B. BAILLAUD

Exposition de la méthode de M. Gyldén pour le développement des perturbations des comètes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 2e série, tome 5 (1876), p. 355-398

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1876_2_5__355_0>

EXPOSITION

DE LA

MÉTHODE DE M. GYLDEN

POUR LE

DÉVELOPPEMENT DES PERTURBATIONS DES COMÈTES,

PAR M. B. BAILLAUD,

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE, PROFESSEUR AU LYCÉE CHARLEMAGNE.

INTRODUCTION.

1. Dans un Mémoire couronné par l'Académie des Sciences de Paris (*Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes*, *Supplément aux Comptes rendus*, t. I), Hansen a proposé en 1847, pour le développement analytique des perturbations des comètes, une méthode nouvelle, consistant essentiellement à partager l'orbite de la comète en plusieurs parties, et à former des développements particuliers pour chacune d'elles. Malgré l'accroissement de convergence qui en résulte, la méthode de Hansen n'a pas été appliquée, la multiplicité des développements diminuant singulièrement les avantages que la méthode semblait avoir, et l'on continua à calculer les perturbations d'année en année par la méthode des quadratures. En juin 1869, M. Hugo Gylden publia, dans le *Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg*, un Mémoire sur le même sujet. M. Gylden reprend l'idée de Hansen, e réussit par un artifice ingénieux, en introduisant les fonctions elliptiques, à augmenter la convergence à la fois par rapport aux deux va-

riables dont dépendent les positions de la comète et de la planète perturbatrice. Ce premier Mémoire de M. Gylden fut suivi de plusieurs autres insérés dans les Recueils des Académies de Saint-Pétersbourg, de Copenhague, de Stockholm, et relatifs à la théorie des fonctions elliptiques. Ces derniers Mémoires renferment un grand nombre de méthodes et de résultats remarquables, et intéressent autant les géomètres que les astronomes.

2. Nous nous sommes proposé, dans ce travail, d'exposer aussi simplement et aussi brièvement qu'il nous a été possible de le faire la nouvelle méthode de calcul des perturbations. Les idées de Hansen étant peu répandues, nous en avons fait une exposition générale. Nous avons terminé ce Mémoire par un exemple numérique destiné à montrer dans quelles conditions la méthode de M. Gylden peut s'appliquer avantageusement. Pour y parvenir plus clairement nous avons choisi l'exemple qui avait été traité par Hansen dans le Mémoire cité plus haut, c'est-à-dire le calcul des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke, et nous avons divisé l'orbite de la comète comme l'avait fait Hansen lui-même. On verra que, dans ces conditions, la méthode de M. Gylden ne s'applique pas : l'orbite doit être divisée en un plus grand nombre de parties, de telle façon que, dans chacune d'elles, la distance des deux astres varie surtout en raison du déplacement de la planète. Néanmoins il n'est pas nécessaire de multiplier beaucoup le nombre des points de division pour que la méthode puisse être appliquée; cinq ou six pourront suffire, et, comme on augmente beaucoup la convergence des développements *par rapport aux deux variables*, l'avantage de la méthode ne peut être contesté.

3. Soient

x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une comète par rapport à des axes passant par le centre du Soleil;
x', y', z' celles d'une planète perturbatrice;
m' la masse de cette planète;
Δ la distance de la planète à la comète;
r' celle de la planète au Soleil.

Les équations du mouvement de la comète sont

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{x}{r^3}=\mu\frac{\partial\Omega}{\partial x},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}+\mu\frac{y}{r^3}=\mu\frac{\partial\Omega}{\partial y},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}+\mu\frac{z}{r^3}=\mu\frac{\partial\Omega}{\partial z},$$

μ désignant un nombre constant pour tout le système solaire, et Ω la quantité

$$m'\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{xx'+yy'+zz'}{r'^3}\right);$$

on a supposé nulle la masse de la comète.

A cause de la petitesse de la quantité Ω, on a coutume d'intégrer d'abord les équations précédentes en y supposant Ω nul; puis on regarde les intégrales du mouvement elliptique ainsi obtenu comme représentant encore le mouvement vrai, ce qui est toujours possible si l'on regarde les constantes introduites par l'intégration comme des fonctions du temps. On peut même faire en sorte que non-seulement x, y, z, mais aussi leurs dérivées premières, conservent les mêmes formes dans le mouvement vrai que dans le mouvement elliptique. On obtient ainsi six équations entre les dérivées par rapport au temps des éléments du mouvement elliptique, ces éléments eux-mêmes et le temps.

4. L'intégration des équations du mouvement elliptique conduit à introduire, au lieu des coordonnées rectangulaires x, y, z, les coordonnées polaires dans le plan de l'orbite, et à remplacer la variable angulaire dans ce plan par l'anomalie moyenne. Pour les besoins de l'Astronomie, on est ainsi amené à conclure des variations des éléments du mouvement elliptique celles du rayon vecteur, de l'anomalie moyenne et de la latitude ou plutôt de son sinus; mais il est clair qu'il n'y a là que des transformations faciles, et que la véritable difficulté de la méthode réside dans la formation des dérivées de Ω par rapport aux éléments du mouvement elliptique.

Le premier terme $\frac{m'}{\Delta}$ de la fonction perturbatrice étant beaucoup plus grand que le second quand la distance des deux astres est trèspetite, et ses dérivées partielles dépendant de $\frac{1}{\Delta^3}$, c'est la formation de cette quantité qui doit présenter le plus de difficultés, et c'est à son étude que nous nous bornerons dans ce travail.

Δ dépendant des anomalies moyennes de la comète et de la planète, ou de variables équivalentes, se développera en une série périodique de sinus et de cosinus de multiples de ces variables. Comme Δ^2 est de la forme

$$r^2+r'^2-\mathrm{A}rr'\cos f\cos f'-\mathrm{B}rr'\sin f\sin f'-\mathrm{C}rr'\cos f\sin f'-\mathrm{D}rr'\sin f\cos f',$$

où r et r' désignent les rayons vecteurs de la comète et de la planète, f et f' leurs anomalies vraies, on doit d'abord former les quantités

$$\begin{array}{lll} r^2, & r\cos f, & r\sin f, \\ r'^2, & r'\cos f', & r'\sin f'. \end{array}$$

Il est évident d'ailleurs que la connaissance de ces six quantités équivaut à celle des positions de la comète et de la planète dans leurs orbites, et par conséquent doit suffire pour former toutes les quantités dont dépend le calcul des perturbations.

I.

5. Soient

a le demi-grand axe;
e l'excentricité de l'orbite de la comète;
u son anomalie excentrique;
t le temps.

On a les relations bien connues

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= a(1-e\cos u), \\ r\cos f &= a(\cos u-e), \\ r\sin f &= a\sqrt{1-e^2}\sin u, \\ n\,dt &= \frac{r}{a}\,du, \end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} r &= \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}, \\ n\,dt &= \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,df. \end{aligned}\right.$$

6. Soient r_1 et r_2 les rayons vecteurs de deux points de l'orbite situés de part et d'autre du grand axe. Il est aisé de représenter, à l'exclusion de tous les autres, les points de l'ellipse compris entre eux dans la portion qui contient le périhélie. Il suffit de former une fonction périodique d'une variable auxiliaire qui ait pour maxima r_1 et r_2 et pour minimum $a(1-e)$. Posons

$$r = A + B\sin x + C\sin^2 x.$$

Cette fonction aura un minimum $a(1-e)$ si l'on peut l'écrire

$$r = a(1-e) + (M\sin x + N)^2, \tag{3}$$

la valeur absolue de M n'étant pas inférieure à celle de N.

r sera maximum quand $\cos x$ sera nul, c'est-à-dire quand x aura l'une des valeurs -90° et $+90^\circ$. Ces valeurs maxima seront r_2 et r_1 si

$$M - N = \sqrt{r_2 - a(1-e)},$$
$$M + N = \sqrt{r_1 - a(1-e)}.$$

Les deux radicaux ayant le même signe, puisque M^2 est plus grand que N^2, on peut les prendre positifs.

La comparaison de la relation (3) avec la première des relations (1), mise sous la forme

$$r = a(1-e) + 2ae\sin^2\frac{u}{2},$$

donne

$$\sin^2\frac{u}{2} = \left(\frac{M}{\sqrt{2ae}}\sin x + \frac{N}{\sqrt{2ae}}\right)^2. \tag{4}$$

Le calcul de M et N sera facilité si l'on pose

$$\frac{M}{\sqrt{2ae}} = \varepsilon\cos\varphi, \quad \frac{N}{\sqrt{2ae}} = \varepsilon\sin\varphi,$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \varphi) = \sqrt{\frac{r_2 - a(1-e)}{r_1 - a(1-e)}}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - 2a(1-e)}{4ae}}.$$

Si l'on prend ε positivement, $\cos\varphi$ sera positif, et, par suite, φ sera compris entre -90° et $+90^\circ$; comme $\operatorname{tang}(45^\circ - \varphi)$ est positive, φ est compris entre -45° et $+45^\circ$.

Les relations précédentes prennent des formes utiles quand on y introduit les anomalies excentriques u_1, u_2, qui correspondent aux points r_1, r_2. On a

$$\sqrt{r_2 - a(1-e)} = \sqrt{2ae}\sin\frac{u_2}{2},$$

$$\sqrt{r_1 - a(1-e)} = \sqrt{2ae}\sin\frac{u_1}{2},$$

puisque $\frac{u_1}{2}$ et $\frac{u_2}{2}$ sont moindres que 180 degrés.

On en conclut

$$\varepsilon\cos\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\sin\frac{u_1}{2} + \sin\frac{u_2}{2}\right)\cdot$$

$$\varepsilon\sin\varphi = \tfrac{1}{2}\left(\sin\frac{u_1}{2} - \sin\frac{u_2}{2}\right)$$

et, par suite,

$$\sin 2\varphi = \frac{1}{2\varepsilon^2}\left(\sin^2\frac{u_1}{2} - \sin^2\frac{u_2}{2}\right) = \frac{r_1 - r_2}{4ae\varepsilon^2},$$

$$\tang(45^\circ - \varphi) = \frac{\sin\frac{u_2}{2}}{\sin\frac{u_1}{2}},$$

(5) $$\varepsilon^2 = \tfrac{1}{2}\left(\sin^2\frac{u_1}{2} + \sin^2\frac{u_2}{2}\right)\cdot$$

Il est aisé d'exprimer r, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$ en fonction de x en partant de la relation (4). Nous remarquerons d'abord qu'en extrayant les racines carrées des deux membres de cette relation on doit écrire

(6) $$\sin\frac{u}{2} = \pm\varepsilon(\cos\varphi\sin x + \sin\varphi),$$

en adoptant le signe supérieur quand u est moindre que u_1 et le signe inférieur quand u est plus grand que u_2, car la quantité entre parenthèses s'annule au périhélie, et en s'annulant change de signe. Elle est d'ailleurs positive pour $x = 90^\circ$, car

$$\varepsilon(\cos\varphi + \sin\varphi) = \sin\frac{u_1}{2}\cdot$$

D'après cela, les formules (1) donnent immédiatement

$$r = a(1 - e + e\varepsilon^2 \sin^2\varphi) + 2ae\varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x - ae\varepsilon^2 \cos^2\varphi \cos 2x,$$

$$r\cos f = a(1 - e - \varepsilon^2 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi) - 2a\varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x + a\varepsilon^2 \cos^2\varphi \cos 2x,$$

$$r\sin f = 2a\varepsilon\sqrt{1-e^2}(\cos\varphi \sin x + \sin\varphi)\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi - \varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin x - \varepsilon^2\cos^2\varphi \sin^2 x},$$

$$n\,dt = \frac{r}{a}\,\frac{2\varepsilon\cos\varphi\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi - \varepsilon^2\sin 2\varphi\sin x - \varepsilon^2\cos^2\varphi\sin^2 x}}.$$

En tenant compte de l'observation relative à la formule (6), on reconnaît aisément que le radical qui entre dans les deux dernières formules est positif.

7. L'expression de r en fonction de l'anomalie excentrique étant analogue à celle de $\frac{1}{r}$ en fonction de l'anomalie vraie, on entrevoit aisément la possibilité de représenter l'arc d'ellipse qui joint les points r_1 et r_2 en passant par l'aphélie. Il faudra poser

$$\frac{1}{r} = A' + B'\sin x + C'\sin^2 x;$$

r aura pour maximum $a(1+e)$, si cette valeur de $\frac{1}{r}$ peut s'écrire

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1+e)} + (M'\sin x + N')^2,$$

en supposant que la valeur absolue de M′ ne soit pas moindre que celle de N′, et pour minima r_1 et r_2, si

$$M' - N' = \sqrt{\frac{1}{r_2} - \frac{1}{a(1+e)}},$$

$$M' + N' = \sqrt{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{a(1+e)}},$$

les radicaux étant encore pris positivement.

En identifiant la valeur précédente de $\frac{1}{r}$ avec celle que donne la première des formules (2), on trouve

$$(4\ bis)\qquad \cos^2\frac{f}{2} = \frac{a(1-e^2)}{2e}(M'\sin x + N')^2,$$

On facilitera ici le calcul de M′ et de N′ en posant

$$M'\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{2e}}=\varepsilon'\cos\varphi',\quad N'\sqrt{\frac{a(1-e^2)}{2e}}=-\varepsilon'\sin\varphi',$$

ce qui donne

$$\tan(45^\circ-\varphi')=\sqrt{\frac{r_2}{r_1}\frac{a(1+e)-r_1}{a(1+e)-r_2}},$$

$$\varepsilon'=\sqrt{(1-e)\frac{a(r_1+r_2)(1+e)-2r_1r_2}{4er_1r_2}},$$

les radicaux étant pris positivement, de sorte que φ' est compris entre -45 et $+45^\circ$.

Par l'introduction des anomalies vraies f_1 et f_2 des points r_1 et r_2, les formules précédentes se simplifient. On a

$$\sqrt{\frac{1}{r_2}-\frac{1}{a(1+e)}}=-\sqrt{\frac{2e}{a(1-e^2)}}\cos\frac{f_2}{2},$$

$$\sqrt{\frac{1}{r_1}-\frac{1}{a(1+e)}}=\sqrt{\frac{2e}{a(1-e^2)}}\cos\frac{f_1}{2},$$

les signes des seconds membres étant déterminés par la considération de ceux de $\cos\frac{f_1}{2}$ et de $\cos\frac{f_2}{2}$. Par suite,

$$\varepsilon'\cos\varphi'=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{f_1}{2}-\cos\frac{f_2}{2}\right),$$

$$\varepsilon'\sin\varphi'=-\frac{1}{2}\left(\cos\frac{f_1}{2}+\cos\frac{f_2}{2}\right)$$

et encore

$$\sin2\varphi'=\frac{1}{2\varepsilon'^2}\left(\cos^2\frac{f_2}{2}-\cos^2\frac{f_1}{2}\right)=\frac{r_1-r_2}{4e\varepsilon'^2r_1r_2}a(1-e^2),$$

$$\tan(45^\circ-\varphi')=-\frac{\cos\frac{f_1}{2}}{\cos\frac{f_2}{2}},$$

$$\varepsilon'^2=\frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{f_1}{2}+\cos^2\frac{f_2}{2}\right). \tag{5 bis}$$

Pour déterminer $\frac{1}{r}$, $\cos f$, $\sin f$ et $n\,dt$ en fonction de x, on remarque

que la relation (4 *bis*) donne

$$\cos\frac{f}{2} = \pm\varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi');$$

mais on doit choisir le signe supérieur, car si la parenthèse change de signe quand on passe à l'aphélie, il en est de même du premier membre, et, pour $x = 90^\circ$, la parenthèse est positive.

On a donc

$$\cos\frac{f}{2} = \varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi'),$$

et l'on en conclut

$$a(1-e^2)\frac{1}{r} = 1 - e + e\varepsilon'^2 + e\varepsilon'^2\sin^2\varphi' - 2e\varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - e\varepsilon'^2\cos^2\varphi'\cos 2x,$$

$$\cos f = \varepsilon'^2 + \varepsilon'^2\sin^2\varphi' - 1 - 2\varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\cos 2x,$$

$$\sin f = 2\varepsilon'(\cos\varphi'\sin x - \sin\varphi')\sqrt{1 - \varepsilon'^2\sin^2\varphi' + \varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\sin^2 x},$$

$$n\,dt = -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\varepsilon'\cos\varphi'\cos x\,dx}{\sqrt{1 - \varepsilon'^2\sin^2\varphi' + \varepsilon'^2\sin 2\varphi'\sin x - \varepsilon'^2\cos^2\varphi'\sin^2 x}},$$

le radical qui entre dans les deux dernières formules étant positif.

8. Les formules précédentes se simplifient beaucoup quand l'un des points de division est situé au périhélie ou à l'aphélie, et les formules ainsi obtenues permettent de représenter l'ellipse partagée en quatre portions. Par une transformation facile, on peut faire en sorte que ces quatre parties soient obtenues en faisant varier la variable de zéro à 360 degrés. Rangeons ces parties dans l'ordre suivant lequel on les rencontre en partant du périhélie et tournant dans le sens du mouvement de la comète. Les formules relatives à la première et à la quatrième se déduiront de celles du n° 6, dans lesquelles x varie de -90° à $+90^\circ$, ou si l'on veut de $+270^\circ$ à $+90^\circ$, puisqu'il n'entre pas dans ces formules de sous-multiple de x; pour la deuxième et la troisième partie, on appliquera les formules du n° 7, où x varie de $+90^\circ$ à $+270^\circ$. On fera les substitutions suivantes :

Première et deuxième région : $x = 2y - 90^\circ$,
Troisième et quatrième région : $x = 2y + 90^\circ$,

et l'on obtiendra successivement les quatre régions en faisant varier y de zéro à 90 degrés, de 90 à 180 degrés, de 180 à 270 degrés, de 270 à 360 degrés.

Nous désignerons par E_1, E_2, E_3, E_4 les valeurs de ε ou de ε' dans ces quatre régions, par Φ_1, Φ_2, Φ_3, Φ_4 celles de φ et de φ'. Les formules sont alors les suivantes :

Première région :

$$\Phi_1 = 45°, \quad E_1 = \sqrt{\frac{r - a(1-e)}{2ae}} = \sin\frac{u_1}{2}, \quad \sin\frac{u}{2} = E_1 \sin^2 y,$$

$$r = a(1 - e + \tfrac{3}{4} e E_1^2) - aeE_1^2 \cos 2y + \tfrac{1}{4} aeE_1^2 \cos 4y,$$

$$r\cos f = a(1 - e - \tfrac{3}{4} E_1^2) + aE_1^2 \cos 2y - \tfrac{1}{4} aE_1^2 \cos 4y,$$

$$r \sin f = aE_1 \sqrt{1-e^2}\,(1 - \cos 2y)\sqrt{1 - E_1^2 \sin^4 y},$$

$$n\,dt = \frac{r}{a}\,\frac{2E_1 \sin 2y}{\sqrt{1 - E_1^2 \sin^4 y}}\,dy.$$

Deuxième région :

$$\Phi_2 = -45°, \quad E_2 = \sqrt{(1-e)\,\frac{a(1+e) - r_1}{2er_1}} = \cos\frac{f_1}{2}, \quad \cos\frac{f}{2} = E_2 \sin^2 y,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e + \tfrac{3}{4} eE_2^2 - eE_2^2 \cos 2y + \tfrac{1}{4} eE_2^2 \cos 4y,$$

$$\cos f = \tfrac{3}{4} E_2^2 - 1 - E_2^2 \cos 2y + \tfrac{1}{4} E_2^2 \cos 4y,$$

$$\sin f = E_2 (1 - \cos 2y)\sqrt{1 - E_2^2 \sin^4 y},$$

$$n\,dt = -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2E_2 \sin 2y}{\sqrt{1 - E_2^2 \sin^4 y}}\,dy.$$

Troisième région :

$$\Phi_3 = +45°, \quad E_3 = \sqrt{(1-e)\,\frac{a(1+e) - r_2}{2er_2}} = -\cos\frac{f_2}{2}, \quad \cos\frac{f}{2} = -E_3 \sin^2 y,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r} = 1 - e + \tfrac{3}{4} E_3^2 - eE_3^2 \cos 2y + \tfrac{1}{4} eE_3^2 \cos 4y,$$

$$\cos f = \tfrac{3}{4} E_3^2 - 1 - E_3^2 \cos 2y + \tfrac{1}{4} E_3^2 \cos 4y,$$

$$\sin f = E_3 (\cos 2y - 1)\sqrt{1 - E_3^2 \sin^4 y},$$

$$n\,dt = \frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2)}}\,\frac{2E_3 \sin 2y}{\sqrt{1 - E_3^2 \sin^4 y}}\,dy.$$

Quatrième région :

$$\Phi_4 = -45^\circ,\quad E_4 = \sqrt{\frac{r_2 - a(1-e)}{2ae}} = \sin\frac{u_2}{2},\quad \sin\frac{u}{2} = E_4\sin^2 y,$$

$$r = a(1 - e + \tfrac{3}{4}eE_4^2) - aeE_4^2\cos 2y + \tfrac{1}{4}aeE_4^2\cos 4y,$$

$$r\cos f = a(1 - e - \tfrac{3}{4}E_4^2) + aE_4^2\cos 2y - \tfrac{1}{4}aE_4^2\cos 4y,$$

$$r\sin f = aE_4\sqrt{1-e^2}(\cos 2y - 1)\sqrt{1 - E_4^2\sin^4 y},$$

$$n\,dt = -\frac{r}{a}\frac{2E_4\sin 2y}{\sqrt{1 - E_4\sin^4 y}}\,dy.$$

9. Dans les valeurs de r, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$ données dans les n^{os} 6 et 7, les termes périodiques sont multipliés par ε^2 et ε'^2. Il est manifeste que, si ces nombres ε^2 et ε'^2 sont très-petits, les développements des quantités $r\sin f$, $n\,dt$, $\frac{1}{r}, \ldots$, en séries procédant suivant les multiples de x, convergeront rapidement. D'autre part, les valeurs de ε^2 et ε'^2 données par les formules (5) et (5 *bis*) montrent clairement que les quantités E_1^2, $E_2^2, \ldots$ sont moindres que les quantités ε^2, ε'^2, de sorte que les formules du n° 8 devront être employées quand celles des n^{os} 6 et 7 ne conduiront pas à des développements assez convergents.

10. Il est intéressant d'examiner comment varient les quantités E_1^2, E_2^2 quand le point r_1 occupe sur l'ellipse toutes les positions possibles. On reconnaît de suite qu'à mesure que ce point s'éloigne du périhélie E_1 augmente et E_2 diminue. Il est donc impossible de faire décroître ces deux quantités en même temps; il peut être utile de rechercher le minimum de la somme $E_1^2 + E_2^2$.

Si l'on pose

$$e = \sin\psi,$$

on a les formules bien connues

$$\sqrt{\frac{r}{2a}}\sin\frac{f}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2}\right)\sin\frac{u}{2},$$

$$\sqrt{\frac{r}{2a}}\cos\frac{f}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\cos\frac{u}{2};$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tang}\frac{f}{2} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{tang}\frac{u}{2},$$

$$\frac{df}{\cos^2\frac{f}{2}} = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)\frac{du}{\cos^2\frac{u}{2}},$$

$$r\,df = \cos\psi\,du.$$

L'expression $E_1^2 + E_2^2$, égale à

$$\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{f}{2},$$

a pour dérivée

$$\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}\,du - \sin\frac{f}{2}\cos\frac{f}{2}\,df.$$

En remplaçant $\sin\frac{u}{2}\cos\frac{u}{2}$ et $\sin\frac{f}{2}\cos\frac{f}{2}$ par des quantités proportionnelles, et de même du et df, on voit que le signe de cette dérivée est celui de

$$\frac{r^2}{a^2} - \cos^2\psi.$$

Il s'ensuit que la somme considérée est minimum pour

$$r = a\cos\psi,$$

Alors

$$\sin f = \sin u, \quad f = \pi - u,$$

et, par suite,

$$\cos\frac{f}{2} = \sin\frac{u}{2} \quad \text{et} \quad E_2^2 = E_1^2.$$

De plus la troisième relation citée donne

$$\operatorname{tang}^2\frac{f}{2} = \operatorname{tang}\left(45^\circ + \frac{\psi}{2}\right),$$

d'où

$$\sin^2\frac{u}{2} + \cos^2\frac{f}{2} = 1 - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

On voit que, pour le minimum, chacune des quantités E_1^2 et E_2^2 est moindre que $\frac{1}{2}$, et que ces quantités sont d'autant plus petites que l'ellipse est plus excentrique. Les mêmes conclusions s'appliquent visiblement aux quantités E_3^2 et E_4^2.

11. Ce résultat conduit à rechercher pour quelles positions du point r_1 les quantités E_1^2 et E_2^2 sont moindres que $\frac{1}{2}$.

Il faut d'abord que u soit un angle aigu, à cause de la valeur de E_1. La relation

$$\cos^2\frac{f}{2} < \tfrac{1}{2}$$

est satisfaite toutes les fois que l'angle f est obtus.

Si, au foyer de l'ellipse d'où partent les rayons vecteurs, on mène une perpendiculaire au grand axe, elle rencontre l'ellipse en un point dont la distance au foyer est $a(1-e^2)$. L'arc d'ellipse compris entre ce point et le sommet du petit axe est le lieu des points considérés.

12. Dans le cas où l'on emploie les formules des n^{os} **6** et **7**, il est intéressant de rechercher encore quels doivent être les points de séparation pour que la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ soit minimum. Comme

$$\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = \frac{r_1 + r_2 - 2a(1-e)}{4ae} + \frac{1-e}{4e}\left[a(1+e)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - 2\right],$$

r_1 et r_2 étant indépendants l'un de l'autre, la somme considérée sera minimum quand on aura

$$r_1 = r_2 = a\sqrt{1-e^2} = a\cos\psi.$$

Ce résultat ne différant de celui du n° **10** que par la situation du point r_2, la plupart des calculs indiqués à cette occasion s'appliquent ici; on trouve

$$\sin^2\frac{u_1}{2} = \cos^2\frac{f_1}{2} = \sin^2\frac{u_2}{2} = \cos^2\frac{f_2}{2},$$

de sorte que

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 \quad \text{et} \quad \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 = 2\sin^2\frac{u_1}{2} = 1 - \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}.$$

Les points de division qui correspondent au minimum de la somme $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ sont donc les mêmes que dans le cas du partage de l'ellipse en quatre parties, et les valeurs minima de $\varepsilon^2 + \varepsilon'^2$ et de $E_1^2 + E_2^2$ sont égales. Il ne faudrait pas en conclure que l'on ne gagne rien à employer les formules du n° 8. Celles-ci ne diffèrent de celles des nos 6 et 7 que par un changement d'argument qui ne modifie vraiment pas les formules et par la substitution

$$E^2 = 2\varepsilon^2,$$

de sorte que, dans le cas du minimum, le module E^2 des formules du n° 8 est réellement la moitié de celui des formules des nos 6 et 7.

13. Il peut être nécessaire d'augmenter beaucoup, dans une portion peu étendue de l'orbite, la convergence des développements. On y parvient aisément en ne représentant que cette partie de l'ellipse. Soient r_3 et r_1 les rayons vecteurs de deux points situés d'un même côté de l'axe. Supposons, pour fixer les idées, que le point r_1 soit dans la première moitié de l'ellipse, et le point r_3 entre le point r_1 et le périhélie.

Les formules du n° 8 permettent de représenter l'arc compris entre le périhélie et le point r_1 au moyen d'une variable y variant de zéro à $\frac{\pi}{2}$. Si l'on veut ne représenter que l'arc $r_3 r_1$, il suffit d'exclure les points voisins du périhélie, et, pour représenter l'arc compris entre le périhélie et r_1, on exclura les points compris entre r_1 et r_3. On est ainsi conduit à poser

$$\sin y = h \sin z, \quad \cos y = l \cos u,$$

avec la relation

$$h^2 + l^2 = 1,$$

h et l étant les sinus et cosinus de l'anomalie y relative au point r_3.

En faisant varier z de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on représentera l'arc compris entre le périhélie et r_3, et, en faisant varier u de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on représentera l'arc $r_3 r_1$. Les termes périodiques de r, $r\cos f$, ... seront multipliés par des puissances de l ou de h; si l'arc $r_3 r_1$ est suffisamment petit, l sera très-petit, de sorte qu'on aura notablement augmenté la convergence.

On trouvera dans le Mémoire cité de Hansen les formules relatives à ces anomalies u, que Hansen nomme *anomalies intermédiaires*. Nous remarquerons seulement qu'elles donnent le moyen de partager l'ellipse en autant de parties qu'on voudra et d'augmenter en quelque sorte indéfiniment la convergence des développements en séries.

14. La théorie exposée dans les paragraphes précédents est entièrement conforme aux idées de Hansen. L'introduction des fonctions elliptiques permet d'augmenter encore la convergence des développements.

Supposons qu'on ait partagé l'orbite de la comète en deux parties, et que les points de division soient symétriques par rapport au grand axe. L'anomalie partielle relative à la partie inférieure est alors définie par l'équation

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\,\varepsilon\sin x,$$

où

$$\varepsilon = \sin\frac{u_1}{2},$$

et l'on a

$$\begin{aligned}
r &= a(1-e) + 2ae\varepsilon^2\sin^2 x,\\
r\cos f &= a(1-e) - 2a\varepsilon^2\sin^2 x,\\
r\sin f &= 2a\varepsilon\sqrt{1-e^2}\sin x\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x},\\
n\,dt &= \frac{(1-e+2e\varepsilon^2\sin^2 x)\,2\varepsilon\cos x}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}}\,dx,
\end{aligned}$$

et les formules relatives à la partie supérieure sont

$$\cos\frac{f}{2} = \varepsilon'\sin x,$$

où

$$\varepsilon' = \sin\frac{f_1}{2},$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{a(1-e^2)}{r} &= 1-e+2e\varepsilon'^2\sin 2x,\\
\cos f &= -1+2\varepsilon'^2\sin^2 x,\\
\sin f &= 2\varepsilon'\sin x\sqrt{1-\varepsilon'^2\sin^2 x},\\
n\,dt &= -\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2\varepsilon'\cos x}{\sqrt{1-\varepsilon'^2\sin^2 x}}\,dx.
\end{aligned}$$

15. Nous poserons pour la partie inférieure

$$x = \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega \quad (\text{mod. } \varepsilon),$$

E désignant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module ε. Alors les valeurs de r, $r\cos f$, ... deviennent

$$r = a(1-e) + 2ae\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega,$$

$$r\cos f = a(1-e) - 2a\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega,$$

$$r\sin f = 2a\varepsilon\sqrt{1-e^2}\,\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega\,\Delta\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega,$$

$$n\,dt = \frac{2\mathrm{E}}{\pi}\left(1 - e + 2e\varepsilon^2 \sin^2\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega\right) 2\varepsilon\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega.d\omega,$$

et ces valeurs peuvent être développées en séries très-convergentes procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de ω.

On a d'abord

$$\sin\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega\,\Delta\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega = -\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\,\frac{d}{d\omega}\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega.$$

Le facteur $n\,dt$ exige le développement de

$$\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega\,\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega.$$

Posons

$$\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega = \frac{\pi}{2} - \mathrm{am}\,y \quad (\text{mod. } \varepsilon);$$

l'expression proposée deviendra

$$\cos^2\mathrm{am}\,y\,\sin\mathrm{am}\,y.$$

C'est une fonction uniforme doublement périodique; elle a les mêmes périodes que $\sin\mathrm{am}\,y$; elle a deux infinis simples et deux infinis doubles; elle change de signe quand y augmente de E. C'est donc une fonction linéaire de $\sin\mathrm{am}\,y$ et de sa seconde dérivée, c'est-à-dire de $\cos\mathrm{am}\,\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega$ et de sa dérivée seconde. En calculant cette seconde dérivée, on trouve en effet

$$\varepsilon^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega \cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\right)^2 \frac{d^2}{d\omega^2}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi} + \tfrac{1}{2}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega.$$

Les formules relatives à la partie inférieure deviennent ainsi

$$r = a(1-e) + 2ae\varepsilon^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega,$$

$$r\cos f = a(1-e) - 2a\varepsilon^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega,$$

$$r\sin f = -2a\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\right)\varepsilon\frac{d}{d\omega}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega,$$

$$n\frac{dt}{d\omega} = 2\left(\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\right)\varepsilon\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega + 2e\left(\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\right)\varepsilon\frac{d^2}{d\omega^2}\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega.$$

On sait d'ailleurs développer $\sin^2\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega$, $\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega$, et par suite sa dérivée seconde en séries toujours convergentes procédant suivant les cosinus des multiples de ω. On a effectivement

$$\varepsilon\cos\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega = \frac{2\mathrm{E}}{\pi}4\sqrt{q}\left(\frac{1}{1+q}\cos\omega + \frac{q}{1+q^3}\cos 3\omega + \frac{q^2}{1+q^5}\cos 5\omega + \ldots\right),$$

$$\varepsilon^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\omega = 8\left(\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2} + \frac{2q^2}{1-q^4} + \frac{3q^3}{1-q^6} + \ldots\right)$$
$$- 8\left(\frac{\pi}{2\mathrm{E}}\right)^2\left(\frac{q}{1-q^2}\cos 2\omega + \frac{2q^2}{1-q^4}\cos 4\omega + \frac{3q^3}{1-q^6}\cos 6\omega + \ldots\right),$$

où

$$q = e^{-\pi\frac{\mathrm{E}_1}{\mathrm{E}}},$$

E_1 étant l'intégrale elliptique complète de première espèce, relative au module ε_1 complémentaire de ε.

16. Le développement des formules relatives à la partie supérieure exige plus d'attention.

Posons encore

$$x = \mathrm{am}\frac{2\mathrm{E}'}{\pi}\omega \quad (\mathrm{mod.}\ \varepsilon'),$$

E′ étant l'intégrale complète de première espèce relative au module ε', et ω variant de $\frac{\pi}{2}$ à $3\frac{\pi}{2}$.

Nous aurons

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1-e+2e\varepsilon'^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega},$$

$$\cos f = -1 + 2\varepsilon'^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega,$$

$$\sin f = -2\varepsilon'\,\frac{\pi}{2E'}\,\frac{d}{d\omega}\cos\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega,$$

$$n\,dt = -\frac{2\varepsilon'}{\sqrt{1-e^2}}\,\frac{2E'}{\pi}\,\frac{r^2}{a^2}\cos\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega\,d\omega,$$

de sorte que la véritable difficulté réside dans le développement de r qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{1+\frac{2e}{1-e}\varepsilon'^2\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}.$$

On peut procéder de la manière suivante.

Soient

$$\varepsilon'_1 = \sqrt{1-\varepsilon'^2}$$

et

$$\sqrt{\frac{2e}{1-e}} = \mathrm{tang\,am}\,\nu \quad (\mathrm{mod.}\ \varepsilon'_1);$$

alors

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{1+\varepsilon'^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,\nu\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 - \frac{\varepsilon'^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,\nu\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}{1+\varepsilon'^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,\nu\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{2E'}{\pi}\omega}.$$

Remplaçons $\mathrm{tang\,am}(\nu, \varepsilon'_1)$ par

$$\sqrt{-1}\,\sin\mathrm{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon');$$

nous aurons

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \frac{\varepsilon'^2 \sin^2 \operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E'}{\pi}\omega}{1 - \varepsilon'^2 \sin^2 \operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E'}{\pi}\omega},$$

ce qui peut s'écrire

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon')}{\Delta \operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon')}$$
$$\times \frac{\varepsilon'^2 \sin\operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \cos\operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \Delta \operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E'}{\pi}\omega}{1 - \varepsilon'^2 \sin^2 \operatorname{am}(\nu\sqrt{-1}, \varepsilon') \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E'}{\pi}\omega},$$

et d'après des formules connues

$$\frac{r}{a(1+e)} = 1 + \sqrt{-1}\, \frac{\sin\operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1) \cos\operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1)}{\Delta \operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1)} \frac{d\Pi\left(\nu\sqrt{-1}, \frac{2E'}{\pi}\omega\right)}{d\left(\frac{2E'}{\pi}\omega\right)},$$

la fonction Π ayant la signification que lui attribue Jacobi.

Les deux facteurs du dernier terme peuvent être développés en séries procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de ω : on utilisera pour le premier la relation

$$\frac{\sin\operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1) \cos\operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1)}{\Delta \operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1)} = -\frac{1}{\varepsilon'^2_1} \frac{d}{d\nu} \log \Delta \operatorname{am}(\nu, \varepsilon'_1).$$

17. Le développement de r dans le dernier cas peut encore s'effectuer par la formule du binôme. En remplaçant dans la valeur de r $\sin^2 \operatorname{am} \frac{2E'}{\pi}\omega$ par son développement, on aura

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{A + Bq\cos 2\omega + Cq^2 \cos 4\omega + \ldots},$$

A, B, C étant des coefficients numériques.

Le second membre de cette égalité peut s'écrire

$$\frac{1}{A} \frac{1}{1 + \frac{B}{A} q \cos 2\omega + R},$$

où

$$R = \frac{1}{A}(Cq^2 \cos 4\omega + \ldots).$$

Si l'on pose

$$\varphi = \frac{1}{1 + \frac{B}{A} q \cos 2\omega},$$

on aura

$$\frac{r}{a(1+e)} = \frac{1}{A} \frac{1}{1 + \frac{B}{A} q \cos 2\omega} \frac{1}{1+\varphi}.$$

A cause de la petitesse de φ, le dernier facteur pourra être développé en une série très-convergente. Le précédent et son carré qui entre dans la valeur de $n\,dt$ peuvent l'être par différentes méthodes. Si l'on pose

$$\frac{B}{A} q = \frac{2a}{1+a^2},$$

ce facteur devient

$$\frac{1+a^2}{1 + 2a \cos 2\omega + a^2},$$

dont le développement est

$$\frac{1+a^2}{1-a^2}(1 + 2a \cos 2\omega + 2a^2 \cos 4\omega + \ldots)$$

son carré est

$$\frac{(1+a^2)^2}{(1-a^2)^3}[1 + a^2 + 2a \cos 2\omega + (3-a^2)a^2 \cos 4\omega + \ldots].$$

18. Les formules développées dans les trois derniers paragraphes permettent de développer toutes les quantités nécessaires à la détermination de la position de la comète en des séries très-convergentes procédant suivant les multiples des anomalies partielles, en supposant que l'orbite ait été divisée en deux parties, les points de division étant symétriques par rapport au grand axe.

Comme on le verra dans la suite de ce travail, une telle division de l'orbite est très-souvent insuffisante. Il sera très-facile d'introduire de nouveaux points de division sans recommencer le calcul. Si l'on veut en placer un au périhélie, il suffira de poser

$$\sin\omega = +\sin^2\omega_1 = \frac{1-\cos 2\omega_1}{2}.$$

En donnant à ω_1 les valeurs de zéro à $\frac{\pi}{2}$, on n'obtiendra que la moitié de la partie inférieure qui commence au périhélie. Posons de même

$$\sin\omega = -\sin^2\omega_2 = -\frac{1-\cos 2\omega_2}{2},$$

et faisons varier ω_2 de $-\frac{\pi}{2}$ à zéro, nous aurons représenté l'autre moitié de la partie inférieure de l'orbite.

La partie supérieure de l'orbite ne présentera pas plus de difficultés. Si l'on veut placer un point de division à l'aphélie, on fera les mêmes substitutions, et l'on fera varier ω_1 de $\frac{\pi}{2}$ à π pour la première moitié, et de π à $\frac{3\pi}{2}$ pour la seconde.

S'il est encore nécessaire de partager les portions inférieures de l'orbite, on posera, comme il a été dit,

$$\cos\omega_1 = l\cos u,$$
$$\sin\omega_1 = h\sin z,$$

où

$$h^2 + l^2 = 1,$$

et l'application répétée de telles substitutions permettra de diviser l'orbite en autant de parties que l'on voudra.

II.

19. Dans la Section précédente on a exposé, d'après les idées de Hansen et de M. Gylden, le moyen de représenter par des séries très-convergentes procédant suivant les sinus et cosinus des multiples d'un certain angle les quantités r, $r\cos f$, $r\sin f$, $n\,dt$. Il est aisé de tirer de ces développements celui de Δ^2 au moyen des considérations suivantes.

Envisageant chacune des planètes et des comètes du système solaire comme décrivant une ellipse suivant les lois de Kepler, on aperçoit de suite que la connaissance de leurs positions initiales et du mouvement de l'une d'elles conduit à la connaissance du mouvement de toutes les autres.

Désignons par ω l'anomalie partielle pour la portion de l'orbite de la comète que nous voulons étudier, par M l'anomalie moyenne de la comète, par M′ celle de la planète, par n' son moyen mouvement et posons

$$M' = c' + n' t,$$

c' désignant une constante dépendant de la position initiale de la planète et changeant de valeur à chaque révolution de la comète.

Si l'on écrit

$$M' = c' + \frac{n'}{n} nt,$$

on voit qu'un calcul bien simple donnera le développement de M′ en une série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de ω. D'autre part, les formules de mouvement elliptique permettent d'en déduire les développements de

$$r', \quad r' \cos f', \quad r' \sin f'.$$

Quelques multiplications permettront enfin d'en déduire le développement de Δ^2, développement qui se présentera sous la forme suivante :

$$\Delta^2 = P_0 + P_1 \sin\omega + P_2 \cos 2\omega + P_3 \sin 3\omega + \ldots,$$

P_0, P_1, P_2, ... étant des séries procédant suivant les sinus et cosinus de c' et de ses multiples.

Nous supposerons que les points de divisions de l'orbite aient été tellement choisis, que les coefficients des polynômes P_1, P_2, ... soient très-petits par rapport à ceux de P_0 .Il faut pour cela que la variation de Δ^2 dépende surtout de la variation de c' et très-peu de celle de ω. L'exemple qui sera développé plus loin montrera clairement la portée de cette condition.

20. On a vu que le calcul des perturbations que la planète produit dans le mouvement elliptique de la comète dépend surtout de la for-

mation de la quantité $\frac{1}{\Delta^3}$. Le développement en série de cette quantité est la partie vraiment difficile du calcul. Δ^2 est représenté par une série procédant suivant les sinus et cosinus des multiples de c' et des multiples de ω. Cette série a un assez grand nombre de termes, et les premiers sont souvent du même ordre de grandeur. L'introduction des anomalies partielles a permis d'augmenter la convergence relativement à la variable ω. Nous allons exposer actuellement le procédé ingénieux au moyen duquel M. Gylden augmente la convergence par rapport à c'.

Soit R l'ensemble de tous les termes qui suivent P_0;

$$\Delta^2 = P_0 + R,$$

d'où

$$\Delta^{-3} = P_0^{-\frac{3}{2}} - \tfrac{3}{2} R P_0^{-\frac{5}{2}} + \frac{3.5}{2.4} R^2 P_0^{-\frac{7}{2}} \ldots.$$

Les puissances entières successives de R s'obtiennent aisément par la multiplication. La véritable difficulté réside dans la formation des puissances de P_0.

Soit

$$P_0 = A + A_1 \sin c' + A_2 \sin 2c' + \ldots + B_1 \cos c' + B_2 \cos 2c' + \ldots.$$

Les coefficients A_2, B_2 seront ordinairement très-petits par rapport à A, A_1, B_1. Si l'on écrit

$$P_0 = A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c' + H,$$

on aura

$$P_0 = (A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c')\left(1 + \frac{H}{A + A_1 \sin c' + B_1 \cos c'}\right).$$

Toute la difficulté du développement des puissances de P_0 réside dans celui des puissances du premier facteur. Posons

$$A_1 = -M \sin\varphi, \quad B_1 = M\cos\varphi, \quad \frac{M}{A} = \mu.$$

Le premier facteur de P_0 devient

$$A[1 + \mu \cos(c' + \varphi)].$$

Si la distance des deux astres peut devenir très-grande dans la partie considérée de l'orbite, le coefficient A sera grand, ce qui facilitera la formation des puissances négatives de P_0. Si cette distance peut devenir petite, μ sera presque égal à l'unité, et le développement des puissances négatives de

$$A[1 + \mu \cos(c' + \varphi)]$$

conduira à une série très-peu convergente.

21. Ce facteur peut s'écrire

$$A(1 + \mu)\left[1 - \frac{2\mu}{1 + \mu}\sin^2\tfrac{1}{2}(c' + F)\right].$$

Posons

$$\frac{2\mu}{1 + \mu} = k^2, \quad \tfrac{1}{2}(c' + F) = \operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi \quad (\text{mod. } k),$$

K étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module k. Le facteur précédent deviendra

$$A(1 + \mu)\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi \quad (\text{mod. } k).$$

Ce facteur et ses puissances pourront être développés en séries très-convergentes de sinus et de cosinus des multiples de ξ.

L'argument ξ devra être substitué à l'argument c'. La substitution devra être effectuée partout, de sorte qu'il sera nécessaire de former les développements des sinus et cosinus des multiples de $\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$, des puissances des sinus et cosinus de $\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$. Ces questions peuvent être résolues de bien des manières. Il s'agit ici de calculs numériques bien plus que de développements analytiques. M. Gylden utilise une méthode appliquée à d'autres questions par Hansen dans plusieurs de ses Mémoires.

22. Soit, par exemple, à développer

$$\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi.$$

Posons

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

K′ étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module k' complémentaire de k, et

$$\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi = X_0^{(2n)} - \frac{8q}{1-q^2}X_2^{(2n)}\cos 2\xi$$
$$- \frac{16q^2}{1-q^4}X_4^{(2n)}\cos 4\xi - \ldots - \frac{4.(2q)^i}{1-q^{2i}}X_{2i}^{(2n)}\cos 2i\xi - \ldots.$$

D'après la relation facile à établir

$$\frac{d^2\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi}{\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 d\xi^2} = 2n(2n-1)\sin^{2n-2}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$$
$$-4n^2(1+k^2)\sin^{2n}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi + 2n(2n+1)k^2\sin^{2n+2}\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi,$$

on aura l'équation récurrente

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned} &4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 X_{2i}^{(2n)} = -2n(2n-1)X_{2i}^{(2n-2)} \\ &\qquad + 4n^2(1+k^2)X_{2i}^{(2n)} - 2n(2n+1)k^2X_{2i}^{(2n+2)}, \end{aligned}\right.$$

équation qui permet de calculer de proche en proche les coefficients de même rang dans les développements des puissances successives de $\sin\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$.

Posons à cet effet

$$\frac{X_{2i}^{(2n)}}{X_{2i}^{(2n-2)}} = p_{2n},$$

l'équation (a) deviendra

$$0 = -2n(2n-1) + \left[4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right]p_{2n} - 2n(2n+1)k^2p_{2n}p_{2n+2}.$$

Il est aisé de ramener cette équation récurrente à ne plus renfermer qu'un seul coefficient variable. Posons en effet

$$F_{2n} = \frac{2n(2n-1)}{4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2},$$

l'équation (a) deviendra

$$F_{2n} = p_{2n} - k^2 F_{2n} \frac{2n+1}{2n-1} p_{2n} p_{2n+2}.$$

Posons en outre

$$p_{2n} = F_{2n} \varpi_{2n},$$

nous aurons

$$1 = \varpi_{2n} - k^2 \frac{2n+1}{2n-1} F_{2n} F_{2n+2} \varpi_{2n} \varpi_{2n+2},$$

et si, pour abréger, on pose

$$\lambda_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n-1} k^2 F_{2n} F_{2n+2},$$

l'équation (a) prendra définitivement la forme

$$(b) \qquad 1 = \varpi_{2n} - \lambda_{2n+2} \varpi_{2n} \varpi_{2n+2},$$

et sous cette forme elle permet de réduire ϖ_{2n} en fraction continue

$$\varpi_{2n} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\lambda_{2n+2}}{1 - \cfrac{\lambda_{2n+4}}{1 - \dots}}}$$

L'expression de F_{2n} donne

$$F_\infty = \frac{1}{1+k^2}, \quad \text{d'où} \quad \lambda_\infty = \frac{k^2}{(1+k^2)^2},$$

et, par suite, ϖ_∞ est racine de l'équation du second degré

$$1 - z + \frac{k^2}{(1+k^2)^2} z^2 = 0.$$

La solution

$$\frac{1+k^2}{k^2}$$

donnerait

$$p_\infty = \frac{1}{k^2}.$$

Les coefficients du développement de $\sin^{2n}\mathrm{am}\frac{2K}{\pi}\xi$ augmenteraient indéfiniment avec n. On doit donc adopter l'autre solution

$$\varpi_\infty = 1 + k^2, \quad \text{d'où} \quad p_\infty = 1.$$

Adoptant la valeur de $1+k^2$ pour celle de ϖ_{2n+2}, correspondant à une valeur très-grande de $2n+2$, on remontera de proche en proche au moyen de l'équation (b), et l'on obtiendra ainsi toutes les valeurs des quantités ϖ, par suite celles des quantités p, et, comme on connaît $X_{2i}^{(0)}$ et $X_{2i}^{(2)}$, on en conclura toutes les quantités X.

23. Si la valeur $1+k^2$ de ϖ_{2n+2} ne paraît pas assez approchée, on peut remarquer que, si l'on pose

$$\varpi_{2n} = f_{2n}(1+k^2)\left[1 - \frac{4i^2}{4n^2}\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{1+k^2}\right],$$

f_{2n} aura pour limite l'unité. D'autre part, l'équation (b) devient

$$(c) \qquad 1 = f_{2n}\left[1 + k^2 - \frac{4i^2}{4n^2}\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 - k^2\frac{(2n+1)^2}{2n(2n+2)}f_{2n+2}\right];$$

d'où il suit que f_{2n} diffère de l'unité d'une quantité du deuxième ordre par rapport à $\frac{i}{n}\cdot$ Posons

$$f_{2n} = 1 + f'_{2n},$$

et négligeons les termes dont l'ordre dépasse le second, nous aurons

$$f'_{2n} - k^2 f'_{2n+2} = \frac{4i^2}{4n^2}\left(\frac{\pi}{2H}\right)^2 + \frac{k^2}{2n(2n+2)}.$$

Si l'on admet que

$$f'_{2n+2} = f'_{2n},$$

on aura, aux termes près du troisième ordre,

$$f'_{2n} = \frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{k^2 + 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)}{1-k^2}.$$

Posant encore

$$f_{2n} = 1 + \frac{1}{(2n+1)^2}\,\frac{k^2 + 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2}{1-k^2} + f''_{2n},$$

substituant dans l'équation (c), négligeant les termes dont l'ordre dépasse le troisième, et supposant

$$f''_{2n+2} = f''_{2n},$$

on obtiendra f_{2n} aux termes près du quatrième ordre, et ainsi de suite.

24. Si l'on n'a besoin des puissances de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$ que pour des valeurs peu considérables de n, il suffira de modifier l'emploi de l'équation récurrente (a), de façon à calculer d'abord les coefficients des développements des premières puissances de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$, pour en déduire ceux des puissances plus élevées. On posera

$$\frac{X_{2i}^{2n-2}}{X_{2i}^{2n}} = q_{2n-2}.$$

L'équation (a) deviendra

$$(a') \quad 0 = -2n(2n+1)k^2 + \left[4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right] q_{2n} - 2n(2n-1)\, q_{2n} q_{2n-2}.$$

Opérant comme au n° **21**, on posera

$$G_{2n} = \frac{2n(2n+1)k^2}{4n^2(1+k^2) - 4i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2},$$

puis

$$q_{2n} = G_{2n}\rho_{2n}, \quad \mu_{2n} = \frac{1}{k^2}\,\frac{2n+1}{2n+3}\, G_{2n} G_{2n-2},$$

et l'équation récurrente (a') deviendra

$$(b') \qquad 1 = \rho_{2n} - \mu_{2n-2}\,\rho_{2n}\,\rho_{2n-2}.$$

On traitera cette équation comme celle du n° **21**, avec cette seule différence qu'on en tirera ρ_{2n} en fonction de ρ_{2n-2}, et que les valeurs initiales sont connues exactement

$$\mu_0 = 0, \quad \rho_0 = 0,$$

d'où

$$\rho_2 = 1.$$

Il y a exception dans le cas où $i=0$. Alors

$$q_0 = \frac{1}{X_0^{(2)}} \quad \text{et} \quad \mu_0 \rho_0 = \frac{\mu_0 q_0}{G_0} = \frac{1}{3k^2} \frac{G^2}{X_0^{(2)}}.$$

25. Des procédés tout à fait identiques aux précédents s'appliquent au développement des puissances impaires de $\sin \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi$, et à ceux des puissances de $\cos \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi$ et de $\Delta \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi$. Nous ne nous y arrêterons pas. Il nous suffira de dire que l'on part des formes suivantes :

$$\sin^{2n+1} \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} X_1^{(2n+1)} \sin x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1-q^3} X_3^{(2n+1)} \sin 3x + \ldots,$$

$$\cos^{2n} \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Y_0^{(2n)} + \frac{8q}{1-q} Y_0^{2n} \cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4} Y_4^{(2n)} \cos 4x + \ldots,$$

$$\cos^{2n+1} \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \frac{4\sqrt{q}}{1-q} Y_1^{(2n+1)} \cos x + \frac{4\sqrt{q^3}}{1+q^3} Y_3^{(2n+1)} \cos 3x + \ldots,$$

$$\Delta^{2n} \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Z_0^{(2n)} + \frac{8q}{1-q^2} Z_2^{(2n)} \cos 2x + \frac{16q^2}{1-q^4} Z_4^{(2n)} \cos 4x + \ldots$$

$$\Delta^{2n+1} \mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = Z_0^{(2n+1)} + \frac{4q}{1+q^2} Z_2^{(2n+1)} \cos 2x + \frac{4q^2}{1+q^2} Z_4^{(2n+1)} \cos 4x + \ldots$$

et des formules

$$\frac{d^2 \cos^n \mathrm{am}\, x}{dx^2} = n(n-1) k'^2 \cos^{n-2} \mathrm{am}\, x$$
$$+ n^2(1-2k'^2) \cos^n \mathrm{am}\, x - n(n+1) k'^2 \cos^{n+2} \mathrm{am}\, x,$$

$$\frac{d^2 \Delta^n \mathrm{am}\, x}{dx^2} = -n(n-1) k'^2 \Delta^{n-2} \mathrm{am}\, x + n^2(1+k'^2) \Delta^n \mathrm{am}\, x - n(n+1) \Delta^{n+2} \mathrm{am}\, x.$$

26. La même méthode peut être appliquée au développement des fonctions

$$\sin n \,\mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi, \quad \cos n \,\mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi.$$

Posons

$$\sin n \,\mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = 2\Sigma_1^{(n)} \sin \xi + 2\Sigma_2^{(n)} \sin 2\xi + 2\Sigma_3^{(n)} \sin 3\xi + \ldots,$$

$$\cos n \,\mathrm{am} \frac{2K}{\pi} \xi = \Gamma_0^{(n)} + 2\Gamma_1^{(n)} \cos \xi + 2\Gamma_2^{(n)} \cos 2\xi + \ldots.$$

On a

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 d^2 \sin n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi}{d\xi^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}n^2(1+k'^2)\sin n \operatorname{am} \frac{\pi}{2K}\xi$$
$$-\tfrac{1}{4}n(n+1)k^2 \sin(n+2)\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi - \tfrac{1}{4}n(n-1)k^2\sin(n-2)\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi,$$

$$\frac{\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2 d^2 \cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi}{d\xi^2}$$
$$= -\tfrac{1}{2}n^2(1+k'^2)\cos n \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$$
$$-\tfrac{1}{4}n(n+1)k^2 \cos(n+2)\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi - \tfrac{1}{4}n(n-1)k^2\sin(n-2)\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi.$$

On en conclut les relations récurrentes

$$\tfrac{1}{4}n(n-1)k^2\Sigma_i^{(n-2)} + \left[\tfrac{1}{2}n^2(1+k'^2) - i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right]\Sigma_i^{(n)} + \tfrac{1}{4}n(n+1)k^2\Sigma_i^{(n+2)} = 0,$$
$$\tfrac{1}{4}n(n-1)k^2\Gamma_i^{(n-2)} + \left[\tfrac{1}{2}n^2(1+k'^2) - i^2\left(\frac{\pi}{2K}\right)^2\right]\Gamma_i^{(n)} + \tfrac{1}{4}n(n+1)k^2\Gamma_i^{(n+2)} = 0,$$

relations que l'on pourra traiter absolument comme celles des numéros précédents.

L'identité de forme de ces deux relations montre que

$$\frac{\Sigma_i^{(n+2)}}{\Gamma_i^{(n+2)}} = \frac{\Sigma_i^{(n)}}{\Gamma_i^{(n)}},$$

de sorte que le rapport

$$\frac{\Sigma_i^{(n)}}{\Gamma_i^{(n)}}.$$

est indépendant de n, ou, plus exactement, n'a que deux valeurs applicables, l'une quand n est pair, l'autre quand n est impair.

Les développements connus de $\sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$ et de $\cos \operatorname{am} \frac{2K}{\pi}\xi$ et de leur carrés montrent que les deux indices d'un quelconque des coefficients Σ et Γ sont à la fois pairs ou impairs, et l'on trouve, en faisant $n=1$ ou $n=2$,

$$\frac{\Sigma_{2i}^{(2n)}}{\Gamma_{2i}^{(2n)}} = \frac{1-q^{2i}}{1+q^{2i}}, \quad \frac{\Sigma_{2i+1}^{2n+1}}{\Gamma_{2i+1}^{2n+1}} = \frac{1+q^{2i+1}}{1-q^{2i+1}},$$

formules qui seront de la plus haute importance dans le calcul des coefficients Σ et Γ, puisqu'elles permettent de déduire presque immédiatement les coefficients Σ des coefficients Γ.

Nous terminerons là les indications relatives au développement des sinus et cosinus des multiples de $\operatorname{am}\frac{2K}{\pi}\xi$ et des puissances des fonctions elliptiques élémentaires de ξ. Dans son beau Mémoire (*Studien auf dem Gebiete der Storungstheorie, Mémoires de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. XVI, 1871), M. Gylden indique de nombreuses méthodes pouvant conduire à la formation des coefficients de ces développements. Ses travaux sur ce sujet intéressent à la fois les géomètres et les astronomes. Nous avons essayé de réunir, dans ce travail, ce qui nous a paru le plus immédiatement utile à ces derniers. Nous allons actuellement essayer d'éclaircir la méthode, en en commençant l'application à un cas particulier.

III.

27. L'objet principal de cette étude étant la comparaison de la méthode de M. Gylden à celle de Hansen, nous avons choisi comme exemple la détermination des perturbations que la Terre exerce sur la comète d'Encke, ainsi que l'avait fait Hansen lui-même dans son Mémoire couronné (*Mémoire sur le calcul des perturbations qu'éprouvent les comètes*). Cherchant surtout dans ce calcul un élément d'appréciation, nous ne nous sommes pas préoccupé de pousser le calcul jusqu'au bout, mais seulement de former le développement du carré de la distance des deux astres. Pour cette raison aussi, nous avons adopté pour les éléments de l'orbite de la comète et de celle de la Terre les éléments dont Hansen s'était servi, savoir :

$$\begin{array}{rlrl}
T &= 1208'',1466, & & \\
\log a &= 0,3466760, & a' &= 1, \\
e &= 0,8446760, & e' &= 0,0167796, \\
\varpi_1 &= 182^\circ\,48'\,55'',8, & \varpi' &= 100^\circ\,0'\,13'',0. \\
\Omega &= 334^\circ\,29'\,28'',8, & & \\
i &= 13^\circ\,20'\,40'',2. & &
\end{array}$$

T désignant la durée de la révolution sidérale de la comète, ☊ la longitude de son nœud ascendant sur l'écliptique, ϖ_1 l'arc compris entre le nœud ascendant et le périhélie, i l'inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, a le demi-grand axe de l'orbite de la Terre, e' son excentricité, ϖ' la longitude de son périhélie. Nous avons divisé l'orbite de la comète en deux parties, les points de séparation étant symétriques par rapport à son grand axe, et déterminés par cette condition que leur distance au Soleil soit égale à 1. Enfin nous n'avons développé les calculs que pour la partie inférieure de l'orbite.

28. Désignant par u_1 l'anomalie excentrique du premier point de séparation, par u celle d'un point quelconque de la partie inférieure de l'orbite et par ω l'anomalie partielle, on a (n° **14**)

$$\sin\frac{u}{2} = \pm\,\varepsilon \sin\frac{2\mathrm{E}}{\pi}\,\omega \quad (\mathrm{mod.}\ \varepsilon),$$

où

$$\varepsilon = \sin\frac{u_1}{2},$$

ω devant varier de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, le signe $-$ se rapportant aux valeurs de ω comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et zéro, le signe $+$ à celles qui sont comprises entre zéro et $\frac{\pi}{2}$.

Posant ensuite

$$q = e^{-\frac{\pi \mathrm{E}_1}{\mathrm{E}}},$$

E_1 étant l'intégrale elliptique complète de première espèce relative au module ε_1 complémentaire de ε, on a trouvé

$$\log\varepsilon = \bar{1},6211482,$$

$$\frac{u_1}{2} = 24^\circ\,42'\,24'',04,$$

$$\log\mathrm{E} = 0,2167170,$$

$$\log\mathrm{E}_1 = 0,3652829,$$

$$\log q = \bar{2},079121.$$

On en a conclu

$$\varepsilon \cos \operatorname{am} \frac{2E}{\pi}\omega = [\bar{1},6158436] \cos\omega + [\bar{3},700144] \cos 3\omega$$
$$+ [\bar{5},7793] \cos 5\omega + [\bar{7},86] \cos 7\omega + [\bar{8}] \cos 9\omega,$$

$$\varepsilon^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2E}{\pi}\omega = [\bar{2},9515618] - [\bar{2},941079] \cos 2\omega$$
$$- [\bar{3},321168] \cos 4\omega - [\bar{5},5764] \cos 6\omega - [\bar{7},78] \cos 8\omega,$$

et ensuite, par l'application des formules données à la fin du n° 14,

$$r = [\bar{1},8326789] - [\bar{1},515147] \cos 2\omega$$
$$- [\bar{3},89524] \cos 4\omega - [\bar{4},1505] \cos 6\omega - [\bar{6},35] \cos 8\omega,$$

$$r\cos f = - [\bar{2},718677] + [\bar{1},588456] \cos 2\omega$$
$$+ [\bar{3},968545] \cos 4\omega + [\bar{4},2238] \cos 6\omega + [\bar{6},43] \cos 8\omega,$$

$$r\sin f = [\bar{1},9712033] \sin\omega + [\bar{2},532625] \sin 3\omega$$
$$+ [\bar{4},8336] \sin 5\omega + [\bar{5},0588] \sin 7\omega + [\bar{7},25] \sin 9\omega,$$

$$nt - c = [\bar{1},3085121] \sin\omega - [\bar{2},316541] \sin 3\omega$$
$$- [\bar{4},6622] \sin 5\omega - [\bar{6},898] \sin 7\omega - [\bar{7},0] \sin 9\omega;$$

n est exprimée en prenant le rayon du cercle pour unité ; et les nombres entre crochets sont les logarithmes des coefficients dont ils tiennent la place.

29. Soient ϖ la longitude du périhélie de la comète, f' l'anomalie vraie de la Terre. On a

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \sin^2\frac{i}{2} \cos[f' + f + (\varpi' - \Omega) + (\varpi - \Omega)]$$
$$- 2rr' \cos^2\frac{i}{2} \cos[f' - f + (\varpi' - \Omega) - (\varpi - \Omega)].$$

Les nombres donnés au n° **27** donnent

$$(\varpi' - \Omega) + (\varpi - \Omega) = 308^\circ\, 19'\, 40'',0,$$
$$(\varpi' - \Omega) - (\varpi - \Omega) = -57^\circ\, 18'\, 11'',6.$$

On en conclut

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - Arr'\cos f \cos f' - Brr' \sin f \sin f'$$
$$- Crr' \cos f \sin f' - Drr' \sin f \cos f'$$

ou

$$\log A = 0,0344462,$$
$$\log B = 0,0207989,$$
$$\log C = 0,2257077,$$
$$\log D = 0,2146266,$$

de sorte que, pour former le développement de Δ^2, il ne reste plus qu'à obtenir les développements des quantités r', $r' \cos f'$, $r' \sin f'$.

30. Posons, comme au n° 19,

$$M' = c' + n' t,$$

et soit, pour abréger,

$$nt = c + A_1 \sin \omega - A_3 \sin 3\omega - A_5 \sin 5\omega - A_7 \sin 7\omega - \ldots.$$

On aura

$$M' = c' + \frac{n'}{n} c + \frac{n'}{n} (A_1 \sin \omega - A_3 \sin 3\omega - A_5 \sin 5\omega - \ldots).$$

Posons

$$c' + \frac{n'}{n} c = c_1,$$

nous aurons, tous calculs faits,

$$M' = c_1 + [\bar{1},8220333] \sin \omega - [\bar{2},836062] \sin 3\omega - [\bar{3},181712] \sin 5\omega$$
$$- [\bar{5},418] \sin 7\omega - [\bar{7},520] \sin 9\omega.$$

On a d'ailleurs

$$r' = 1 - e \cos u',$$
$$r' \cos f' = \cos u' - e',$$
$$r' \sin f' = \sqrt{1 - e'^2} \sin u',$$

et

$$\cos u' = -\frac{e'}{2} + \left(1 - \frac{3}{8}e'^2\right)\cos M' + \left(\frac{e'}{2} - \frac{e'^3}{3}\right)\cos 2M' + \frac{3}{8}e'^2\cos 3M' + \frac{1}{3}e'^3\cos 4M' + \ldots$$

$$\sin u' = \left(1 - \frac{e'^2}{8}\right)\sin M' + \left(\frac{e'}{2} - \frac{e'^3}{6}\right)\sin 2M' + \frac{3}{8}e'^2\sin 3M' + \frac{1}{3}e'^3\sin 4M',$$

en négligeant les termes du quatrième ordre par rapport à e'.

Ces formules, réduites en nombres, donnent

$$r'^2 = [0{,}0001834] - [\bar{2}{,}525796]\cos M' - [\bar{4}{,}1486]\cos 2M' - [\bar{6}{,}08]\cos 3M',$$

$$\begin{aligned} r'\cos f' = &- [\bar{2}{,}400873] + [\bar{1}{,}9999541]\cos M' \\ &+ [\bar{3}{,}92367]\cos 2M' + [\bar{4}{,}0237]\cos 3M' + [\bar{6}{,}20]\cos 4M', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r'\sin f' = &[\bar{1}{,}9999236]\sin M' + [\bar{3}{,}923648]\sin 2M' \\ &+ [\bar{4}{,}0237]\sin 3M' + [\bar{6}{,}20]\sin 4M'; \end{aligned}$$

de sorte qu'il ne reste plus qu'à développer les sinus et cosinus de M' et de ses premiers multiples, suivant les sinus et cosinus des multiples de ω.

31. Soit, pour abréger,

$$M' = c_1 + \alpha.$$

On aura

$$\cos iM' = \cos ic_1 \cos i\alpha - \sin ic_1 \sin i\alpha,$$

$$\sin iM' = \sin ic_1 \cos i\alpha + \cos ic_1 \cos i\alpha;$$

de sorte que, pour développer Δ^2 suivant les sinus et cosinus des multiples de c_1 et des multiples de ω, il suffira de développer

$$\left.\begin{matrix}\sin i\alpha \\ \cos i\alpha\end{matrix}\right\} \quad (\alpha = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

On a trouvé

$$\begin{aligned} \alpha = &\ 0{,}6637939\sin\omega - 0{,}0685586\sin 3\omega \\ &- 0{,}0015195\sin 5\omega - 0{,}0000262\sin 7\omega - 0{,}0000003\sin 9\omega. \end{aligned}$$

Posons

$$\beta = 0{,}0015195 \sin 5\omega + 0{,}0000262 \sin 7\omega + 0{,}0000003 \sin 9\omega;$$

$$m = 0{,}6637939,$$

$$n = 0{,}0685586,$$

$$\gamma = m \sin\omega - n \sin 3\omega.$$

Alors

$$\alpha = \gamma - \beta;$$

d'où

$$\sin\alpha = \sin\gamma - \beta \cos\gamma - \frac{\beta^2}{2} \sin\gamma,$$

$$\cos\alpha = \cos\gamma + \beta \sin\gamma - \frac{\beta^2}{2} \cos\gamma,$$

en négligeant β^3, ce qui est visiblement permis.

Le calcul de β^2 n'offre aucune difficulté; on trouve

$$\tfrac{1}{2}\beta^2 = 0{,}0000006 - 0{,}0000006 \cos 10\omega.$$

Le développement de $\sin\gamma$ et de $\cos\gamma$ est plus difficile; on a procédé comme il suit.

32. On a

$$\sin\gamma = \sin[m \sin\omega] \cos[n \sin 3\omega] - \cos[m \sin\omega] \sin[n \sin 3\omega],$$

$$\cos\gamma = \cos[m \sin\omega] \cos[n \sin 3\omega] + \sin[m \sin\omega] \sin[n \sin 3\omega].$$

D'autre part, on a, par la formule de Maclaurin,

$$\sin[m \sin\omega] = \frac{m}{1} \sin\omega - \frac{m^3}{1.2.3} \sin^3\omega + \frac{m^5}{1.2.3.4.5} \sin^5\omega - \ldots,$$

$$\cos[m \sin\omega] = 1 - \frac{m^2}{1.2} \sin^2\omega + \frac{m^2}{1.2.3.4} \sin^4\omega - \ldots,$$

développements qu'il est nécessaire de pousser ici jusqu'à la neuvième puissance de $\sin\omega$. On a trouvé

$$\log\frac{m}{1} = \bar{1},8220333,$$

$$\log\frac{m^2}{1.2} = \bar{1},3430366,$$

$$\log\frac{m^3}{1.2.3} = \bar{2},6879486,$$

$$\log\frac{m^4}{1.2.3.4} = \bar{3},907922,$$

$$\log\frac{m^5}{1.2.3.4.5} = \bar{3},030985,$$

$$\log\frac{m^6}{1.2.3.4.5.6} = \bar{4},07487,$$

$$\log\frac{m^7}{1.2.3.4.5.6.7} = \bar{5},052,$$

$$\log\frac{m^8}{1.2.3.4.5.6.7.8} = \bar{7},97,$$

$$\log\frac{m^9}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = \bar{8},8.$$

On a employé les formules suivantes :

$$2\sin^2\omega = -\cos 2\omega + 1,$$
$$2^3\sin^4\omega = \cos 4\omega - 4\cos 2\omega + 3,$$
$$2^5\sin^6\omega = -\cos 6\omega + 6\cos 4\omega - 15\cos 2\omega + 10,$$
$$2^7\sin^8\omega = \cos 8\omega - 8\cos 6\omega + 28\cos 4\omega - 56\cos 2\omega + 35,$$

et

$$2^2\sin^3\omega = -\sin 3\omega + 3\sin\omega,$$
$$2^4\sin^5\omega = \sin 5\omega - 5\sin 3\omega + 10\sin\omega,$$
$$2^6\sin^7\omega = -\sin 7\omega + 7\sin 5\omega - 21\sin 3\omega + 35\sin\omega,$$
$$2^8\sin^9\omega = \sin 9\omega - 9\sin 7\omega + 36\sin 5\omega - 84\sin 3\omega + 126.$$

L'application de ces formules a donné

$$\sin[m\sin\omega] = [\bar{1},7978896]\sin\omega + [\bar{2},0738898]\sin 3\omega + [\bar{5},819]\sin 5\omega + [\bar{7},3]\sin 7\omega,$$

$$\cos[m\sin\omega] = [\bar{1},9507742] + [\bar{1},0259859]\cos 2\omega + [\bar{4},9952]\cos 4\omega + [\bar{6},556]\cos 6\omega.$$

On a procédé de même à l'égard de sin $[n \sin 3\omega]$ et de cos $[n \sin 3\omega]$. On a trouvé

$$\log \frac{n}{1} = \bar{2},836062,$$

$$\log \frac{n^2}{1.2} = \bar{3},37109,$$

$$\log \frac{n^3}{1.2.3} = \bar{5},730,$$

$$\log \frac{n^4}{1.2.3.4} = \bar{7},96,$$

et l'application des formules

$$2\sin^2 3\omega = -\cos 6\omega + 1,$$
$$2^3 \sin^4 3\omega = \cos 12\omega - 4\cos 6\omega + 3,$$
$$2^2 \sin^3 3\omega = \sin 9\omega - 3\sin 3\omega,$$

a donné

$$\sin[n \sin 3\omega] = [\bar{2},8358066] \sin 3\omega + [\bar{5},1271] \sin 9\omega,$$

$$\cos[n \sin 3\omega] = [\bar{1},9994895] + [\bar{3},06989] \cos 6\omega + [\bar{7}] \cos 12\omega;$$

on en a conclu

$$\begin{aligned}\sin\gamma = {} & 0,6235578 \sin\omega - 0,0493419 \sin 3\omega - 0,0039401 \sin 5\omega + 0,0003345 \sin 7\omega \\ & - 0,0000051 \sin 9\omega - 0,0000007 \sin 11\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\gamma = {} & 0,8921984 + 0,1275555 \cos 2\omega - 0,0204610 \cos 4\omega + 0,0006463 \cos 6\omega \\ & + 0,0000643 \cos 8\omega - 0,0000036 \cos 10\omega + 0,0000002 \cos 12\omega.\end{aligned}$$

33. Des valeurs précédentes on déduit par la simple multiplication

$$\begin{aligned}\beta \sin\gamma = {} & -0,0000030 - 0,0000373 \cos 2\omega + 0,0004732 \cos 4\omega \\ & - 0,0004656 \cos 6\omega + 0,0000294 \cos 8\omega \\ & + 0,0000035 \cos 10\omega - 0,0000002 \cos 12\omega,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta \cos\gamma = {} & -0,0000160 \sin\omega + 0,0000966 \sin 3\omega + 0,0013574 \sin 5\omega \\ & + 0,0001203 \sin 7\omega - 0,0000135 \sin 9\omega + 0,0000002 \sin 11\omega,\end{aligned}$$

$$\frac{\beta^2}{2} \sin\gamma = 0,0000004 \sin\omega + 0,0000002 \sin 9\omega - 0,0000002 \sin 11\omega,$$

$$\frac{\beta^2}{2} \cos\gamma = 0,0000005 + 0,0000001 \cos 2\omega - 0,0000005 \cos 10\omega,$$

et, en rassemblant ces résultats, on trouve

$$\begin{aligned}
\sin\alpha = {} & [\bar{1},7948876]\sin\omega - [\bar{2},694065]\sin 3\omega - [\bar{3},724071]\sin 5\omega \\
& + [\bar{4},3308]\sin 7\omega + [\bar{6},914]\sin 9\omega - [\bar{7},8]\sin 11\omega,\\
\cos\alpha = {} & [\bar{1},9504598] + [\bar{1},1055717]\cos 2\omega - [\bar{2},300765]\cos 4\omega \\
& + [\bar{4},2570]\cos 6\omega + [\bar{5},972]\cos 8\omega + [\bar{7},6]\cos 10\omega.
\end{aligned}$$

34. On a déduit de ces développements ceux des sinus et cosinus des multiples de α par les formules

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha,\\
\cos 2\alpha &= 1 - 2\sin^2\alpha,\\
\sin 3\alpha &= 2\sin\alpha\cos 2\alpha + \sin\alpha,\\
\cos 3\alpha &= 2\cos\alpha\cos 2\alpha - \cos\alpha,\\
\sin 4\alpha &= 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha,\\
\cos 4\alpha &= 2\cos^2 2\alpha - 1,
\end{aligned}$$

et l'on a obtenu les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
\sin 2\alpha = {} & [0,01115]\sin\omega + [\bar{3},490]\sin 3\omega - [\bar{2},4518]\sin 5\omega \\
& + [\bar{4},87]\sin 7\omega + [\bar{4},24]\sin 9\omega - [\bar{5},0]\sin 11\omega,\\
\cos 2\alpha = {} & [\bar{1},78439] + [\bar{1},65319]\cos 2\omega - [\bar{2},7406]\cos 4\omega \\
& - [\bar{3},6464]\cos 6\omega + [\bar{4},89]\cos 8\omega + [\bar{5},23]\cos 10\omega,\\
\sin 3\alpha = {} & [0,03238]\sin\omega + [\bar{1},30681]\sin 3\omega - [\bar{2},8155]\sin 5\omega \\
& - [\bar{3},387]\sin 7\omega + [\bar{3},037]\sin 9\omega - [\bar{5},3]\sin 11\omega,\\
\cos 3\alpha = {} & [\bar{1},40211] + [\bar{1},91100]\cos 2\omega - [\bar{2},6596]\cos 4\omega \\
& - [\bar{2},3755]\cos 6\omega + [\bar{3},312]\cos 8\omega \\
& + [\bar{4},41]\cos 10\omega - [\bar{5},3]\cos 12\omega,\\
\sin 4\alpha = {} & [\bar{1},898]\sin\omega + [\bar{1},708]\sin 3\omega - [\bar{2},92]\sin 5\omega \\
& - [\bar{2},15]\sin 7\omega + [\bar{3},3]\sin 9\omega,\\
\cos 4\alpha = {} & -[\bar{2},72] + [0,0195]\cos 2\omega + [\bar{2},81]\cos 4\omega - [\bar{2},78]\cos 6\omega.
\end{aligned}$$

35. Pour parvenir à la formation des quantités $rr' \cos f \cos f', \ldots,$ on a d'abord obtenu les résultats suivants :

$$r \cos f \cos \alpha = -0{,}0220566 + 0{,}3359186 \cos 2\omega + 0{,}0341075 \cos 4\omega$$
$$-0{,}0031228 \cos 6\omega - 0{,}0000498 \cos 8\omega + 0{,}0000175 \cos 10\omega$$
$$+ 0{,}0000005 \cos 12\omega,$$

$$r \sin f \sin \alpha = 0{,}2909391 - 0{,}3043956 \cos 2\omega + 0{,}0102422 \cos 4\omega$$
$$+ 0{,}0032127 \cos 6\omega + 0{,}0000072 \cos 8\omega - 0{,}0000057 \cos 10\omega$$
$$+ 0{,}0000001 \cos 12\omega,$$

$$r \cos f \sin \alpha = -0{,}1628713 \sin\omega + 0{,}1195330 \sin 3\omega - 0{,}0064159 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}0012149 \sin 7\omega + 0{,}0000129 \sin 9\omega + 0{,}0000020 \sin 11\omega$$
$$- 0{,}0000002 \sin 13\omega,$$

$$r \sin f \cos \alpha = 0{,}7777946 \sin\omega + 0{,}0994758 \sin 3\omega - 0{,}0066563 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}0002463 \sin 7\omega + 0{,}0000410 \sin 9\omega + 0{,}0000018 \sin 11\omega,$$

$$r \cos f \cos 2\alpha = 0{,}05511 + 0{,}20382 \cos 2\omega + 0{,}09494 \cos 4\omega - 0{,}00810 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}00112 \cos 8\omega + 0{,}00013 \cos 10\omega,$$

$$r \sin f \sin 2\alpha = 0{,}48013 - 0{,}46164 \cos 2\omega - 0{,}03181 \cos 4\omega + 0{,}01320 \cos 6\omega$$
$$+ 0{,}00021 \cos 8\omega - 0{,}00009 \cos 10\omega,$$

$$r \cos f \sin 2\alpha = -0{,}25210 \sin\omega + 0{,}18845 \sin 3\omega + 0{,}00692 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}00539 \sin 7\omega + 0{,}00001 \sin 9\omega + 0{,}00004 \sin 11\omega,$$

$$r \sin f \cos 2\alpha = 0{,}36766 \sin\omega + 0{,}25728 \sin 3\omega - 0{,}01561 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}00321 \sin 7\omega + 0{,}00026 \sin 9\omega + 0{,}00001 \sin 11\omega,$$

$$r \cos f \cos 3\alpha = 0{,}14450 + 0{,}05006 \cos 2\omega + 0{,}15814 \cos 4\omega - 0{,}00338 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}00480 \cos 8\omega + 0{,}00028 \cos 10\omega + 0{,}00006 \cos 12\omega,$$

$$r \sin f \sin 3\alpha = 0{,}50757 - 0{,}39197 \cos 2\omega - 0{,}14349 \cos 4\omega + 0{,}02568 \cos 6\omega$$
$$+ 0{,}00268 \cos 8\omega - 0{,}00046 \cos 10\omega - 0{,}00001 \cos 12\omega,$$

$$r \cos f \sin 3\alpha = -0{,}22716 \sin\omega + 0{,}18052 \sin 3\omega + 0{,}04715 \sin 5\omega$$
$$- 0{,}01131 \sin 7\omega - 0{,}00082 \sin 9\omega + 0{,}00018 \sin 11\omega$$
$$- 0{,}00001 \sin 13\omega,$$

$$r\sin f\cos 3\alpha = -0,13034\sin\omega + 0,41188\sin 3\omega + 0,00377\sin 5\omega$$
$$-0,01258\sin 7\omega + 0,00041\sin 9\omega + 0,00015\sin 11\omega$$
$$-0,00001\sin 13\omega.$$

$$r\cos f\cos 4\alpha = 0,205 - 0,057\cos 2\omega + 0,186\cos 4\omega + 0,021\cos 6\omega$$
$$-0,012\cos 8\omega,$$

$$r\sin f\sin 4\alpha = 0,379 - 0,119\cos 2\omega - 0,291\cos 4\omega + 0,023\cos 6\omega$$
$$+0,008\cos 8\omega,$$

$$r\cos f\sin 4\alpha = -0,099\sin\omega + 0,106\sin 3\omega + 0,104\sin 5\omega - 0,012\sin 7\omega$$
$$-0,003\sin 9\omega,$$

$$r\sin f\cos 4\alpha = -0,521\sin\omega + 0,458\sin 3\omega + 0,076\sin 5\omega - 0,027\sin 7\omega$$
$$-0,001\sin 9\omega.$$

36. En substituant tous ces résultats dans la formule du n° 29, on a finalement obtenu le développement de Δ^2 suivant les sinus et cosinus des multiples de c_1 et des multiples de ω

$$\Delta^2 = U_0 + U_1\cos c_1 + U_2\cos 2c_1 + U_3\cos 3c_1 + U_4\cos 4c_1$$
$$+ V_1\sin c_1 + V_2\sin 2c_1 + V_3\sin 3c_1 + V_4\sin 4c_1,$$

les quantités U et V ayant les valeurs suivantes :

$$U_0 = 1,5154025 - 0,0386103\sin\omega - 0,432372\cos 2\omega - 0,001406\sin 3\omega$$
$$+0,043223\cos 4\omega - 0,000028\sin 5\omega + 0,002386\cos 6\omega$$
$$-0,000001\cos 7\omega + 0,000074\cos 8\omega + 0,000002\cos 10\omega,$$

$$U_1 = -0,311223 + 1,548637\sin\omega - 0,048616\cos 2\omega - 0,037923\sin 3\omega$$
$$-0,046991\cos 4\omega - 0,000123\sin 5\omega + 0,000004\cos 6\omega$$
$$+0,002002\sin 7\omega + 0,000043\cos 8\omega + 0,000046\sin 9\omega$$
$$-0,000013\cos 10\omega,$$

$$V_1 = -0,439768 - 0,971178\sin\omega - 0,065854\cos 2\omega + 0,023390\sin 3\omega$$
$$-0,074130\cos 4\omega - 0,000141\sin 5\omega - 0,000015\cos 6\omega$$
$$-0,001049\sin 7\omega + 0,000072\cos 8\omega - 0,000029\sin 9\omega$$
$$-0,000020\cos 10\omega,$$

$$U_2 = -0{,}004811 + 0{,}008611 \sin\omega + 0{,}002148 \cos 2\omega + 0{,}000878 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}000574 \cos 4\omega - 0{,}000312 \sin 5\omega - 0{,}000042 \cos 6\omega$$
$$+ 0{,}000032 \sin 7\omega + 0{,}000008 \cos 8\omega + 0{,}000003 \sin 9\omega,$$

$$V_2 = -0{,}005825 - 0{,}007380 \sin\omega + 0{,}003473 \cos 2\omega - 0{,}000552 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}000901 \cos 4\omega + 0{,}000196 \sin 5\omega - 0{,}000067 \cos 6\omega$$
$$- 0{,}000021 \sin 7\omega + 0{,}000013 \cos 8\omega - 0{,}000002 \sin 9\omega,$$

$$U_3 = -0{,}000073 + 0{,}000018 \sin\omega + 0{,}000037 \cos 2\omega + 0{,}000039 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}000002 \cos 4\omega - 0{,}000008 \sin 5\omega - 0{,}000002 \cos 6\omega,$$

$$V_3 = -0{,}000114 - 0{,}000010 \sin\omega + 0{,}000059 \cos 2\omega - 0{,}000025 \sin 3\omega$$
$$- 0{,}000003 \cos 4\omega - 0{,}000004 \cos 6\omega,$$

$$U_4 = -0{,}000001 - 0{,}000001 \sin\omega + 0{,}000001 \sin 3\omega,$$

$$V_4 = -0{,}000001.$$

37. Les premiers termes de la formule précédente sont

$$1{,}5154025 - 0{,}4323720 \cos 2\omega,$$
$$- \sin c_1 [0{,}439768 + 0{,}971178 \sin\omega],$$
$$- \cos c_1 [0{,}311223 - 1{,}5486368 \sin\omega].$$

A la simple inspection de ces termes, on voit que la méthode de M. Gylden ne peut être appliquée : il faut diviser l'orbite en plus de deux parties.

On peut placer un point de division au périhélie en posant

$$\sin\omega = + \sin^2\frac{\omega_1}{2} = \frac{1 - \cos\omega_1}{2},$$

$$\sin\omega = - \sin^2\frac{\omega_2}{2} = - \frac{1 - \cos\omega_2}{2}.$$

En adoptant la première substitution et faisant varier ω_1 de zéro à π, on aura la partie de l'orbite comprise entre le périhélie et le point (u_1, r_1). La seconde substitution se rapporte à la partie symétrique par rapport au grand axe. Appliquant la première substitution, on trouve

$$\begin{aligned}\Delta^2 = 1{,}4072095 &- 0{,}925357 \sin c_1 + 0{,}463095 \cos c_1 \\ &- 0{,}432372 \cos\omega_1 + 0{,}485589 \cos\omega_1 \sin c_1 - 0{,}7743184 \cos\omega_1 \cos c_1 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

La possibilité d'appliquer la méthode de M. Gylden commence à apparaître; en toute rigueur, on pourrait le faire; les termes indépendants de ω_1 sont les plus grands. Néanmoins, il paraît convenable de diviser encore cette partie de l'orbite. On peut le faire en posant, pour la partie la plus voisine du périhélie,

$$\cos\omega_1 = \cos^2\tfrac{1}{2}\omega'_1 = \frac{1 + \cos\omega'_1}{2},$$

et, pour l'autre partie,

$$\cos\omega_1 = -\cos^2\tfrac{1}{2}\omega''_1 = -\frac{1 + \cos\omega''_1}{2},$$

ω''_1 variant de $-\pi$ à zéro et ω'_1 de zéro à π.

Si l'on adopte la dernière formule, les termes donnés précédemment deviennent

$$\begin{aligned}1{,}623395 &- 1{,}168151 \sin c_1 + 0{,}850254 \cos c_1 \\ &+ 0{,}216186 \cos\omega''_1 - 0{,}242794 \sin c_1 \cos\omega''_1 + 0{,}387159 \cos c_1 \cos\omega''_1.\end{aligned}$$

L'argument ω''_1 se rapporte à la partie de l'orbite la plus voisine de l'orbite de la Terre, et, par suite, à celle où les perturbations seront les plus grandes. Il est visible que toute la difficulté de développement des puissances négatives de Δ résidera dans celui des puissances du polynôme.

$$1{,}623395 - 1{,}168151 \sin c_1 + 0{,}850254 \cos c_1.$$

L'introduction de l'argument elliptique, d'après les indications données au n° **20**, rendra ce développement très-facile.

38. Hansen, dans le Mémoire cité sur le calcul des perturbations des comètes, dit que le développement général de Δ^{-3}, dans le cas particulier que nous avons traité, serait impraticable. Aussi a-t-il dû donner à la variable ω des valeurs particulières, développer les puissances de Δ^{-3} pour toutes ces valeurs particulières suivant les sinus et cosinus des multiples de c_1 et, par des quadratures, reconstituer, au moyen de ces développements particuliers, le développement général procédant à la fois suivant les sinus et les cosinus des multiples des deux arguments. Comme on l'a vu au dernier paragraphe, la méthode de M. Gylden ne s'applique pas à la portion d'orbite que Hansen avait embrassée dans son calcul; il faut la subdiviser en plusieurs parties. Malgré la longueur des calculs résultant de cette subdivision, il semble que les idées de M. Gylden aient un avantage considérable. La marche à suivre est à la fois très-claire et très-simple; les diverses portions de l'orbite peuvent être calculées séparément par plusieurs personnes, tandis que la méthode de quadrature employée par Hansen, méthode extrêmement longue d'ailleurs, n'a aucun de ces avantages.