

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ALAIN PIRIOU

Problèmes paraboliques et opérateurs pseudo-différentiels

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 279-283

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__279_0

© Mémoires de la S. M. F., 1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PROBLÈMES PARABOLIQUES ET OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS (*)

par

Alain PIRIOU

1. INTRODUCTION. Soient I_1 un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant 0, et M' une variété C^∞ de dimension $n-1$; les points génériques de I_1 , M' , $M = I_1 \times M'$ sont respectivement notés x_1 , x' , $x = (x_1, x')$; on considère deux fibrés E, F sur M , de même dimension, et un opérateur différentiel

$$P : C^\infty(M, E) \rightarrow C^\infty(M, F)$$

parabolique au sens de Petrovski et de degré m , relativement à un poids a_1 sur la variable de temps x_1 ; rappelons que ceci signifie que P s'écrit localement $(P_{j,k}(x, D_x))$, avec :

$$P_{j,k}(x, D_x) = \sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| \leq m} P_{j,k,\alpha}(x) D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x'}^{\alpha'}, \quad \text{et}$$

$$\text{Det} \left(\sum_{a_1 \alpha_1 + |\alpha'| = m} P_{j,k,\alpha}(x) (\xi_1 + i\eta_1)^{\alpha_1} \xi'^{\alpha'} \right) \neq 0 \quad \text{lorsque}$$

$\xi_1 \in \mathbb{R}$, $\eta_1 \leq 0$, $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$ sont non tous nuls.

Soit Ω un ouvert régulier de $M = I_1 \times M'$, ayant, dans M , un bord $\partial\Omega$ nulle part tangent à $x_1 = \text{constante}$. Donnons nous un champ de vecteurs N , transverse à $\partial\Omega$, dirigé vers l'intérieur de Ω , sans composante sur l'axe x_1 ; si $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$, on pose $\gamma u = (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$, avec $\gamma_k u = \left[\left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial N} \right)^k u \right]_{|\partial\Omega}$; soient G_j ($j=1, \dots, J$) des fibrés sur $\partial\Omega$, et

$$B : C^\infty(\partial\Omega, \oplus_m E) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega, \oplus_{j=1}^J G_j)$$
 un opérateur différentiel; enfin on fixe

$t \in I_1$ tel que $t > 0$, on pose $\Omega_t = \Omega \cap \{x_1 < t\}$, et on considère le problème aux limites mixte :

$$(1) \begin{cases} Pu = f \text{ dans } \Omega_t \\ B(\gamma u) = g \text{ dans } \partial\Omega_t \\ f, g, u \text{ distributions nulles pour } x_1 < 0 \end{cases}$$

De tels problèmes ont été étudiés en particulier dans [1], [15], où on utilise des estimations convenables dans les espaces de Sobolev. On se propose ici, en introduisant une classe convenable d'opérateurs pseudo-différentiels, de traiter (1)

(*) Ce texte est un résumé des articles [13], [14].

directement dans le cadre des distributions, et d'en décrire les noyaux résolvants.

2. OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DE VOLTERRA. Dans tout ce qui suit, a_1 est un entier > 1 fixé. Si U est un ouvert de \mathbb{R}^n et $d \in \mathbb{R}$, désignons par $L_{a_1}^d(U)$ la classe des opérateurs pseudo-différentiels Q dans U définis localement par un symbole $q(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$ admettant un développement asymptotique $q(x, \xi) \sim \sum_{j \geq 0} q_j(x, \xi) (|\xi| \rightarrow \infty)$ où q_j vérifie

$$(2) \begin{cases} q_j \in C^\infty(U \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)) \\ q_j(x, \lambda^{-1} \xi_1, \lambda \xi') = \lambda^{d-j} q_j(x, \xi) \text{ pour } x \in U, \xi \in \mathbb{R}^n \setminus 0, \lambda > 0. \end{cases}$$

Les propriétés habituelles de calcul symbolique pour la composition, la transposition, l'existence des paramétrix restent valables pour ces opérateurs (voir [7], [8]) ; de plus :

Proposition. Soit $x : U \rightarrow \tilde{U}$ un difféomorphisme de la forme $(x_1, x') \mapsto (x_1, x'(x_1, x'))$; si $Q \in L_{a_1}^d(U)$, alors le transporté de Q par x est dans $L_{a_1}^d(\tilde{U})$.

Notons qu'au voisinage de tout point de $\partial\Omega$, il existe une carte θ de M :

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{U} \subset M &\rightarrow U \subset \mathbb{R}^n && \text{de la forme} \\ (x_1, x') &\mapsto (x_1, \theta'(x_1, x')) && \text{, et telle que} \\ \theta(\mathcal{U} \cap \Omega) &= U \cap \{x_n > 0\} \\ \theta(\mathcal{U} \cap \partial\Omega) &= U \cap \{x_n = 0\} \\ \theta &\text{ transporte } N \text{ en } \frac{\partial}{\partial x_n} \end{aligned}$$

En utilisant pour $\partial\Omega$ les cartes $\theta|_{\mathcal{U} \cap \partial\Omega}$, la proposition précédente permet de définir naturellement les classes $L_{a_1}^d(X, \mathfrak{F}, \mathcal{Q})$ lorsque $X = M$ ou $\partial\Omega$, et lorsque $\mathfrak{F}, \mathcal{Q}$ sont deux fibrés sur X .

Définition. $V_{a_1}^d(X, \mathfrak{F}, \mathcal{Q})$ désigne la sous-classe des opérateurs $Q \in L_{a_1}^d(X, \mathfrak{F}, \mathcal{Q})$ dont le noyau $\eta(x, y)$ est nul pour $x_1 < y_1$, ou encore, des opérateurs $Q \in L_{a_1}^d(X, \mathfrak{F}, \mathcal{Q})$ qui possèdent la propriété de Volterra selon x_1 , en ce sens que $u(x_1, x') = 0$ pour $x_1 < T$ implique $(Qu)(x_1, x') = 0$ pour $x_1 < T$ ($T \in I_1$ arbitraire).

On démontre :

Proposition. Pour qu'une suite $(q_j)_{j \geq 0}$ de fonctions q_j vérifiant (2) soit le symbole d'un opérateur $Q \in V_{a_1}^d$, il faut et il suffit que, pour tout $j \geq 0$, $q_j(x, \xi)$ admette un prolongement $q_j(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi')$ dans

$\dot{U} = \{x \in U, \xi_1 \in \mathbb{R}, \eta_1 \leq 0, \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} | (\xi_1 + i\eta_1, \xi') \neq 0\}$, holomorphe par rapport à $\xi_1 + i\eta_1$ ($\eta_1 < 0$), et C^∞ par rapport à (x, ξ) , avec des dérivées continues dans \dot{U} .

Nous résumerons (2) et la propriété précédente de prolongement pour q_j en écrivant

$$q_j \in \sigma_{d-j}(U)$$

Corollaire. Soit $Q \in V_{a_1}^d(X, \mathcal{F}, \mathcal{G})$. Pour que Q admette une paramétrix à droite dans $V_{a_1}^{-d}(X, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ (c. a. d. pour qu'il existe $S \in V_{a_1}^{-d}(X, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ tel que $QS - I$ soit un opérateur régularisant), il faut et il suffit qu'il existe $s_0 \in \sigma_{-d}$ tel que $q_0(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') s_0(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') = I$ dans \dot{U} .

On a un résultat analogue en remplaçant droite par gauche.

Considérons maintenant une matrice $Q = (Q_{\ell,k})$ d'opérateurs

$Q_{\ell,k} \in V_{a_1}^{s_k - t_\ell}(X, \mathcal{F}_k, \mathcal{G}_\ell)$ ($\ell = 1, \dots, L$; $k = 1, \dots, K$; $s_k, t_\ell \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}_k, \mathcal{G}_\ell$ fibrés sur X). Localement, appelons symbole principal de Q la matrice $q_0 = (q_{\ell,k}^{(0)})$, où

$q_{\ell,k}^{(0)}$ est la composante de degré $s_k - t_\ell$ dans le symbole de $Q_{\ell,k}$; nous dirons que Q est parabolique à droite si, localement au voisinage de tout $x \in X$, il existe

une matrice $s_0 = (s_{k,\ell}^{(0)})$, avec $s_{k,\ell}^{(0)} \in \sigma_{t_\ell - s_k}(U)$, et

$q_0(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') s_0(x, \xi_1 + i\eta_1, \xi') = I$ dans \dot{U} . On définit de même la parabolicité à gauche.

Le corollaire précédent implique alors :

Théorème. Soit $Q = (Q_{\ell,k})$ une matrice d'opérateurs $Q_{\ell,k} \in V_{a_1}^{s_k - t_\ell}(\partial\Omega, \mathcal{F}_k, \mathcal{G}_\ell)$;

si Q est parabolique à droite (resp. : à gauche), il existe une matrice $S = (S_{k,\ell})$ d'opérateurs $S_{k,\ell} \in V_{a_1}^{t_\ell - s_k}(\partial\Omega, \mathcal{G}_\ell, \mathcal{F}_k)$ telle que $QS u = u$ (resp. : $SQ u = u$)

pour toute $u \in \prod_{\ell=1}^L \mathcal{B}'(\partial\Omega, \mathcal{G}_\ell)$ nulle pour $x_1 < 0$ (resp. : pour toute

$u \in \prod_{k=1}^K \mathcal{B}'(\partial\Omega, \mathcal{F}_k)$ nulle pour $x_1 < 0$). On a un résultat analogue quand $\partial\Omega$ est

remplacée par $M = I_1 \times M'$, mais il faut alors se restreindre à

$x_1 < t$ ($t \in I_1$, $t > 0$, fixé) et à $x' \in$ compact fixé de M' .

3. DISCUSSION DES PROBLEMES AUX LIMITES. Revenons aux notations de l'introduction ; P est alors parabolique à gauche et à droite au sens de la définition précédente ; on peut donc considérer $T_1, T_2 \in V_{a_1}^{-m}(M, F, E)$ tels que

$$P T_1 u = u \text{ dans } \Omega_t, \text{ pour toute } u \in \mathcal{D}'_+(M_t, F)$$

$$T_2 P u = u \text{ pour toute } u \in \mathcal{D}'_+(M_t, E) \text{ nulle en dehors de } \bar{\Omega}$$

(on a posé $M_t = M \cap \{x_1 < t\}$, et l'indice + signifie que les distributions considérées sont nulles pour $x_1 < 0$).

Supposons que f admette un prolongement $\tilde{f} \in \mathcal{D}'_+(M_t, F)$ tel que $T_1 \tilde{f}|_{\Omega_t}$ ait des traces sectionnelles jusqu'à l'ordre $m-1$; en remplaçant

u par $u - T_1 \tilde{f}|_{\Omega_t}$, on voit qu'il suffit de discuter le problème

$$(1') \begin{cases} P u = 0 & \text{dans } \Omega_t \\ B(\gamma u) = g & \text{dans } \partial\Omega_t. \end{cases}$$

Ce problème a un sens dès que u est prolongeable en $\tilde{u} \in \mathcal{D}'(M_t, E)$ (car, en choisissant alors un prolongement \tilde{u} nul en dehors de $\bar{\Omega}_t$, et une paramétrix T de type compact pour l'opérateur différentiel P , on obtient, modulo une fonction C^∞

$$u = [T(\text{Distribution portée par } \partial\Omega_t)]|_{\Omega_t},$$

et il est bien connu - voir [3], [11] - que le second membre de cette égalité admet des traces sectionnelles de tout ordre; soit alors u° le prolongement canonique de u par 0 dans $M_t \setminus \bar{\Omega}_t$; $P(u^\circ)$ est une multi-couche sur $\partial\Omega_t$ qui ne dépend que de P et de γu , et que nous noterons $\tilde{P}(\gamma u)$; considérons les opérateurs $C_i : C^\infty(\partial\Omega, \oplus E) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega, \oplus E)$ ($i = 1, 2$) définis par $C_i v = \gamma T_i \tilde{P} v$; on a $C_i = (C_{k,\ell}^{(i)})_{0 \leq k, \ell \leq m-1}$ avec $C_{k,\ell}^{(i)} \in V_{a_1}^{k-\ell}(\partial\Omega, E, E)$, et :

Théorème. (i) Supposons la matrice $B C_1$ parabolique à droite pour $0 \leq x_1 \leq t$; soit A_1 un inverse à droite de $B C_1$.

Alors $u = (T_1 \tilde{P} A_1 g)|_{\Omega_t}$ est solution de (1').

(ii) Supposons la matrice $\begin{pmatrix} I & -C_2 \\ B & \end{pmatrix}$ parabolique à gauche pour $0 \leq x_1 \leq t$; soit A_2 un inverse à gauche de $\begin{pmatrix} I & -C_2 \\ B & \end{pmatrix}$; alors toute distribution u prolongeable à travers $\partial\Omega_t$ et vérifiant (1') coïncide avec $[T_2 \tilde{P} A_2(0, g)]|_{\Omega_t}$.

Remarques 1) Si $\sum_{j=1}^J \dim G_j = \frac{m}{2} \dim E$, alors les hypothèses (i) et (ii) du théorème précédent sont équivalentes, et vérifiées si et seulement si la condition habituelle de Shapiro-Lopatinski est satisfaite.

2) Il est facile de retrouver la discussion de (1) dans les espaces de Sobolev anisotropes en utilisant les estimations correspondantes pour les opérateurs pseudo-différentiels T_i, A_i et pour les noyaux de Poisson T_i, \tilde{P} .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M.S. AGRANOVICH et M.I. VISIK - Uspechi Matem. Nauk, XIX, 3, 53-161. Russian Math. Surveys, 19, (1964), 53-157.
- [2] L. HÖRMANDER - Proceedings of Synposia in pure Math. 10, AMS (1967), 138-183.
- [3] L. HÖRMANDER - Ann. of Math., 83, (1966), 129-209.
- [4] L. HÖRMANDER - Cours à Stanford University (Juillet 1967).
- [5] L. HÖRMANDER - Springer - Verlag (1964).
- [6] L. HÖRMANDER - Fourier Integral Operators (à paraître).
- [7] C. HUNT et A. PIRIOU - Comptes Rendus, Série A (1969), 28-31.
- [8] C. HUNT et A. PIRIOU - Comptes Rendus, Série A (1969), 214-217.
- [9] P. KRÉE - Exposé au Séminaire Bourbaki, Novembre 1965.
- [10] P. KRÉE - Ann. Inst. Fourier, 19,1 (1969), 179-194.
- [11] P. KRÉE - Annali di Matematica, (IV), LXXXIII (1969), 113-132.
- [12] J.E. LEWIS - Journal of Math. Analysis and Applications, 26, (1969), 479-511.
- [12] J.L. LIONS et E. MAGENES - Dunod (Paris), (1968), tome 2.
- [13] A. PIRIOU - Ann. Inst. Fourier, 20,1, (1970).
- [14] A. PIRIOU - Ann. Inst. Fourier, 21,1, (1971), 59-78.
- [15] M.I. VISIK et G.I. ESKIN - Mat. Sbornik, 71 (113), (1966), 162-190.

Département de Mathématiques
U. E. R. M. S. T.
Parc Valrose, Avenue Valrose
06 - NICE.
