$

On voit tout de suite que les fonctions H et H_1 doivent vérifier la relation

$$(1) \qquad H(x+\omega') - H(x) = H_1(x+\omega) - H(x).$$

D'autre part, la fonction cherchée G étant supposée entière, l'intégrale $\int G(x)\,dx$, prise sur le contour du parallélogramme ayant pour sommets $0, \omega, \omega', \omega+\omega'$, est nulle; ce qui donne une seconde condition

$$\int_0^\omega H(x)\,dx = \int_0^\omega H_1(x)\,dx.$$

(1) *Comptes rendus* (1880).

Nous allons montrer que ces deux conditions nécessaires sont suffisantes.

En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction entière vérifiant la relation

$$\varphi(x+\omega)-\varphi(x)=\mathrm{H}(x).$$

La fonction $\mathrm{G}(x)=\varphi(x)+\psi_\omega(x)$ vérifie la première des deux équations données si ψ_ω admet la période ω. Portons cette valeur de G dans la seconde équation; on aura, pour déterminer ψ, l'équation

$$\psi_\omega(x+\omega')-\psi_\omega(x)=-[\varphi(x+\omega')-\varphi(x)]+\mathrm{H}_1(x).$$

Pour qu'on puisse déterminer ψ par cette équation, il faut et il suffit [1] :

1° Que le second membre admette la période ω, ce qui revient à dire que la relation (1) est vérifiée;

2° Que, dans le développement du second membre par rapport aux puissances positives et négatives de $e^{\frac{2i\pi x}{\omega}}$, le terme indépendant de l'exponentielle soit nul.

Supposons que cette seconde condition ne soit pas remplie. Soit k la valeur du terme en question. On pourra trouver une fonction entière G vérifiant les deux relations

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(x+\omega)\ -\mathrm{G}(x)&=\mathrm{H}(x),\\ \mathrm{G}(x+\omega')-\mathrm{G}(x)&=\mathrm{H}_1(x)-k.\end{aligned}$$

Écrivons maintenant que les deux fonctions $\mathrm{H}(x)$ et $\mathrm{H}_1(x)-k$ satisfont à la relation nécessaire (2), on aura

$$\int_0^{\omega'}\mathrm{H}(x)\,dx=\int_0^{\omega}\mathrm{H}_1(x)\,dx-k\omega.$$

Ainsi k est nul si H et H_1 vérifient la relation (2). Il est clair que toutes les solutions entières s'obtiennent en ajoutant une constante à celle que nous venons d'obtenir.

---

(1) Voir *Théorie des points singuliers essentiels* (*Annales de l'École Normale*; 1883).

Si, dans les équations données, on augmente G d'un terme égal à $A\zeta(z)$, on ne change pas H, mais on augmente H_1 d'une constante. On en conclut : H et H_1 étant des fonctions entières vérifiant la relation (1), il existe toujours des solutions méromorphes des équations

$$\begin{aligned} G(x+\omega) - G(x) &= H(x), \\ G(x+\omega') - G(x) &= H_1(x). \end{aligned}$$

9. *Résolution du système*

$$\begin{aligned} a\,G(x+\omega) + b\,G(x) &= H(x), \\ c\,G(x+\omega') + d\,G(x) &= H_1(x). \end{aligned}$$

On voit tout de suite que les fonctions H et H_1 doivent vérifier la relation

$$(1) \qquad d\,H(x) + c\,H(x+\omega') = b\,H_1(x) + a\,H_1(x+\omega).$$

Si maintenant on pose

$$\begin{aligned} e^{\omega\alpha} &= -\frac{b}{a}, & h(x) &= \frac{1}{a}\,H(x), \\ e^{\omega'\beta} &= -\frac{d}{c}, & h_1(x) &= \frac{1}{d}\,H_1(x), \end{aligned}$$

on est ramené à résoudre le système

$$\begin{aligned} G(x+\omega) - e^{\alpha\omega}\,G(x) &= h(x), \\ G(x+\omega') - e^{\beta\omega'}\,G(x) &= h_1(x). \end{aligned}$$

La relation (1) devient

$$(1) \qquad h(x+\omega') - e^{\beta\omega'}\,h(x) = h_1(x+\omega) - e^{\alpha\omega}\,h_1(x);$$

α et β sont déterminés respectivement à des multiples près de $\frac{2i\pi}{\omega}$ et de $\frac{2i\pi}{\omega'}$, de sorte que, si l'on a la relation

$$\alpha - \beta = \frac{2ni\pi}{\omega} + \frac{2ki\pi}{\omega'},$$

n et k étant entiers, on pourra supposer $\alpha = \beta$; dans le cas contraire, α et β seront distincts.

1° $\alpha = \beta$. — On ramène au problème précédent par la substitution

$$G(x) = e^{\alpha x}\varphi(x).$$

Alors la relation (1) ne suffit pas pour qu'il y ait des intégrales entières; il faut y joindre la condition

$$\int_0^{\omega'} e^{-\alpha x} h(x)\,dx = \int_0^{\omega} e^{-\alpha x} h_1(x)\,dx. \tag{2}$$

Si cette relation est vérifiée, il y a une infinité de solutions qu'on obtient, en ajoutant à l'une d'elles le terme $ke^{\alpha x}$.

2° *α et β sont distincts*. — En appelant $\varphi(x)$ une intégrale particulière de la première équation, on devra avoir

$$G(x) = \varphi(x) + e^{\alpha x}\psi_\omega(x),$$

ψ ayant la période ω.

Portons cette valeur dans la seconde équation. On aura, pour déterminer ψ, l'équation

$$\psi_\omega(x+\omega') - e^{(\beta-\alpha)\omega'}\psi_\omega(x) = e^{-\alpha(x+\omega')}[-\varphi(x+\omega') + e^{\beta\omega'}\varphi(x) + h_1(x)].$$

Il faut que le second membre admette la période ω, ce qui revient à dire que la relation (1) est vérifiée.

Cela posé, on pourra déterminer ψ par la méthode des coefficients indéterminés. En effet, supposons le second membre égal à

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n e^{\frac{2ni\pi x}{\omega}}.$$

Faisons

$$\psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_n e^{\frac{2nix}{\omega}},$$

$$k = e^{(\beta-\alpha)\omega'}, \qquad q = e^{\frac{2i\pi\omega'}{\omega}};$$

on aura, pour déterminer les b, les relations

$$b_n(q^n - k) = a_n, \qquad b_n = \frac{a_n}{q^n - k}.$$

On ne peut pas avoir $q^n = k$, car alors β et α ne seraient pas distincts. D'autre part, le module de $q^n - k$ est toujours plus grand qu'un nombre fixe. La série formée avec les b est donc convergente. Ainsi il n'y a qu'une seule solution entière.

Résolution du système

$$\begin{aligned} a_0 \mathrm{G}(x+n\omega) + a_1 \mathrm{G}[x+(n-1)\omega] + \ldots + a_n \mathrm{G}(x) &= \mathrm{H}(x), \\ b_0 \mathrm{G}(x+m\omega') + b_1 \mathrm{G}[x+(m-1)\omega'] + \ldots + b_m \mathrm{G}(x) &= \mathrm{H}_1(x). \end{aligned}$$

On voit que les fonctions H, H_1 doivent vérifier la relation

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} & b_0 \mathrm{H}(x+m\omega') + b_1 \mathrm{H}[x+(m-1)\omega'] + \ldots + b_m \mathrm{H}(x) \\ & = a_0 \mathrm{H}_1(x+n\omega) + a_1 \mathrm{H}_1[x+(n-1)\omega] + \ldots + a_n \mathrm{H}_1(x). \end{aligned} \right.$$

Cela posé, l'intégrale générale de la première équation est

$$\mathrm{G}(x) = \varphi(x) + \Sigma e^{\lambda x}[\psi_0(x) + x\psi_1(x) + \ldots + x^\alpha \psi_\alpha(x),$$

φ étant une solution particulière, $e^{\lambda\omega}$ une racine de l'équation caractéristique dont l'ordre de multiplicité est $\alpha + 1$; enfin les fonctions ψ admettent la période ω.

Portons cette valeur de $\mathrm{G}(x)$ dans la seconde équation, puis faisons passer dans le second membre les fonctions φ. Le second membre est

$$\mathrm{H}(x) = \mathrm{H}_1(x) - [b_0 \varphi(x+m\omega') + b_1 \varphi[x+(m-1)\omega' + \ldots + b_m \varphi(x)].$$

Le premier membre est évidemment une intégrale de

$$a_0 \mathrm{G}(x+n\omega) + a_1 \mathrm{G}[x+(n-1)\omega] + \ldots + a_n \mathrm{G}(x) = 0.$$

La fonction H doit satisfaire à cette équation, ce qui revient à dire que la relation (1) est vérifiée.

On cherchera à déterminer les fonctions ψ par identification. Égalons, en effet, dans les deux membres le coefficient de $e^{\lambda x} x^\alpha$; on aura

$$b_0 e^{m\lambda\omega'} \psi_\alpha(x+m\omega') + b_1 e^{(m-1)\lambda\omega'} \psi_\alpha[x+(m-1)\omega'] + \ldots + b_m \psi_\alpha(x) = \chi_\alpha(x),$$

χ_α ayant aussi la période ω.

Posons

$$\chi_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_n e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}},$$

$$\psi_\alpha(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_n e^{\frac{2ni\pi z}{\omega}},$$

$$q = e^{\frac{2i\pi\omega'}{\omega}}, \qquad k = e^{\lambda\omega'};$$

on aura, pour déterminer B_n, l'équation

$$(b_0 k^m q^{mn} + b_1 k^{m-1} q^{(m-1)n} + \ldots + b_m) B_n = A_n.$$

Si kq^n n'est pas racine,

$$F(x) = b_0 u^m + b_1 u_{m-1} + \ldots + b_m = b_0(u - u_1)(u - u_2)\ldots(u - u_m);$$

on pourra déterminer B_n.

On aura

$$B_n = \frac{A_n}{b_0(kq^n - u_1)(kq^n - u_2)\ldots(kq^n - u_m)}.$$

Chacun des facteurs du dénominateur a son module plus grand qu'un nombre fixe. La série formée avec les B est donc convergente.

Si, au contraire, pour certaines valeurs de n, $F(kq^n)$ s'annule, le terme correspondant A_n du second membre doit être nul. On pourra alors donner à B_n une valeur arbitraire.

Si kq^n annule $F(x)$, on a

$$kq^n = u = e^{\mu\omega'},$$

$$\mu\omega' = \lambda\omega' + \frac{2ni\pi\omega'}{\omega} + 2mi\pi,$$

$$\mu - \lambda = \frac{2ni\pi}{\omega} + \frac{2mi\pi}{\omega'},$$

c'est-à-dire qu'entre deux racines u et v des équations

$$f(v) = a_0 v^n + a_1 v^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$
$$F(u) = b_0 u^m + b_1 u^{m-1} + \ldots + b_m = 0$$

existe la relation

$$\frac{\log v}{\omega} = \frac{\log u}{\omega'}, \tag{2}$$

en choisissant convenablement la détermination des logarithmes.

ψ_α étant déterminé, on pourra ensuite déterminer $\psi_{\alpha-1}$ par la même méthode. Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant :

1° Si aucune des racines des équations caractéristiques ne satisfait à la relation (2), le problème proposé admet une solution entière et une seule.

2° Dans le cas contraire, il faut que les fonctions H et H_1, outre la relation (1), vérifient d'autres relations, telles que $A_n = 0$. Si ces conditions sont réalisées, il y a une infinité de solutions entières.

11. *Solution de l'équation*

$$\frac{g(x+1)}{g(x)} = h(x).$$

Cherchons d'abord quel doit être l'ordre de $h(x)$ aux points $a+n$ (n variant de $-\infty$ à $+\infty$; nous dirons, pour simplifier, des points congrus à a). Soit μ_n l'ordre de $g(x)$ au point $a+n$; l'ordre de h sera

$$v_n = \mu_{n-1} - \mu_n.$$

h étant entier, v_n est nul ou positif. Ainsi μ_n ne croît pas avec n; il ne peut pas devenir négatif : donc, pour des valeurs de n suffisamment grandes, μ_n reste fixe, v_n est alors nul. Ainsi, parmi les zéros de $h(x)$ qui sont congrus à a, il y en a un nombre limité à droite du point a.

Je vais démontrer que, si cette condition est remplie, on peut résoudre l'équation.

En effet, parmi les zéros de x qui sont congrus à a, prenons celui qui est le plus en avant vers la droite. Désignons-le par a. Prenons pour ordre de $g(x)$ en $a = 0$. L'ordre de la fonction g aux autres points de la suite $a+n$ sera déterminé si l'on connaît l'ordre de h en ces points par l'équation

$$v_n = \mu_{n-1} - \mu_n.$$

Par cette méthode, à chaque système de zéros congrus (h) de h, nous faisons correspondre un système (A) de zéros de g.

Cela posé, soient (a), (b), (c), ... les systèmes incongrus de zéros de h. Formons les systèmes (A), (B), (C), ... Les points de ces systèmes forment un ensemble ayant comme seul point limite le point ∞. On peut donc former une fonction $f(z)$ ayant pour zéros les points de (A), (B), (C), ... Le quotient $\frac{f(x+1)}{f(x)}$ a pour zéros les points de (a), (b), (c), ... Donc

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = h(x) \times e^{\psi(x)}.$$

Soit maintenant φ une fonction entière vérifiant la relation

$$\varphi(x+1) - \varphi(x) = -\psi(x).$$

Le produit

$$\pi(x) = e^{\varphi(x)} \times f(x)$$

est une solution de la question.

On obtiendra toutes les autres en multipliant π par une fonction entière ayant pour période 1.

On résout de la même façon l'équation

$$\frac{g(x+\omega)}{g(x)} = h(x).$$

12. *Résolution du système*

$$\frac{g(x+\omega)}{g(x)} = h(x),$$

$$\frac{g(x+\omega')}{g(x)} = h_1(x).$$

Les fonctions h et h_1 doivent être telles qu'on puisse intégrer séparément chacune des équations

De plus, elles doivent vérifier la relation

$$(1) \qquad \frac{h(x+\omega')}{h(x)} = \frac{h_1(x+\omega)}{h_1(x)}.$$

Enfin l'intégrale $\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx$ prise le long du parallélogramme $(x_0, x_0+\omega, x_0+\omega', x_0+\omega+\omega')$ doit être égale à $2n\pi i$, n n'étant pas négatif si l'on donne à $\omega\omega'$ la disposition ordinaire. Cette intégrale est

$$(2)\qquad \int_{x_0}^{x_0+\omega} \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx - \int_{x_0}^{x_0+\omega} \frac{h'_1(x)}{h_1(x)}\,dx.$$

En vertu de la relation (1), cette différence est un multiple de $2i\pi$. Mais il faut, de plus, que ce multiplicateur soit positif.

Si ces conditions sont remplies, le problème est possible, pourvu que le multiplicateur ne soit pas nul.

En effet, soit $\pi(x)$ une solution (convenablement choisie) de la première équation. On devra avoir

$$g(x) = \pi(x)\,\psi_\omega(x).$$

On déterminera ψ par la condition

$$\frac{\psi_\omega(x+\omega')}{\psi_\omega(x)} = h_1(x) \times \frac{\pi(x)}{\pi(x+\omega')}.$$

En vertu de la relation (1), le second membre admet la période ω. On peut conclure qu'il est entier. En effet, si a est un zéro de $h(x)$, la fonction $\pi(x)$ n'admet comme zéros congrus à a par rapport à ω que ceux qui sont compris dans la série $a - p\omega$, p étant positif; $\pi(x+\omega')$ a donc des zéros dont l'affixe est $a - \omega' - p\omega$ sans avoir tous ceux qui sont compris dans cette formule. Ces zéros doivent donc se trouver au numérateur, car sans cela le second membre ne serait pas périodique.

On est donc ramené à la question suivante : *Étant donnée une fonction $\varphi(x)$ admettant la période ω, trouver une autre fonction périodique ψ, telle que l'on ait*

$$\frac{\psi_\omega(x+\omega')}{\psi_\omega(x)} = \varphi_\omega(x).$$

On pourra, par la méthode du numéro précédent, calculer *a priori* l'ordre minimum de ψ en chaque point. Il est possible de former une fonction périodique F ayant en chaque point un ordre égal à celui que nous venons de déterminer. Elle vérifiera la relation

$$\frac{F_\omega(x+\omega')}{F_\omega(x)} = \varphi_\omega(x)\, e^{f(x)}.$$

$e^{f(x)}$ admettant la période ω, on doit avoir

$$f(x) = \frac{2\alpha i\pi x}{\omega} + f_1(x),$$

f_1 ayant la période ω.

On pourra donc trouver une fonction $\mu(x)$, admettant la période ω, telle que l'on ait

$$\mu(x+\omega') - \mu(x) = f_1(x) - A,$$

A étant une constante.

Le produit

$$\psi_1(x) = F_\omega(x)\, e^{\mu(x)}$$

vérifie la relation

$$\frac{\psi_1(x+\omega')}{\psi_1(x)} = \varphi_\omega(x)\, e^{-\frac{2\alpha\pi i x}{\omega} - A}.$$

La fonction entière

$$g_1(x) = \pi(x)\,\psi_1(x)$$

satisfait aux deux équations

$$\frac{g_1(x+\omega)}{g_1(x)} = h(x),$$

$$\frac{g_1(x+\omega')}{g_1(x)} = h_1(x)\, e^{-\frac{2\alpha\pi i x}{\omega} - A}.$$

La construction de $g_1(x)$ montre qu'on peut choisir un parallélogramme $(x_0, x_0+\omega, x_0+\omega', x_0+\omega+\omega')$ à l'intérieur duquel il n'y a pas de zéros de $g_1(x)$. En écrivant cette condition, on trouve

$$2i\pi\alpha = \int_{x_0}^{x_0+\omega'} \frac{h'(x)}{h(x)}\,dx - \int_{x_0}^{x_0+\omega} \frac{h'_1(x)}{h_1(x)}\,dx.$$

Donc, en vertu de la relation (2), α est positif. En prenant le produit de α fonctions θ convenablement choisies, on formera un produit $\lambda(x)$ satisfaisant aux équations

$$\frac{\lambda(x+\omega)}{\lambda(x)} = 1,$$

$$\frac{\lambda(x+\omega')}{\lambda(x)} = e^{-\frac{2\alpha\pi i x}{\omega} - A}.$$

La solution de la question sera alors

$$g(x) = g_1(x)\, h(x).$$

C'est évidemment la seule.