JEAN-FRANÇOIS COLOMBEAU

Quelques applications des fonctions implicites dans les espaces bornologiques

Mémoires de la S. M. F., tome 31-32 (1972), p. 109-115
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1972__31-32__109_0>

Colloque Anal. fonctionn.[1971, Bordeaux]
Bull. Soc. math. France,
Mémoire 31-32, 1972, p. 109-115.

QUELQUES APPLICATIONS DES FONCTIONS IMPLICITES DANS LES ESPACES BORNOLOGIQUES

par

Jean François COLOMBEAU

Nous montrons comment on peut étendre les résultats obtenus par le théorème d'Ovcyannikov ([3] etc) à des situations plus générales et aussi "concrètes" grâce aux théorèmes des fonctions implicites du calcul différentiel dans les espaces bornologiques ([2] chap. XIII) en leur appliquant la méthode de majorations utilisée dans le théorème d'Ovcyannikov. Les notations et la terminologie sont conformes à[2]

§ 1 - Fonctions implicites dans les e.b.c. polaires complets.

THEOREME (1.1). - Soit f continuement différentiable de $E_1 \times E_2$ dans E_3 et $(a,b) \in E_1 \times E_2$ tel que $f(a,b) = 0$ et $f'_y(a,b) \in \mathrm{Isom}(E_2,E_3)$.

A) Existence : On suppose que pour tout B_1 disque borné de E_1 il existe $\tau_o > 0$ et C_o disque borné de E_2 fermé pour TE_2 tel que :

1) $f(a+\tau B_1,b) \subset \tau f'_y(a,b)\, C_o$ si $\tau \leqslant \tau_o$ et

2) qu'il existe une suite (C_n) de disques bornés de E_2 fermés pour TE_2 telle que :

$$\left.\begin{array}{l} x \in a + \tau_o B_1 \\ y \in b + \tau_o(C_o+C_1+\dots+C_n) \end{array}\right\} \Rightarrow [f'_y(x,y) - f'_y(a,b)]\, C_n \subset f'_y(a,b)\, C_{n+1}$$

et telle que si $F_n = \overline{\Gamma}(\sum_{q \geqslant n} C_q)$ $F_n \to 0$ au sens de Mackey dans E_2 si $n \to +\infty$.

Alors si $P_1 = \bigcup_{B_1} \tau_o B_1$ il existe une application $u : a+P_1 \to E_2$ telle que :

1) $u(a) = b$

2) $f(x,u(x)) = 0$ pour tout x de $a+P_1$, et

3) u est différentiable au point a et $u'(a) = -f'_y(a,b)^{-1} \circ f'_x(a,b)$.

B) Unicité : On suppose que pour B_1 disque borné de E_1 et pour C_o disque de E_2 fermé pour TE_2 il existe une suite (C_n) de disques de E_2 fermés pour TE_2 telle que :

$$\left.\begin{array}{l} x \in a + B_1 \\ y \in b + C_o \end{array}\right\} \Rightarrow [f'_y(x,y) - f'_y(a,b)]\ C_n \subset f'_y(a,b)\ C_{n+1}$$

<u>et telle que</u> $\bigcap_n C_n = \{0\}$.

<u>Alors si</u> $x \in a + B_1$ <u>et si</u> y_1 <u>et</u> $y_2 \in b + C_o$ $f(x,y_1) = 0 = f(x,y_2) \Rightarrow y_1 = y_2$.

<u>Démonstration</u> :

A) On suppose $a = b = 0$; soit $T_o = f'_y(0,0)$; soit $g : E_1 \times E_2 \to E_2$ définie par $g(x,y) = y - T_o^{-1} f(x,y)$; donc $f(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x,y)$. $g(x,y_1) - g(x,y_2) = y_1 - y_2 - T_o^{-1} f(x,y_1) + T_o^{-1} f(x,y_2) = T_o^{-1} A(x,y_1,y_2)$ si $A(x,y_1,y_2) = f'_y(0,0)\ (y_1 - y_2) - f(x,y_1) + f(x,y_2)$, donc d'après le théorème des accroissements finis ([2] p. 142) :

$$\text{(I)} \qquad A(x,y_1,y_2) \in \overline{\Gamma}_{\substack{y = y_1 + t(y_2 - y_1) \\ 0 \leqslant t \leqslant 1}} \{[f'_y(x,y) - f'_y(0,0)]\ (y_2 - y_1)\} .$$

Soit B_1 un disque borné de E_1 et soit $x \in B_1$; soit $u_o(x) = 0$, soit $u_1(x) = g(x,u_o(x)) = g(x,o)$ donc $u_1(x) = -T_o^{-1} f(x,o)$ donc si $0 < \tau \leqslant \tau_o$ $u_1(\tau B_1) \subset \tau C_o$; soit $u_2(x) = g(x,u_1(x))$; $u_2(x) - u_1(x) = g(x,u_1(x)) - g(x,u_o(x)) = T_o^{-1} A(x,u_1(x), u_o(x))$; $u_1(x) \in \tau C_o$ (si $x \in \tau B_1$ avec $0 < \tau \leqslant \tau_o$) et $u_o(x) = 0$ donc $u_1(x) - u_o(x) \in \tau C_o$ et donc d'après (I) et les hypothèses, $u_2(x) - u_1(x) \in \tau C_1$; on définit ainsi une suite $u_n(x)$ par $u_{n+1}(x) = g(x,u_n(x))$; par récurrence on montre que $u_{n+1}(x) - u_n(x) \in \tau C_n$; donc comme la base de filtre $F_n \to 0$ au sens de Mackey si $n \to +\infty$, et comme E_2 est complet, si $P_1 = \bigcup_{B_1} \tau_o B_1$ on définit une application $u : P_1 \to E_2$ par $u(x) = \lim_{n \to +\infty} u_n(x)$; $u_{n+1}(x) \in \tau(C_o + \ldots + C_n)$ si $x \in \tau B_1$ donc $u(x) \in \tau \overline{\Gamma} \left(\sum_{n \geqslant 0} C_n \right)$ donc u est presque lipschitzienne au point 0 ; pour tout n $u_n(0) = 0$ donc $u(0) = 0$; comme f est M-continue dans $E_1 \times E_2$ g l'est aussi, donc par M-continuité $u(x) = g(x,u(x))$ pour tout $x \in P_1$ donc $f(x,u(x)) = 0$ pour tout $x \in P_1$. Donc d'après le lemme (1.2) (ci-dessous) u est différentiable au point 0 et $u'(0) = -f'_y(0,0)^{-1} \circ f'_x(0,0)$.

B) Soient $x \in B_1$, y_1 et $y_2 \in C_o$ tels que $f(x,y_1) = 0 = f(x,y_2)$; $y_1 - y_2 = g(x,y_1) - g(x,y_2) = T_o^{-1} A(x,y_1,y_2) \in 2\ C_1$ d'après (I) et les hypothèses car $y_1 - y_2 \in 2\ C_o$; par récurrence, on montre que pour tout n $y_1 - y_2 \in 2\ C_n$ donc $y_1 - y_2 = 0$.

LEMME (1.2) (*Différentiabilité de la fonction implicite*).

Soit f *continuement différentiable de* $E_1 \times E_2$ *dans* E_3 *et* $(a,b) \in E_1 \times E_2$ *tel que* $f(a,b) = 0$ *et* $f'_y(a,b) \in \mathrm{Isom}(E_2,E_3)$. *Soient* P_1 *une partie bornivore de* E_1 *et* u *une application de* $a+P_1$ *dans* E_2 *telle que* $u(a) = b$ *et* $f(x,u(x)) = 0$ *pour tout* $x \in a + P_1$; *si* u *est presque lipschitzienne au point* a , *alors* u *est différentiable au point* a *et* $u'(a) = -f'_y(a,b)^{-1} \circ f'_x(a,b)$.

Démonstration : On suppose $a = b = 0$; $f(h,k)- f(h,0)- f'_y(0,0).k \in \overline{\Gamma}_{0 \leqslant t \leqslant 1} \{[f'_y(h,tk)- f'_y(0,0)].k$ donc comme f est continuement différentiable dans U l'application $(h,k) \to f(h,k)- f(h,0)- f'_y(0,0).k$ est tangente à zéro ; soient $S_o = f'_x(0,0)$ et $T_o = f'_y(0,0)$; $f(h,u(h)) = 0$ si $h \in P_1$ donc $S_o h + T_o u(h) = -[f(h,u(h))- f(h,0)- T_o u(h)] - [f(h,0)- f(0,0)- S_o h]$; l'application $h \to f(h,0)- f(0,0)- S_o h$ est tangente à zéro ; comme u est presque lipschitzienne au point 0 , l'application $h \to f(h,u(h))- f(h,0) - T_o u(h)$ est tangente à zéro donc l'application $h \to u(h) + T_o^{-1} S_o h$ est tangente à zéro, d'où le résultat.

Remarque (1.3) : On montre par un exemple que dans le lemme (1.2) on ne peut pas en général remplacer " u est presque lipschitzienne au point a " par " u est M-continue au point a " (comme on le fait dans le cas des espaces de Banach).

Remarque (1.4) : Si E_1 , E_2 et E_3 sont des espaces de Banach, le théorème (1.1) se réduit au théorème classique car les hypothèses techniques de (A) et (B) sont toujours vérifiées :

soient B_1 et B_2 les boules unités fermées de E_1 et E_2 ; f étant continuement différentiable, il existe $\tau_o > 0$, $\mu>0$, $0 < k < 1$, $\lambda \geqslant 0$ tels que

$$\left.\begin{array}{l} x \in a + \tau_o B_1 \\ \\ y \in b + \mu B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_y(a,b)^{-1}[f'_y(x,y)- f'_y(a,b)]\, B_2 \subset k\, B_2$$

et $f(a+\tau B_1,b) \subset \tau\, f'_y(a,b)(\lambda B_2)$ si $0 < \tau \leqslant \tau_o$; si on prend $\tau_o > 0$ assez petit pour que $\frac{\tau_o \lambda}{1-k} \leqslant \mu$ on peut prendre $C_n = k^n \lambda B_2$ donc $F_n \subset \frac{k^n \lambda}{1-k} B_2$; de même, pour l'unicité.

Remarque (1.5) : Les hypothèses techniques du théorème (1.1) ne sont absolument pas superflues car on sait bien que le théorème des fonctions implicites tel qu'il s'énonce dans les espaces de Banach devient faux dans le cadre des espaces de Fréchet ([1] p. 761). On peut évidemment énoncer des théorèmes un peu plus généraux que (1.1) ([2] p. 150).

§ 2 - Applications à des équations fonctionnelles.

Le théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach permet notamment d'étudier des équations intégrales. Nous allons montrer sur un exemple très simple comment le théorème des fonctions implicites dans les espaces bornologiques permet d'étudier des équations intégro-différentielles, permettant ainsi d'obtenir toute une gamme de résultats nouveaux en généralisant à des équations intégro-différentielles (notamment) les applications du théorème d'Ovcyannikov ou de théorèmes apparentés.

Soient v, a, b et c des fonctions analytiques définies au voisinage du point (x_o,o) de $\mathbb{C}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit H une fonction analytique définie au voisinage du point (o,o,x_o) de $\mathbb{C}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On cherche une fonction u analytique au voisinage du point (x_o,o) de $\mathbb{C}^2$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et satisfaisant l'équation :

$$\text{(E)} \qquad u(x,t) = v(x,t) + \int_0^t H(t,s,x)[a(x,s)\frac{\partial u}{\partial x}(x,s)+b(x,s)u(x,s)+c(x,s)]ds$$

($\int_0^t$ signifie l'intégrale sur le segment $[0,t] =' \{\theta t\}_{0\leqslant\theta\leqslant 1} \subset \mathbb{C}$; les fonctions intégrées sont analytiques) ; cette équation contient l'équation aux dérivées partielles très simple considérée à titre d'exemple dans [2] p. 157.

I_δ désigne le disque ouvert de $\mathbb{C}$ défini par $|t| < \delta$; K désigne un compact de $\mathbb{C}$ dont l'intérieur contient le point x_o(*); si $s>0$ on définit $K+s =' \{x\in\mathbb{C}$ tels que $d(x,K)\leqslant s\}$ (où $d(x,K)$ est la distance de x au compact K dans R^2) ; K est choisi assez petit pour qu'il existe $s>0$ et $\delta>0$ tels que les fonctions v, a, b et c (respectivement H) sont définies dans un voisinage de $(K+s)\times I_\delta$ (respectivement de $I_\delta^2\times(K+s))$.

On définit la bornologie de l'espace $\mathcal{H}(K)$ des germes de fonctions analytiques autour du compact K par la base de la bornologie constituée (si M et s décrivent $]0,+\infty]$) par les $\{\{M,s\}\} =' \{\varphi$ analytiques à l'intérieur de $K+s$, continues sur $K+s$ et majorées par M sur $K+s\}$ et $\mathcal{H}(K)$ est ainsi un ebc de Silva (donc polaire et complet).

Une partie $\mathcal{B}$ de l'espace $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ (voir [2] p. 146) est bornée si elle est constituée d'applications indéfiniment différentiables de I_{δ_o} dans $\mathcal{H}(K)$ équibornées ainsi que leurs dérivées successives sur tout $I_\delta (0<\delta<\delta_o)$; mais la variable t est complexe et donc d'après les formules intégrales de Cauchy (pour les applications analytiques à valeurs dans un ebc polaire) : pour qu'une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ soit bornée, il faut et il suffit qu'elle soit constituée d'applications indéfiniment différentiables de I_{δ_o} dans $\mathcal{H}(K)$ équibornées

(*) K est supposé assez régulier pour que $d(K+s,\complement(K+s+s'))=s'$ (si s, s' assez petits).

sur tout $I_\delta (0 < \delta < \delta_o)$ (car il en est alors de même pour leurs dérivées successives). Donc une base de la bornologie de l'espace $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ est constituée (si $(B_\delta)_{\delta \in]0,\delta_o[}$ désigne une famille variable de disques bornés B_δ de l'espace $\mathcal{H}(K)$) par les disques bornés $C = \{\xi \in \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ tels que pour tout $\delta \in]0,\delta_o[$, $t \in I_\delta \Rightarrow \xi(t) \in B_\delta\}$. Les disques bornés $''\{\{M,s\}\}$ sont fermés dans $T\,\mathcal{H}(K)$ et si les B_δ sont fermés dans $T\,\mathcal{H}(K)$ le disque borné C correspondant est fermé dans $T\,\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$. $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ est un ebc polaire complet ([2] p. 146).

Soit K' un compact de $\mathbb{C}^2$ contenant $(K+s) \times I_\delta$ (avec $\delta > \delta_o$) et tel que v soit analytique dans un voisinage de K' ; soit l'application F :

$[\mathcal{H}(K') \times \mathbb{C}] \times \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K)) \to \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ définie par :

$$F(v,\lambda;\ X)\ (t)\ (x) = X(t)(x) - v(x,t) - \lambda \int_0^t H(t,s,x)[a(x,s)\frac{d}{dx} X(s)(x) + b(x,s)X(s)(x) + c(x,s)]\ ds .$$

Il est immédiat de vérifier que F est $\mathcal{C}_\infty$; $F(0,0;0) = 0$; $D_2F(0,0;0)$ est l'application identique de $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ dans $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ et

$$D_2F(v,\lambda;\ X).\xi(t)(x) = \xi(t)(x) - \lambda \int_0^t H(t,s,x)[a(x,s)\frac{d}{dx}\,\xi(s)(x) + b(x,s)\xi(s)(x)]\ ds .$$

Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites à la fonction F au point $(0,0)$ avec $E_1 = \mathcal{H}(K') \times \mathbb{C}$ et $E_2 = E_3 = \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$. Nous allons vérifier le critère d'existence (A).

$F(v,\lambda;\ 0)(t)(x) = -v(x,t) - \lambda \int_0^t H(t,s,x)\ c(x,s)\ ds$; soit B_1 un disque borné de $\mathcal{H}(K') \times \mathbb{C}$; il existe donc $M_o > 0$ et $s_o > 0$ tels que si $(v,\lambda) \in B_1$ nous pouvons prendre :

$$C_o = \{\xi \in \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K)) \text{ tels que } \xi(t) \in {}''\{\{M_o,s_o\}\} \text{ pour tout } t \in I_{\delta_o}\} ,$$

(et si nous changeons de disque borné B_1 nous pouvons garder le même s_o car $K' \supset (K+s) \times I_\delta$ (où $s>0$ et $\delta > \delta_o$)).

$$\text{(I)} \quad [D_2F(v,\lambda;\ X) - D_2F(0,0;\ 0)](\xi)(t)(x) = -\lambda \int_0^t H(t,s,x) [a(x,s)\,\frac{d}{dx}\,\xi(s)(x) + b(x,s)\ \xi(s)(x)]\ ds ;$$

X et v n'interviennent pas dans la formule (I) ; $(v,\lambda) \in B_1$ donc dans toute la suite $|\lambda| \leq \lambda_o$. Soient $H_o \geq \sup\limits_{(t,s,x) \in I^2_{\delta_o} \times (K+s_o)} |H(t,s,x)|$ et A tel que :

$$\sup_{(x,t)\in(K+s_o)\times I_{\delta_o}} |a(x,t)| \leq \frac{A}{2} \quad \text{et} \quad \sup_{(x,t)\in(K+s_o)\times I_{\delta_o}} |b(x,t)| \leq \frac{A}{2} \quad .$$

Pour la construction de la suite (C_n) nous prenons :

$$C_1 \supset \overline{\Gamma}_{|\lambda|\leq\lambda_o} [D_2F(v,\lambda;\ X) - D_2F(0,0;\ 0)]C_o ; \xi\in C_o \Rightarrow |\lambda \int_0^t H(t,s,x)$$

$$[a(x,s)\frac{d}{dx}\xi(s)(x)+b(x,s)\xi(s)(x)]ds| \leq \lambda_o H_o|t| \ | \int_0^1 (\frac{A}{2}\frac{M_o}{d} + \frac{A}{2}M_o)\, d\theta| \leq$$

$\leq \dfrac{\lambda_o H_o A M_o|t|}{d}$ si $x\in K + s_o - d$ (pour d tel que $0<d<\inf(1,s_o)$) car

$\varphi\in\{\{M_o,s_o\}\} \Rightarrow \dfrac{d\varphi}{dx} \in{}'\{\{\dfrac{M_o}{d}, s_o - d\}\}$ (d'après la formule intégrale de Cauchy)

et $M_o \leq \dfrac{M_o}{d}$. Donc si $B_\delta^1 = \displaystyle\bigcap_{\substack{0<d<1\\ s=s_o-d>0}} \{\{\dfrac{\lambda_o H_o A M_o \delta}{d}, s\}\}$, $C_1 \acute{\subset} \{\xi\in\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$

tels que pour tout $\delta\in]0,\delta_o[$, $t\in I_\delta \Rightarrow \xi(t)\in B_\delta^1\}$.

Nous allons montrer par récurrence sur n que si :

$C_n \supset \overline{\Gamma}_{|\lambda|\leq\lambda_o} [D_2F(v,\lambda;\ X) - D_2F(0,0;\ 0)]C_{n-1}$, si $B_\delta^n = \displaystyle\bigcap_{\substack{0<d<1\\ s=s_o-d>0}} \{\{\dfrac{\lambda_o^n H_o^n A^n M_o \delta^n}{d^n(1-\frac{1}{2})..(1-\frac{1}{n})^{n-1}}; s\}\}$

on peut prendre $C_n = {}'\{\xi\in\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ tels que pour tout $\delta\in]0,\delta_o[$,
$t\in I_\delta \Rightarrow \xi(t)\in B_\delta^n\}$.

Supposons donc $B_\delta^{n-1} = \displaystyle\bigcap_{\substack{0<d<1\\ s=s_o-d>0}} {}'\{\{\dfrac{\lambda_o^{n-1} H_o^{n-1} A^{n-1} M_o \delta^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2})..(1-\frac{1}{n-1})^{n-2}}, s\}\}$;

changeons d en $d(1-\frac{1}{n})$: $B_\delta^{n-1} \subset \displaystyle\bigcap_{\substack{0<d<1\\ s=s_o-d>0}} {}'\{\{\dfrac{\lambda_o^{n-1} H_o^{n-1} A^{n-1} M_o \delta^{n-1}}{d^{n-1}(1-\frac{1}{2})..(1-\frac{1}{n})^{n-1}}, s+\dfrac{d}{n}\}\}$

donc $\varphi\in B_\delta^{n-1} \Rightarrow \varphi$ et $\dfrac{d\varphi}{dx} \in{}'\{\{\dfrac{\lambda_o^{n-1} H_o^{n-1} A^{n-1} M_o \delta^{n-1}}{d^n(1-\frac{1}{2})..(1-\frac{1}{n})^{n-1}}\cdot n, s\}\}$

(d'après la formule intégrale de Cauchy).

Donc $\xi\in C_{n-1} \Rightarrow |\lambda \int_0^t H(t,s,x)\,[a(x,s)\frac{d}{dx}\xi(s)(x)+b(x,s)\xi(s)(x)]\,ds| \leq$

$$\leq \lambda_o H_o| \int_0^1 A \frac{\lambda_o^{n-1} H_o^{n-1} A^{n-1} M_o \theta^{n-1} |t|^{n-1} n}{d^n(1-\frac{1}{2})\dots(1-\frac{1}{n})^{n-1}} |t|\,d\theta| \leq \frac{\lambda_o^n H_o^n A^n M_o |t|^n}{d^n(1-\frac{1}{2})..(1-\frac{1}{n})^{n-1}}$$

d'où la formule annoncée pour B^n_δ .

$$F_n = (\overline{\Gamma} \sum_{q \geqslant n} C_q) \subset' \{ \xi \in \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_0}, \mathcal{H}(K)) \text{ tels que pour tout } \delta \in]0,\delta_0[$$

$t \in I_\delta \Rightarrow \xi(t) \in \overline{\Gamma} \sum_{q \geqslant n} B^q_\delta \}$; on sait que pour tout $n : \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n})^{n-1}} < e$ (e étant la base des logarithmes népériens), donc :

$$B^n_\delta \subset '' \{ \{ \frac{M_o}{e} \left(\frac{\lambda_o H_o A \delta e}{d} \right)^n , s \} \}$$

donc, si on fixe d avec $0 < d < 1$ et $s = s_o - d > 0$, pour δ_o assez petit la base de filtre F_n converge vers 0 au sens de Mackey dans $\mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ (et comme on l'a remarqué, si on change le disque borné de $\mathcal{H}(K')$ en gardant $|\lambda| \leqslant \lambda_o$ on ne change pas ce δ_o car on ne change pas s_o , donc d) d'où : si $\delta_o > 0$ est assez petit, il existe une application $U : \mathcal{H}(K') \to \mathcal{C}_\infty(I_{\delta_o}, \mathcal{H}(K))$ telle que $U(0) = 0$ et pour tout $v \in \mathcal{H}(K')$ $F(v,1,U(v)) = 0$; si on définit une fonction u par $u(x,t) = U(t)(x)$, u est solution de l'équation (E) et u est analytique en x et t . On peut vérifier de manière analogue le critère d'unicité.

Au cours des calculs pour la construction de la suite des disques bornés C_n nous avons utilisé une méthode qui est fondamentale dans la démonstration du théorème d'Ovcyannikov.

Il est bien évident que si on était parti d'une application plus "élaborée" du théorème d'Ovcyannikov on aurait pu de même la généraliser à des équations intégro-différentielles, obtenant ainsi des résultats nouveaux.

On peut aussi obtenir un théorème de Frobenius et lui appliquer la méthode de majoration d'Ovcyannikov et étudier ainsi des équations fonctionnelles nouvelles.

BIBLIOGRAPHIE

[1] EELLS (J.). - A setting for global analysis. Bull. Amer. Math. Soc. t. 72 (1966), p. 751-807.

[2] HOGBE-NLEND (H.). - Théorie des bornologies et applications. Berlin-Springer, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 213.

[3] TREVES (F.). - Ovcyannikov theorem and hyperdifferential operators. IMPA, Rio de Janeiro (1968).

Université de Bordeaux-I
U.E.R. Mathématiques et Informatique
351 cours de la Libération
33 - TALENCE (France)