

ENLACEMENTS D'INTERVALLES ET TORSION DE WHITEHEAD

PAR JEAN-YVES LE DIMET

RÉSUMÉ. — Soit E un enlacement de n intervalles dans $D^2 \times I$ d'extérieur X et soit $X_0 = X \cap D^2 \times 0$. On utilise la propriété de la paire (X, X_0) d'être Λ -acyclique pour certaines représentation ρ de l'anneau du groupe fondamental π de X dans un anneau Λ pour construire des invariants de torsion à valeurs dans le groupe $K_1(\Lambda)/\rho(\pm\pi)$. Un cas particulier est le polynôme d'Alexander en n variables quand Λ est l'anneau des fractions rationnelles P/Q avec $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$ et ρ est simplement l'abélianisation.

ABSTRACT (*String links and Whitehead torsion*). — Let E be a n -component string link in $D^2 \times I$ with exterior X and $X_0 = X \cap D^2 \times 0$. Then the pair (X, X_0) is \mathbb{Z} -acyclic and, given a representation $\rho : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \Lambda$, with $\pi = \pi_1(X)$, we use the property that this pair is Λ -acyclic for various representations ρ and rings Λ to construct torsion invariants for string links taking their values in the group $K_1(\Lambda)/\rho(\pm\pi)$. A particular case is the Alexander polynomial in n variables when Λ is the ring of rational fractions P/Q with $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$ and ρ is simply the abelianization map.

Introduction

Soit $k \subset S^3$ un nœud classique, soit X le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de k et soit $m \subset \partial X$ un méridien de k . Alors la paire de complexes finis (X, m) est $\mathbb{Z}[t]$ -acyclique (*i.e.* l'inclusion de m dans X induit un isomorphisme en homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}[t]$) et J. Milnor démontre

Texte reçu le 6 mars 2000, accepté le 4 juillet 2000

JEAN-YVES LE DIMET, Département de Mathématiques et L.M.P., Université Blaise Pascal, 63177 Aubière CEDEX (France) • *E-mail* : `jledimet@ucfma.univ-bpclermont.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 19B28, 57M25, 57Q10.

Mots clefs. — Nœuds, enlacements d'intervalles, torsion de Whitehead.

dans [12] que le polynôme d'Alexander de k n'est autre que la torsion de Reidemester de la paire (X, m) . Plus tard, dans un article fondamental [13] sur la torsion de Whitehead, J. Milnor fait la remarque suivante :

Soit (K, L) une paire de complexes finis connexes, soit π le groupe fondamental de K et soit \tilde{C} le $\mathbb{Z}[\pi]$ -complexe de chaînes engendré — en tant que groupe abélien libre — par les cellules relatives de (\tilde{K}, \tilde{L}) où \tilde{K} est le revêtement universel de K et \tilde{L} sa restriction à L . Si l'inclusion de L dans K est une équivalence d'homotopie, alors \tilde{C} est acyclique et l'on sait définir la torsion τ de (K, L) — c'est un élément du groupe de Whitehead $Wh(\pi)$. Mais, plus généralement, supposons que l'on dispose d'une représentation h du groupe π dans $O(p)$ (par exemple) de telle sorte que $\tilde{C} \otimes_{\pi} \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ soit acyclique, alors la torsion τ_h du complexe précédent est un élément bien défini de $\tilde{K}_1(\mathbb{R})$ et Milnor note que “*The real interest lies rather in the fact that τ_h may be defined even when τ is not*”.

Cette remarque, appliquée aux enlacements d'intervalles, est le fondement de cet article. Rappelons qu'un *enlacement de n intervalles* — ou *n -enlacement* pour abrégé — ressemble à une tresse pure à n brins contenue dans $D^2 \times I$, mais on n'exige pas que la fonction cote des brins soit croissante, voir ci-après et aussi [8], [9], [11]. Les n -enlacements se composent comme les tresses et forment un monoïde que l'on note $\mathcal{E}(n)$. Ainsi, $\mathcal{E}(1)$ est isomorphe au monoïde des nœuds classiques. Considérons maintenant un enlacement E de n intervalles. Soit X le complémentaire dans D^2 d'un voisinage tubulaire ouvert des brins, soit $X_0 = X \cap D^2 \times 0$ et soit π le groupe fondamental de X . Supposons que l'on connaisse une représentation ρ de π dans un sous-groupe G du groupe des unités d'un anneau Λ de sorte que la paire (X, X_0) soit Λ -acyclique. Alors, on peut associer à E la torsion $\tau(X, X_0)$ qui est un élément bien défini de $K_1(\Lambda)/\text{Im}(\pm G)$. Cependant, cette torsion n'est pas vraiment un invariant d'enlacements car elle est fonction de la représentation ρ du groupe fondamental de X . Pour remédier à ce problème on introduit, dans cet article, la notion de *représentation universelle* pour les n -enlacements. On donne une condition suffisante pour qu'une représentation soit universelle, puis dans une deuxième partie, on étudie diverses applications de cette notion. Par exemple, l'abélianisation du groupe fondamental est une représentation universelle : on retrouve ainsi le polynôme d'Alexander à n indéterminées introduit dans [8].

1. Représentations acycliques et torsion d'un enlacement d'intervalles

1.1. Représentation acycliques. — Soient π un groupe, $A = \mathbb{Z}[\pi]$ l'anneau de ce groupe et $\varepsilon : A \rightarrow \mathbb{Z}$ l'augmentation.

Deux bases (e_1, e_2, \dots, e_q) et $(e'_1, e'_2, \dots, e'_q)$ d'un A -module libre de type fini M seront dites *équivalentes* s'il existe des éléments g_1, g_2, \dots, g_q de π tels que

$$(e_1, e_2, \dots, e_q) = (\pm g_1 e'_1, \pm g_2 e'_2, \dots, \pm g_q e'_q)$$

à l'ordre près. Considérons maintenant un A -module différentiel gradué

$$C_* : \dots \rightarrow C_n \rightarrow C_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

ayant les propriétés suivantes :

- 1) les C_n sont des A -modules libres de type fini ;
- 2) il existe un entier N tel que $C_n = 0$ si $n > N$;
- 3) chacun des C_n est muni d'une classe d'équivalence de bases

Si C_* est acyclique, la *torsion* $\tau(C_*)$ est un élément bien défini du groupe de Whitehead de π , $Wh(\pi) = K_1(A)/\pm\pi$, voir [13], [14]. On cherche, plus généralement, à construire des invariants en K -théorie pour des A -modules différentiels gradués non nécessairement acycliques. Dans ce but, on introduit les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.1. — 1) On dira qu'un A -module différentiel gradué C_* est un A -module (*différentiel gradué*) de Whitehead si C_* possède les propriétés 1), 2) et 3) ci-dessus et si, de plus, $C_* \otimes \mathbb{Z}$ est acyclique.

2) Soit B un anneau unitaire ayant la propriété d'invariance de la dimension (*i.e.* : B^p isomorphe à B^q implique $p = q$). On dira qu'un morphisme d'anneaux $\rho : A \rightarrow B$ est une *représentation acyclique* de A si $C_* \otimes_A B$ est acyclique pour tout module de Whitehead C_* .

3) Soit $\rho : A \rightarrow B$ une représentation acyclique de A . On dira que le groupe $K_\rho(B) = K_1(B)/\rho(\pm\pi)$ est le *groupe de Milnor* de la représentation ρ . Dans la suite, la loi de composition de ce groupe sera notée multiplicativement.

4) Soit C_* un A -module de Whitehead et soit ρ est une représentation acyclique de A . La ρ -torsion de C_* est $\tau_\rho(C_*) = \tau(C_* \otimes_A B) \in K_\rho(B)$.

Le résultat ci-dessous est très utile pour la suite de cet article. C'est une conséquence simple d'un théorème de P. Vogel.

PROPOSITION 1.2. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux tel que, pour toute matrice u à coefficients dans A ,

$$u \otimes \mathbb{Z} \text{ inversible} \implies u \otimes B \text{ inversible.}$$

Alors ρ est une représentation acyclique de A .

Démonstration. — Rappelons (voir [15], section 6) qu'un A -module (à gauche) M est dit *local* si pour toute $p \times p$ matrice u à coefficients dans A telle que $u \otimes \mathbb{Z}$ soit inversible, $u^* : \text{Hom}(A^p, M) \rightarrow \text{Hom}(A^p, M)$ est un isomorphisme.

Notons A_ε le *localisé* au sens de Cohn [4] de l'augmentation

$$\varepsilon : A \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Soit C_* un module de Whitehead. Alors :

- a) $C_* \otimes A_\varepsilon$ est acyclique, (voir [15], th. 1.13) ;
- b) si M est local, l'application canonique $M \rightarrow A_\varepsilon \otimes M$ est un isomorphisme, (voir [15], cor. 1.19).

Si M est local, on voit que $C_* \otimes M$ est acyclique en raison de l'isomorphisme : $C_* \otimes M \simeq C_* \otimes A_\varepsilon \otimes M$. Il suffit donc de vérifier que B est un A -module local. Mais si u une matrice $p \times p$ à coefficients dans A , la matrice $u^* : \text{Hom}(A^p, B) \rightarrow \text{Hom}(A^p, B)$ n'est autre que la transposée de $u \otimes B$. \square

REMARQUE 1.3. — 1) On suppose que C_* est un A -module de Whitehead qui se réduit à

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow 0.$$

Si ρ est une représentation acyclique de A , la ρ -torsion de C_* est la torsion de l'isomorphisme $\partial_n \otimes B$ ou de son inverse, selon la parité de n . Plus précisément (voir [14]),

$$\tau_\rho(C_*) = \tau(\partial_n \otimes B)^{(-1)^n}.$$

2) Soit Λ un anneau commutatif et soit $\varphi : \pi \rightarrow \text{SL}_q(\Lambda)$ une représentation du groupe π de sorte que la représentation $\rho : A \rightarrow \mathcal{M}_q(\Lambda)$, définie par

$$\rho\left(\sum_i n_i g_i\right) = \sum_i n_i \varphi(g_i),$$

soit acyclique. Alors le groupe de Milnor $K_\rho(\mathcal{M}_q(\Lambda))$ n'est autre que $K_1(\Lambda)$ si q est pair, $K_1(\Lambda)/\pm 1$ si q est impair, car d'une part $K_1(\mathcal{M}_q(\Lambda))$ est isomorphe à $K_1(\Lambda)$ (équivalence de Morita [5], [14]) ; d'autre part l'image du groupe π par ρ est contenue dans $\text{SL}_q(\Lambda)$, donc dans le groupe dérivé de $\text{GL}(\Lambda)$.

3) Pour une large classe d'anneaux commutatifs, la torsion d'un isomorphisme $\alpha \in \text{GL}(\Lambda)$ n'est autre que le déterminant de α , voir [14] par exemple. Dans la conjonction de ce cas et des cas 1) et 2) décrits ci-dessus, la ρ -torsion de

$$0 \rightarrow C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \rightarrow 0$$

est l'image dans Λ^* ou $\Lambda^*/\pm 1$ de $\det(\partial_n \otimes \mathcal{M}_q(\Lambda))^{(-1)^n}$ (où Λ^* désigne le groupe des unités de Λ).

Soit maintenant (K, L) une paire de complexes cellulaires finis connexes, soient π le groupe fondamental de K et $A = \mathbb{Z}[\pi]$. On note $C_*(K, L; A)$ le A -module différentiel gradué engendré (comme \mathbb{Z} -module) par les cellules relatives de (\tilde{K}, \tilde{L}) où \tilde{K} est le revêtement universel de K et \tilde{L} sa restriction à L . On suppose que l'inclusion $L \rightarrow K$ induit un isomorphisme en homologie entière. Alors $C_*(K, L; A)$ est clairement un A -module de Whitehead. Si de plus $\rho : A \rightarrow B$ est une représentation acyclique de A , on peut considérer la ρ -torsion de (K, L) : c'est

$$\tau_\rho(K, L) = \tau(C_*(K, L; A) \otimes B) \in K_\rho(B).$$

Il résulte de l'invariance topologique de la torsion de Whitehead [2] que :

PROPOSITION 1.4. — *La ρ -torsion de (K, L) est un invariant topologique.*

Démonstration. — Soit $f : (K, L) \rightarrow (K', L')$ un homéomorphisme. On peut, sans changer la torsion de Whitehead, supposer que f est cellulaire et remplacer (K', L') par le cylindre de f . Des suites exactes de modules différentiels gradués acycliques

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow C(L', L; B) \rightarrow C(K', L; B) \rightarrow C(K', L'; B) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow C(K, L; B) \rightarrow C(K', L; B) \rightarrow C(K', K; B) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

on déduit que (voir [13], th. 3.1) :

$$\tau_\rho(K', L) = \tau_\rho(L', L) \cdot \tau_\rho(K', L') \quad \text{et} \quad \tau_\rho(K', L) = \tau_\rho(K, L) \cdot \tau_\rho(K', K).$$

Mais les torsions de Whitehead de (K', K') et (L', L) sont triviales car tout homéomorphisme est une équivalence d'homotopie simple.

A fortiori, $\tau_\rho(K', K) = \tau_\rho(L', L) = 1$. Ainsi, $\tau_\rho(K', L') = \tau_\rho(K, L)$. □

1.2. Enlacements d'intervalles. — Soit n un entier strictement positif et soient a_1, a_2, \dots, a_n des points appartenant à l'intérieur du disque D^2 , fixés une fois pour toute.

Un *enlacement de n intervalles* E (ou tresse généralisée à n brins) est la donnée d'un plongement transverse au bord $f : \{1, 2, \dots, n\} \times I \rightarrow D^2 \times I$ tel que $f(i, t) = (a_i, t)$ pour $t = 0, 1$ et $i = 1, 2, \dots, n$. Dans la suite, l'expression *enlacement de n -intervalles* sera abrégé en *n -enlacement*.

Les classes d'isotopie des n -enlacements se composent (à la façon des tresses) pour former un monoïde que l'on note $\mathcal{E}(n)$. Ce monoïde contient le groupe P_n des tresses pures. Pour obtenir plus de détails on pourra consulter [9] ou [11].

Soit donc E un n -enlacement quelconque. On note X le complémentaire d'un voisinage tubulaire ouvert de l'image de f dans $D^2 \times I$: on dit que X est *l'extérieur de l'enlacement* E . On pose encore

$$X_t = (D^2 \times t) \cap X$$

pour $t = 0, 1$, $\pi = \pi_1(X)$ et $A = \mathbb{Z}[\pi]$. On dit que π est le *groupe de l'enlacement* E .

LEMME 1.5. — *Le module différentiel gradué $C(X, X_t; A)$, ($t = 0, 1$), est un module de Whitehead.*

Démonstration. — Notons Y_t , ($t = 0, 1$), la réunion de X_t et des voisinages tubulaires des $f(D^2 \times i)$. Alors l'inclusion $(X, X_t) \rightarrow (D^2 \times I, Y_t)$ est une excision. Ainsi $H_*(X, X_t) = 0$ car $D^2 \times I$ et Y_t sont contractiles. \square

DÉFINITION 1.6. — Soit E un n -enlacement d'extérieur X et de groupe π et soit $\rho : A \rightarrow B$ une représentation acyclique. La ρ -torsion de E est

$$\tau_\rho(E) = \tau(C_*(X, X_0; A) \otimes B) \in K_\rho(B).$$

Le problème est maintenant de donner une méthode pour calculer cette torsion. Dans ce but, on considère plus généralement un complexe cellulaire Z , fini connexe, de dimension 2 et on pose

$$G = \pi_1(Z).$$

Le groupe G admet une présentation finie :

$$\langle g_1, g_2, \dots, g_q ; r_1, r_2, \dots, r_m \rangle.$$

On note L est le groupe libre engendré par g_1, g_2, \dots, g_q et

$$\frac{\partial}{\partial g_i} : \mathbb{Z}[L] \longrightarrow \mathbb{Z}[L], \quad i = 1, 2, \dots, q$$

les dérivées partielles au sens de Fox, voir [1] ou [6]. Ces dérivées partielles sont des applications \mathbb{Z} -linéaires caractérisées par les propriétés suivantes : pour tous les mots a et b de L et pour $i = 1, 2, \dots, q$, on a :

$$\frac{\partial(ab)}{\partial g_i} = \frac{\partial a}{\partial g_i} + a \frac{\partial b}{\partial g_i} \quad \text{et} \quad \frac{\partial 1}{\partial g_i} = 0.$$

Un début de résolution libre de \mathbb{Z} comme $\mathbb{Z}[G]$ -module est (voir [7], [1]) :

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

avec $C_2 = \mathbb{Z}[G]^m$, $C_1 = \mathbb{Z}[G]^q$, $C_0 = \mathbb{Z}[G]$, ε est l'augmentation et

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} \partial r_1 / \partial g_1 & \partial r_2 / \partial g_1 & \cdots & \partial r_m / \partial g_1 \\ \partial r_1 / \partial g_2 & \partial r_2 / \partial g_2 & \cdots & \partial r_m / \partial g_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial r_1 / \partial g_q & \partial r_2 / \partial g_q & \cdots & \partial r_m / \partial g_q \end{pmatrix} \otimes \mathbb{Z}[G],$$

$$\partial_1 = (g_1 - 1, g_2 - 1, \dots, g_q - 1) \otimes \mathbb{Z}[G].$$

Mais si Z est un complexe de dimension deux asphérique (i.e. $\pi_k(Z) = 0$ pour $k \geq 2$), la suite

$$0 \rightarrow C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

est exacte et $C_i = C_i(Z; \mathbb{Z}[G])$ pour $i = 0, 1, 2, 3$.

On considère à nouveau un n -enlacement E d'extérieur X et de groupe π . Notons x_1, x_2, \dots, x_n les générateurs canoniques du groupe libre $L_n = \pi_1(X_0)$ et y_1, y_2, \dots, y_n ceux de $\pi_1(X_1)$. On voit facilement en utilisant la méthode de Wirtinger que le groupe π admet une présentation de la forme :

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_p; r_1, r_2, \dots, r_{n+p} \rangle$$

Pour obtenir cela, il faut attribuer une relation à chaque croisement et ajouter une relation de la forme $x_k y_k^{-1}$ pour chaque brin de E qui ne comporte aucun croisement.

DÉFINITION 1.7. — La *matrice de Fox-Whitehead* du n -enlacement E est la matrice de taille $(n + p) \times (n + p)$ à coefficients dans A :

$$F(E) = \begin{pmatrix} \partial r_1 / \partial x_1 & \partial r_2 / \partial x_1 & \cdots & \partial r_{n+p} / \partial x_1 \\ \partial r_1 / \partial x_2 & \partial r_2 / \partial x_2 & \cdots & \partial r_{n+p} / \partial x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial r_1 / \partial x_n & \partial r_2 / \partial x_n & \cdots & \partial r_{n+p} / \partial x_n \\ \partial r_1 / \partial z_1 & \partial r_2 / \partial z_1 & \cdots & \partial r_{n+p} / \partial z_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial r_1 / \partial z_p & \partial r_2 / \partial z_p & \cdots & \partial r_{n+p} / \partial z_p \end{pmatrix} \otimes A.$$

PROPOSITION 1.8. — Soit $\rho : A \rightarrow B$ une représentation acyclique de A . Alors $F(E) \otimes B$ est un isomorphisme de B^{n+p} et la ρ -torsion de E est égale à la classe de cet isomorphisme dans $K_\rho(B)$.

Démonstration. — L'extérieur X de E étant une 3-variété à bord, il existe un sous-complexe de dimension 2 de X , soit Z tel que l'inclusion $Z \rightarrow X$ soit une équivalence d'homotopie simple. On peut aussi supposer que $Z_0 = X_0 \cap Z$ est un bouquet de n cercles. Ainsi, les modules différentiels gradués acycliques $C_*(X, Z; A)$ et $C_*(X_0, Z_0; \mathbb{Z}[L_n])$ ont une torsion de Whitehead triviale et, par conséquent, $C_*(X, X_0; B)$ et $C_*(Z, Z_0; B)$ ont même ρ -torsion. Posons

$$C'_* = C_*(Z_0; B), \quad C''_* = C_*(Z; B), \quad C_* = C_*(Z, Z_0; B).$$

La suite $0 \rightarrow C' \rightarrow C'' \rightarrow C \rightarrow 0$ est exacte. D'autre part, on peut appliquer à Z les remarques précédentes car $\pi_k(Z) = \pi_k(X) = 0$ pour $k \geq 2$. On obtient

donc un diagramme commutatif dont les colonnes et la dernière ligne sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow \\
 C'_* : & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & B^n & \xrightarrow{\partial'_1} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C''_* : & 0 & \longrightarrow & B^{n+p} & \xrightarrow{\partial'_2} & B^{n+2p} & \xrightarrow{\partial'_1} & B & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 C_* : & 0 & \longrightarrow & B^{n+p} & \xrightarrow{\partial_2} & B^{n+p} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0
 \end{array}$$

On en déduit, en utilisant encore les remarques précédentes, que $\partial_2 = F(E) \otimes B$. D'autre part, la torsion de C_* est la classe de $(\partial_2)^{(-1)^2}$ dans $K_\rho(B)$ [14]. \square

REMARQUE 1.9. — Il faut noter que la ρ -torsion d'une tresse est toujours triviale car, pour une tresse, l'inclusion $X_0 \rightarrow X$ est une équivalence d'homotopie simple.

1.3. Représentations universelles. — La ρ -torsion d'un n -enlacement E n'est pas vraiment un invariant en ce sens que ρ s'exprime en fonction du groupe de cet enlacement (*a priori*, l'anneau B est associé au groupe π , donc à E). Dans le but de construire de "vrais" invariants, on introduit ci-dessous la notion de *représentation universelle*. Étant donné un n -enlacement de groupe π , on note $i_* : L_n \rightarrow \pi$ le morphisme canonique induit par l'inclusion $i : X_0 \rightarrow X$ (en fait i_* est une injection [9]).

DÉFINITION 1.10. — Soit B un anneau et soit G un sous-groupe du groupe du groupe des unités B^* de B . On dit qu'un morphisme de groupes $\rho : L_n \rightarrow G$ est une *représentation n -universelle* si :

- 1) Pour tout n -enlacement de groupe π , ρ se prolonge de façon unique au groupe π . Précisons qu'un *prolongement* $\bar{\rho} : \pi \rightarrow G$ de ρ est un homomorphisme tel $\bar{\rho} \circ i_* = \rho$. Dans la suite, pour simplifier, on notera encore ρ ce prolongement.
- 2) Pour tout n -enlacement de groupe π , le prolongement \mathbb{Z} -linéaire de ρ , encore noté $\rho : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow B$, est une représentation acyclique de $\mathbb{Z}[\pi]$.

Ainsi, pour toute représentation n -universelle ρ du groupe libre L_n , on obtient une application bien définie

$$\tau_\rho : \mathcal{E}(n) \longrightarrow K_\rho(B).$$

On se propose maintenant d'étudier la ρ -torsion d'un produit. On considère donc deux n -enlacement E et E' d'extérieurs respectifs $X(E)$ et $X(E')$ de

groupe π et π' et ρ , une représentation n -universelle. Notons que

$$X_0(E \cdot E') = X_0(E), \quad X_1(E \cdot E') = X_1(E').$$

On désigne encore par x_1, x_2, \dots, x_n les générateurs canoniques de $\pi_1(X_0(E))$, par y_1, y_2, \dots, y_n ceux de $\pi_1(X_1(E))$. Soit $\rho' : \pi' \rightarrow G$ la restriction à π' de l'unique prolongement de ρ au groupe de $E \cdot E'$. En fait, $\rho' : L_n \rightarrow G$ est définie par $\rho'(x_i) = \rho(y_i) = \rho(x'_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ où les x'_i sont les générateurs canoniques de $\pi_1(X_0(E'))$.

PROPOSITION 1.11. — Soient E et E' deux n -enlacements et soit ρ une représentation n -universelle. Alors

$$\tau_\rho(E \cdot E') = \tau_\rho(E) \cdot \tau_{\rho'}(E').$$

Démonstration. — Soient E et E' deux n -enlacements dont les matrices de Fox-Whitehead sont notées $F(E)$ et $F(E')$. On voit facilement que la matrice de Fox-Whitehead du produit $E \cdot E'$ est de la forme :

$$F(E \cdot E') = \begin{pmatrix} F(E) & 0 \\ M & F(E') \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'image de $F(E \cdot E')$ dans B est

$$F(E \cdot E') \otimes B = \rho(F(E \cdot E')) = \begin{pmatrix} \rho(F(E)) & 0 \\ M' & \rho'(F(E')) \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\tau(\rho(F(E \cdot E'))) = \tau(\rho(F(E))) \cdot \tau(\rho'(F(E')))$ dans $K_1(B)$, donc $\tau_\rho(E \cdot E') = \tau_\rho(E) \cdot \tau_{\rho'}(E')$. □

REMARQUE 1.12. — Notons que, dans le groupe π , y_i est conjugué à x_i . Par conséquent, si l'anneau B est commutatif, $\rho'(x_i) = \rho(x_i)$ pour tout i , ce qui implique que $\rho = \rho'$. Dans ce cas $\tau_\rho : \mathcal{E}(n) \rightarrow K_\rho(B)$ est multiplicative.

On se propose de construire dans la suite des représentations universelles. Dans ce but, nous rappelons quelques notions dues à J. Levine, voir [10].

DÉFINITION 1.13. — Un groupe G est dit algébriquement clos (AC, pour abrégé) si tout système d'équations en les inconnues $z_1, z_2 \dots z_q$ de la forme ci-dessous admet une unique solution :

$$\begin{cases} z_1 = (m_{1,1}a_{1,1}m_{1,1}^{-1})(m_{1,2}a_{1,2}m_{1,2}^{-1}) \cdots (m_{1,p_1}a_{1,p_1}m_{1,p_1}^{-1}), \\ z_2 = (m_{2,1}a_{2,1}m_{2,1}^{-1})(m_{2,2}a_{2,2}m_{2,2}^{-1}) \cdots (m_{2,p_2}a_{2,p_2}m_{2,p_2}^{-1}), \\ \vdots \\ z_q = (m_{q,1}a_{q,1}m_{q,1}^{-1})(m_{q,2}a_{q,2}m_{q,2}^{-1}) \cdots (m_{q,p_q}a_{q,p_q}m_{q,p_q}^{-1}). \end{cases}$$

Les $m_{i,j}$ des mots en les $z_1, z_2 \dots z_q$ et les $a_{i,j}$ des éléments quelconques du groupe G . Un tel système d'équations est appelé système contractile.

Il est clair que tout groupe abélien est AC ; on démontre que tout groupe nilpotent est AC, et que toute limite projective de groupes AC est un groupe AC.

Nous ferons usage dans la suite du résultat ci-dessous, voir [10] ou [9].

PROPOSITION 1.14. — *Soit E un n -enlacement de groupe π et soit G un groupe algébriquement clos. Alors tout morphisme de groupes $L_n \rightarrow G$ se prolonge de façon unique à π . \square*

2. Applications et exemples

On se propose maintenant de donner trois applications des résultats du paragraphe précédent.

2.1. Un invariant des 2-enlacements à valeurs dans les séries formelles

Dans cette partie, on prend pour B l'anneau $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}[[t]])$ des matrices 2×2 dont les coefficients sont des séries entières à coefficients entiers. Le groupe G est le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[[t]])$ constitué des matrices

$$m = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$$

où $a(t), b(t), c(t)$ et $d(t)$ sont des séries telles que $a(0) = d(0) = 1$ et $b(0) = c(0) = 0$.

La représentation $\rho : L_2 \rightarrow G$ est définie ainsi :

$$\rho(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \rho(x_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}.$$

On note encore $\rho : \mathbb{Z}[L_2] \rightarrow B$ le prolongement \mathbb{Z} -linéaire de ρ .

THÉOREME 2.1. — *La représentation $\rho : L_2 \rightarrow G$ définie ci-dessus est une représentation universelle pour les 2-enlacements.*

Démonstration. — On se propose d'abord de montrer que G est limite projective de groupes nilpotents, donc algébriquement clos, voir 1.13.

Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par Γ_n l'image de G dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[[t]]/t^n)$ et on pose $G_n = \mathrm{Ker}(G \rightarrow \Gamma_n)$, de sorte que $G_1 = G$ et $G/G_n = \Gamma_n$. Clairement, G est limite projective des Γ_n . Il reste à voir que ces groupes sont nilpotents. Pour cela, on remarque d'abord que $[G_n, G_p]$ est contenu dans G_{n+p} . La démonstration est un calcul simple qui utilise la formule

$$m^{-1} = \begin{pmatrix} d(t) & -b(t) \\ -c(t) & a(t) \end{pmatrix} \quad \text{pour} \quad m = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}.$$

Notons alors Γ_n^p le p -ième de la série centrale descendante de Γ_n définie par $\Gamma_n^1 = \Gamma_n$ et $\Gamma_n^p = [\Gamma_n^{p-1}, \Gamma_n]$. On a donc $\Gamma_n^2 = [G/G_n, G/G_n] = [G, G]/G_n$. Ainsi, Γ_n^2 est contenu dans G_2/G_n . Une récurrence simple montre que Γ_n^p est contenu dans G_p/G_n et, par conséquent, Γ_n^n est réduit à l'élément neutre. Ainsi, le groupe G est algébriquement clos et ρ se prolonge de façon unique à tout groupe π d'un 2-enlacement.

Il reste à voir que ρ est acyclique. Pour cela, il suffit de vérifier que toute matrice m , de taille $n \times n$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[\pi]$ et inversible dans \mathbb{Z} a une image inversible dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{Z}[[t]])$, voir 1.2. Cela revient à prouver que le déterminant de $m \otimes B$ a pour terme constant ± 1 . Le coefficient d'indice i, j de m s'écrit $\sum_k c_k^{ij} g_k^{ij}$ où les c_k^{ij} sont des entiers et les g_k^{ij} des éléments de π . Posons $a_{ij} = \sum_k c_k^{ij}$. Par hypothèse, la matrice (a_{ij}) a pour déterminant ± 1 . L'image de m dans B est

$$m(t) = \sum_k c_k^{ij} z_k^{ij}(t)$$

où $z_k^{ij}(t) = \rho(g_k^{ij})$. Mais $z_k^{ij}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $z_k^{ij}(t)$ est dans G . Ainsi

$$m(0) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & a_{11} & 0 & a_{12} & \dots & 0 & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 & a_{22} & \dots & 0 & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & a_{n1} & 0 & a_{n2} & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

et par conséquent, $\det m(0) = (\det(a_{ij}))^2 = 1$. □

D'une façon générale, le K_1 de l'anneau $\mathcal{M}_n(\Lambda)$ des matrices sur un anneau Λ est égal au $K_1(\Lambda)$ (équivalence de Morita [5], [14]). Ainsi, $K_1(B) = \mathbb{Z}[[t]]^*$, le groupe multiplicatif constitué des séries de terme constant ± 1 . Notons d'autre part que le groupe $\pm G$ a une image triviale dans $K_1(B)$ (car G et $-G$ sont contenus dans $\text{SL}(\mathbb{Z}[[t]])$). Le groupe de Milnor de la représentation ρ est donc $\mathbb{Z}[[t]]^*$.

On pose alors, pour tout 2-enlacement E , $s(E) = \tau_\rho(E)$. On a ainsi construit

$$s : \mathcal{E}(2) \longrightarrow \mathbb{Z}[[t]]^*.$$

Le lemme qui suit est très utile pour traiter les exemples.

LEMME 2.2. — Toute équation dans G de la forme (où z est l'inconnue, les q_k des entiers relatifs et les a_k des éléments de G)

$$(1) \quad z = \prod_{1 \leq k \leq m} z^{q_k} a_k z^{-q_k}$$

admet une unique solution Z dans G . De plus, la suite $(z_p)_{p \geq 1}$ d'éléments de G définie par $z_1 = 1$ et pour $p \geq 1$,

$$z_{p+1} = \prod_{1 \leq k \leq p} z_p^{q_k} a_k z_p^{-q_k}$$

vérifie la relation

$$z_p = Z \bmod G_p \quad \text{pour tout entier } p$$

(où les G_p sont les sous-groupes de G définis en 2.1.1)

Démonstration. — L'existence et l'unicité de la solution Z de (1) sont dus à la propriété de G d'être algébriquement clos. On pourrait dire aussi que G est complet pour la métrique donnée par la filtration $(G_p)_{p \geq 1}$ et que (z_p) est une suite de Cauchy pour cette métrique.

La deuxième assertion se montre par récurrence. Supposons donc que l'on ait $z_p = Z \bmod G_p$. Ceci implique qu'il existe des éléments $b_{k,p}$ de G_p tels que $z_p^{q_k} = Z^{q_k} b_{k,p}$. D'autre part, on peut écrire :

$$z_{p+1} = \prod_{1 \leq k \leq m} [z_p^{q_k}, a_k] a_k.$$

La formule $[a \cdot b, c] = [a, [b, c]] \cdot [b, c] \cdot [a, c]$ appliquée à l'équation précédente montre que :

$$z_{p+1} = \prod_{1 \leq k \leq m} [Z^{q_k}, [b_{k,p}, a_k]] \cdot [b_{k,p}, a_k] \cdot [Z, a_k] a_k.$$

Mais, $[Z^{q_k}, [b_{k,p}, a_k]] = [b_{k,p}, a_k] = 1 \bmod G_{p+1}$. Par conséquent,

$$z_{p+1} = \prod_{1 \leq k \leq m} [Z, a_k] a_k = Z \bmod G_{p+1}. \quad \square$$

Exemple. — Soient E et E' les enlacements de deux intervalles de la figure 1.

1) *Calcul de $s(E)$.* — Le groupe $\pi = \pi_1(X)$ admet pour présentation :

$$\langle x_1, x_2, y_1, y_2, u, z ; y_1 z = x_1 y_1, z y_1 = u z, x_2 u = z x_2, u y_2 = x_2 u \rangle.$$

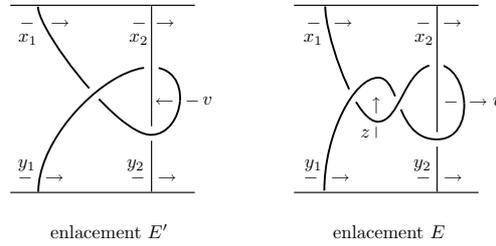


FIGURE 1. Enlacement de deux intervalles

On calcule alors les dérivées de ces quatre relations par rapport à x_1, x_2, u et z , pris dans cet ordre. On obtient pour matrice de Fox-Whitehead :

$$F(E) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 - u \\ 0 & 1 - z & x_2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 - x_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sachant que l'on peut ajouter à un ligne d'une matrice un multiple à gauche d'une autre ligne sans changer la valeur de cette matrice dans K_1 , on voit facilement que $F(E) \otimes B$ est équivalente à la matrice 1×1

$$m = (-z - u + zx_2 + uz - uzx_2) \otimes B.$$

Notons alors $x'_1, x'_2, y'_1, y'_2, u', z'$ les images respectives de x_1, x_2, y_1, y_2, u et z dans le groupe G . Les coefficients des matrices y'_1, y'_2, u', z' sont des séries entières dont le calcul complet ne nous semble pas accessible. Cependant, grâce au lemme 2.2, il est simple de calculer ces séries tronquées à un degré d quelconque. On se propose de faire ce calcul⁽¹⁾ pour $d = 11$.

De la présentation de π donnée ci-dessus, on tire

$$y_1 = x_1^{-1}y_1x_2^{-1}y_1^{-1}x_1y_1x_2y_1^{-1}x_1.$$

Ainsi, d'après le lemme 2.1.17, y'_1 est limite de la suite

$$a_1 = 1, \quad a_{p+1} = (x'_1)^{-1}a_p(x'_2)^{-1}a_p^{-1}x'_1a_px_2a_p^{-1}x'_1.$$

En utilisant à nouveau le lemme, on trouve, tronqué au degré 11,

$$y'_1 = \begin{pmatrix} 1 + t^2 - 2t^4 + 4t^6 - 5t^8 - 13t^{10} & t - 2t^5 + 10t^7 - 39t^9 \\ -t^3 + 4t^5 - 14t^7 + 44t^9 & 1 - t^2 + 2t^4 - 4t^6 + 5t^8 + 13t^{10} \end{pmatrix}$$

⁽¹⁾Avec l'aide du logiciel GP PARI 1.39.

On utilise alors les relations $z = y_1^{-1}x_1y_1$, $u = zy_1z^{-1}$. Il vient (toujours tronqué au degré 11) :

$$m' = \begin{pmatrix} -1 - 2t^2 + 4t^4 - 11t^6 + 30t^8 - 70t^{10} & -t + 2t^3 - 5t^5 + 12t^7 - 22t^9 \\ 2t^3 - 6t^5 + 21t^7 - 71t^9 & -1 + t^2 - 3t^4 + 10t^6 - 32t^8 + 92t^{10} \end{pmatrix}$$

L'invariant $s(E)$ est le déterminant de la matrice de la matrice m' . On obtient $s(E) = 1 + t^2 - t^4 + t^6 + 2t^8 - 22t^{10} \pmod{t^{11}}$.

2) *Calcul de $s(E')$.* — On obtient pour présentation de $\pi_1(X(E'))$:

$$\langle x_1, x_2, y_1, y_2, v ; x_1y_1 = y_1v, x_2v = y_1x_2, vx_2 = y_2v \rangle.$$

et pour matrice de Fox-Whitehead

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 - y_1 & x_2 \\ 0 & v & 1 - y_2 \end{pmatrix}$$

et finalement, tronqué au degré 9, $s(E') = 1 - t^2 - 3t^4 - 11t^6 - 48t^8$.

3) *Calcul de $s(E \cdot E')$ et de $s(E' \cdot E)$.* — On obtient, tronqués au degré 9 :

$$s(E \cdot E') = 1 - 4t^4 - 7t^6 - 34t^8 \quad \text{et} \quad s(E' \cdot E) = 1 - 6t^4 - 6t^6 - 60t^8.$$

REMARQUE 2.3. — On sait que $\mathcal{E}(n)$ contient le groupe P_n des tresse pures et que, par conséquent, $\mathcal{E}(n)$ n'est pas commutatif pour $n \geq 3$. On déduit de l'exemple précédent que $\mathcal{E}(2)$ n'est pas non plus commutatif.

2.2. Un invariant à valeurs entières pour les 3-enlacements. — Soit G le groupe constitué des quaternions $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. On considère la représentation $\rho : L_3 \rightarrow G$ du groupe libre de rang 3 définie par

$$\rho(x_1) = i, \quad \rho(x_2) = j \quad \text{et} \quad \rho(x_3) = k.$$

Soit $\mathbb{H}_{(2)}$ le sous-anneau du corps $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ des quaternions rationnels constitué des éléments de la forme $a + bi + cj + dk$ où a, b, c et d sont des rationnels à dénominateurs impairs. On note aussi

$$\rho : \mathbb{Z}[L_3] \longrightarrow \mathbb{H}_{(2)}$$

le prolongement \mathbb{Z} -linéaire de ρ .

THÉORÈME 2.4. — *La représentation $\rho : L_3 \rightarrow G$ est une représentation universelle pour les 3-enlacements.*

Démonstration. — Notons d'abord que le groupe G est nilpotent, donc algébriquement clos. Ainsi, pour tout 3-enlacement de groupe π , le morphisme $\rho : L_3 \rightarrow G$ se prolonge de façon unique à π . Il reste à voir que le prolongement \mathbb{Z} -linéaire de ρ , encore noté $\rho : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{H}_{(2)}$, est acyclique.

Soit $\eta : \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ l'augmentation réduite modulo 2 et soit $\mu : \mathbb{H}_{(2)} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ l'application définie par

$$\mu(x) = a + b + c + d \pmod{2}$$

pour tout élément $x = a/a' + b/b'i + c/c'j + d/d'k$ de $\mathbb{H}_{(2)}$ (les entiers a, b, c, d sont donc quelconques et a', b', c', d' sont impairs).

La suite de la démonstration utilise les résultats ci-dessous (dont les démonstrations sont reportées un peu plus loin) :

LEMME 2.5. — *L'application $\mu : \mathbb{H}_{(2)} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ est un morphisme d'anneaux et l'on a $\mu \circ \rho = \eta$.*

LEMME 2.6. — *Un élément $x \in \mathbb{H}_{(2)}$ est inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$ si et seulement si $\mu(x)$ est inversible dans $\mathbb{Z}/2$. En particulier, tout élément de $\mathbb{Z}[\pi]$ dont l'image dans \mathbb{Z} est inversible a une image inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$.*

Suite de la démonstration du théorème. — En vertu de la proposition 1.2, il suffit de démontrer que toute matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}[\pi]$ inversible dans \mathbb{Z} est inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$. En fait, il suffit de prouver que toute matrice $m = (a_{rs})$, $1 \leq r, s \leq n$, à coefficients dans $\mathbb{H}_{(2)}$ inversible dans $\mathbb{Z}/2$ est inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$, ou encore que tout système linéaire sur $\mathbb{H}_{(2)}$ de la forme :

$$(S) \quad m \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

possède une unique solution dans $\mathbb{H}_{(2)}$ si $\det \mu(m) = 1 \pmod{2}$. Mais le développement de ce déterminant par rapport à la première colonne s'écrit sous la forme $\mu(a_{11})p_1 + \mu(a_{21})p_2 + \cdots + \mu(a_{n1})p_n = 1 \pmod{2}$, ce qui prouve qu'il existe des entiers naturels q_1, q_2, \dots, q_n tels que $p_s = q_s \pmod{2}$, pour $s = 1, 2, \dots, n$, et tels que $a_{11}q_1 + a_{21}q_2 + \cdots + a_{n1}q_n$ soit inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$. Quitte à ajouter à la première ligne du système (S) une combinaison linéaire entière des autres lignes, on peut donc supposer que a_{11} est inversible dans $\mathbb{H}_{(2)}$. On multiplie alors cette ligne par a_{11}^{-1} . Il devient clair, en continuant dans cette voie, que (S) admet une unique solution. \square

Démonstration du lemme 2.5. — C'est un calcul facile. \square

Démonstration du lemme 2.6. — Clairement, si x est un élément inversible de $\mathbb{H}_{(2)}$, alors $\mu(x) = 1$. Réciproquement, soit $x = a/a' + b/b'i + c/c'j + d/d'k$ un élément de $\mathbb{H}_{(2)}$ tel que $a + b + c + d = 1 \pmod{2}$. Alors x est inversible dans $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$ car $a + b + c + d = 1 \pmod{2}$ implique que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$. Cet inverse s'écrit

$$x^{-1} = \frac{N}{D} \left(\frac{a}{a'} - \frac{b}{b'}i - \frac{c}{c'}j - \frac{d}{d'}k \right)$$

avec $N = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$ et

$$D = a^2 b'^2 c'^2 d'^2 + a'^2 b^2 c'^2 d'^2 + a'^2 b'^2 c^2 d'^2 + a'^2 b'^2 c'^2 d^2.$$

Mais a', b', c', d' étant impairs, on a

$$D = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = a + b + c + d = 1 \pmod{2},$$

ce qui prouve que x^{-1} est bien dans $\mathbb{H}_{(2)}$. □

Rappelons maintenant (voir [14], cor. 2.2.6) qu'étant donné un anneau local L , commutatif ou non, le déterminant de Dieudonné induit un isomorphisme

$$K_1(L) \xrightarrow{\sim} L_{ab}^*$$

où L_{ab}^* est l'abélianisé du groupe des unités L^* de L . Ce déterminant de Dieudonné $\det : \mathrm{GL}_n(L) \rightarrow L_{ab}^*$ possède les propriétés suivantes [14] :

- 1) Si la matrice A' est obtenue de la matrice A par addition à une ligne d'un multiple à gauche d'une autre ligne, alors $\det A' = \det A$.
- 2) Si la matrice A' est obtenue de la matrice A par multiplication à gauche d'une ligne par un élément a de L^* , alors $\det A' = \bar{a} \det A$ ou \bar{a} désigne l'image de a dans L_{ab}^* .
- 3) A et B étant deux matrices de même taille, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- 4) $\det(1) = 1$.

L'anneau $\mathbb{H}_{(2)}$ est clairement local, mais l'abélianisé du groupe des unités \mathbb{H}^* du corps \mathbb{H} de tous les quaternions est plus facilement accessible : c'est le groupe (multiplicatif) \mathbb{R}^+ des nombres réels positifs et l'application d'abélianisation $N : \mathbb{H}^* \rightarrow \mathbb{R}^+$ est donnée par la norme $N(z) = z\bar{z}$, voir [14].

Soit \det_r la restriction à $\mathrm{GL}(\mathbb{H}_{(2)})$ du déterminant de Dieudonné de $\mathrm{GL}(\mathbb{H})$.

LEMME 2.7. — *Le déterminant \det_r induit une surjection*

$$d : K_1(\mathbb{H}_{(2)}) \longrightarrow \mathbb{Q}_{\mathrm{imp}}^+$$

où $\mathbb{Q}_{\mathrm{imp}}^+$ est le groupe multiplicatif des rationnels positifs qui sont quotients de deux entiers impairs.

Démonstration. — On voit facilement que si z est un élément inversible de $\mathbb{H}_{(2)}$, alors $N(z)$ est dans $\mathbb{Q}_{\text{imp}}^+$. Réciproquement, tout rationnel positif p/q est de la forme $N(z)$ pour un certain z dans $\mathbb{H}_{\mathbb{Q}}$: il existe en effet des quaternions entiers x et y tels que $N(x) = p$ et $N(y) = q$ (c'est le théorème des quatre carrés). Il s'ensuit que $p/q = N(x)/N(y) = N(xy^{-1})$. De plus, si p et q sont impairs, x et y sont, d'après le lemme 2.6, des éléments inversibles de $\mathbb{H}_{(2)}$. Donc $z = xy^{-1}$ est aussi dans $\mathbb{H}_{(2)}$. □

La représentation acyclique $\rho : \mathbb{Z}[L_3] \rightarrow \mathbb{H}_{(2)}$ définit donc une torsion τ_ρ qui prend ses valeurs dans $K_1(\mathbb{H}_{(2)})/\pm G$. Notons aussi que l'application d définie ci-dessus se factorise à travers $K_1(\mathbb{H}_{(2)})/\pm G$ car $\pm G$ a une image triviale dans $K_1(\mathbb{H})$.

On pose alors $q = d \circ \tau_\rho$. Ainsi q prend, *a priori*, ses valeurs dans $\mathbb{Q}_{\text{imp}}^+$, mais pour tout 3-enlacement E de matrice de Fox-Whitehead $F(E)$, on a

$$q(E) = \det_r (F(E) \otimes \mathbb{H}_{(2)}).$$

Clairement, les coefficients de $F(E) \otimes B$ sont des quaternions entiers, par conséquent q ne prend que des valeurs entières. Notons \mathbb{N}_{imp} le monoïde multiplicatif des entiers naturels impairs.

THÉORÈME 2.8. — *À tout 3-enlacement E on peut associer un entier positif impair $q(E)$. De plus l'application*

$$q : \mathcal{E}(3) \longrightarrow \mathbb{N}_{\text{imp}}$$

est multiplicative.

Démonstration. — Il reste à voir que q est multiplicative. On utilise les notations de 1.3. Soient E et E' deux 3-enlacements. Dans le groupe de E , x_ℓ est conjugué à y_ℓ , $\ell = 1, 2, 3$. Par conséquent, $\rho(x_\ell)$ est égal, au signe près, à $\rho(y_\ell)$. Supposons par exemple que $\rho(y_1) = -i$. Alors la matrice $\rho'(F(E'))$ s'obtient de $\rho(F(E'))$ par changement de i en $-i$, mais ce changement n'affecte pas le déterminant, et ainsi $q(E \cdot E') = q(E) \cdot q(E')$. □

Exemple. — Considérons le 3-enlacement E de la figure 2. On se propose de calculer $q(E)$.

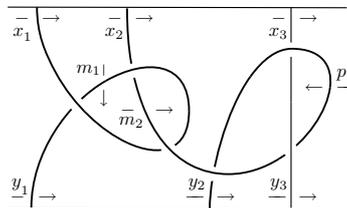


FIGURE 2. Un 3-enlacement

Le groupe $\pi_1(X)$ admet une présentation qui a pour générateurs

$$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, m_1, m_2, p_2$$

et pour relations

$$\begin{aligned} y_1 x_1 &= x_1 m_1, & m_2 m_1 &= x_1 m_2, & x_3 p_2 &= p_2 y_3, \\ m_1 m_2 &= x_2 m_1, & y_2 m_2 &= m_2 p_2, & y_3 p_2 &= m_2 y_3. \end{aligned}$$

Rappelons que $\rho : \pi \rightarrow G$ est définie par $\rho(x_1) = i, \rho(x_2) = j, \rho(x_3) = k$. Les équations ci-dessus forment un système contractile, qui admet dans G une unique solution (voir 1.3.13). On voit facilement que cette solution est

$$y_1 = -i, y_2 = j, y_3 = -k, m_1 = -i, m_2 = -j, p_2 = j.$$

On calcule ensuite la matrice de Fox-Whitehead $F(E)$ de E , puis l'image de $F(E)$ dans $\text{GL}(\mathbb{H}_{(2)})$. On obtient

$$F(E) \otimes \mathbb{H}_{(2)} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -j & 1-i & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & -1 & 0 & 1-j & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1-j & -j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -k \end{pmatrix}.$$

On calcule alors le déterminant de Dieudonné de cette matrice selon les règles rappelées ci-dessus. On trouve $q(E) = 9$.

2.3. Le polynôme d'Alexander. — Soit n un entier positif fixé dans toute cette partie.

On considère le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Z}(t_1, t_2, \dots, t_n)$ en n indéterminées. L'anneau B est le sous-anneau de ce corps constitué des fractions de la forme P/Q où Q est un polynôme tel que $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$. Le groupe G est l'ensemble des monômes $\{t_1^{p_1} t_2^{p_2} \cdots t_n^{p_n}\}$ où les p_k sont des entiers relatifs. Notons encore B^* le groupe des unités de B , c'est-à-dire le groupe constitué des fractions P/Q avec $P(1, 1, \dots, 1) = \pm 1$.

La représentation $\alpha : L_n \rightarrow G$ est simplement l'abélianisation donnée par $\alpha(x_k) = t_k$, $1 \leq k \leq n$. Le prolongement \mathbb{Z} -linéaire de α à $\mathbb{Z}[L_n]$ est encore noté α .

THÉORÈME 2.9. — *La représentation $\alpha : \mathbb{Z}[L_n] \rightarrow B$ est une représentation universelle pour les n -enlacements.*

Démonstration. — Soit E un n -enlacement quelconque de groupe π . Alors L_n et π admettent G pour abélianisé et α se prolonge de façon unique à π .

Il reste à démontrer que ρ est acyclique (on a encore noté ρ le prolongement de ρ à $\mathbb{Z}[\pi]$). On utilise à nouveau la proposition 1.2. Soit m une matrice, de taille $p \times p$, à coefficients dans $\mathbb{Z}[\pi]$ et telle que $m \otimes \mathbb{Z}$ soit inversible dans $\text{GL}_p(\mathbb{Z})$. Soit a_{ij} l'élément d'indice (i, j) de m . Son image dans B s'écrit $a_{ij}(t_1, t_2, \dots, t_n)$: c'est un élément de B dont le dénominateur est dans G . Par conséquent, le déterminant de $m \otimes B$ est un élément P/Q de B dont le dénominateur appartient à G . Mais, par hypothèse, le déterminant de $m(1, 1, \dots, 1)$ est ± 1 . Ainsi, $P(1, 1, \dots, 1) = \pm 1$ ce qui prouve que $m \otimes B$ est inversible. \square

L'application $\det : K_1(B) \rightarrow B^*$ est un isomorphisme, mais l'image de G dans B^* est G . Ainsi le groupe de Milnor de α est B^*/G .

La α -torsion d'un n -enlacement E est un élément de B^*/G que l'on note $p(E)$: on dira que $p(E)$ est le *polynôme d'Alexander de E* . En utilisant la remarque 1.12, on obtient donc le résultat suivant (voir aussi [8]) :

THÉOREME 2.10. — *À tout n -enlacement E on peut associer un polynôme bien défini modulo $\pm G$. Ce polynôme, noté $p(E)$, est appelé polynôme d'Alexander de E . De plus, l'application $p : \mathcal{E}(n) \rightarrow B^*/G$ est multiplicative.*

Polynômes d'Alexander tordus. — Soit Λ un corps commutatif (ou encore un anneau local et commutatif) et soit Λ_B l'anneau $\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} B$. Notons que Λ_B est constitué de fractions P/Q où P et Q sont des polynômes en t_1, t_2, \dots, t_n à coefficients dans Λ tels que $Q(1, 1, \dots, 1) = 1$.

Soit E un n -enlacement de groupe π , et ρ une représentation de π dans $\text{GL}_q(\Lambda)$. Cette représentation se prolonge par linéarité à $\mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathcal{M}_q(\Lambda)$. Les notations précédentes étant conservées, on considère l'application

$$\rho_\alpha : \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \mathcal{M}_q(\Lambda_B)$$

définie par $\rho_\alpha(x) = \alpha(x)\rho(x)$.

Il est facile de voir que l'application ρ_α est un bien un morphisme d'anneaux.

THÉOREME 2.11. — *La représentation*

$$\rho_\alpha : \mathbb{Z}[\pi] \longrightarrow \mathcal{M}_q(\Lambda_B)$$

est acyclique

Démonstration. — Soit m une matrice de taille $p \times p$ à coefficients dans $\mathbb{Z}[\pi]$, telle que $m \otimes \mathbb{Z}$ soit inversible. L'élément d'indice (i, j) de m s'écrit

$$a_{ij} = \sum_k c_{ij}^k x_{ij}^k$$

où les c_{ij}^k sont des entiers et les x_{ij}^k des éléments de π . On a donc

$$\rho_\alpha(a_{ij}) = \sum_k c_{ij}^k \alpha(x_{ij}^k) \rho(x_{ij}^k).$$

Posons $m \otimes \Lambda_B = M(t_1, t_2, \dots, t_n)$. C'est une matrice de taille $qp \times qp$ dont le déterminant est un élément de Λ_B . De plus, $M(1, 1, \dots, 1)$ est la matrice $(\varepsilon(a_{ij})I_q)$ où I_q est la matrice unité de taille $q \times q$ et ε l'augmentation. Ainsi $\det M(1, 1, \dots, 1) = (\det m \otimes \mathbb{Z})^q = \pm 1$, ce qui prouve que $m \otimes K_B$ est inversible dans Λ_B . \square

Notons que l'image dans $K_1(\Lambda_B)$ d'un élément x de π est de la forme $kt_1^{p_1} t_2^{p_2} \dots t_n^{p_n}$ où k est un élément non-nul de Λ et les p_i des entiers relatifs. Ainsi le groupe de Milnor de la représentation ρ_α est Λ_B^*/Λ^*G . On peut donc associer à tout n -enlacement E de groupe π et à toute représentation de π dans $\mathrm{GL}_q(\Lambda)$ sa torsion $\tau_{\rho_\alpha}(E) \in \Lambda_B^*/\Lambda^*G$.

Cette torsion, notée $p_\rho(E)$, est le *polynôme d'Alexander de E tordu par ρ* . On retrouve ainsi une notion introduite par M. Wada dans [16] pour les nœuds et entrelacs.

Si ρ est une représentation n -universelle, on obtient un invariant

$$p_\rho : \mathcal{E}(n) \longrightarrow \Lambda_B^*/\Lambda^*G.$$

Comme application, on peut, par exemple, combiner l'abélianisation α de L_2 à la représentation de ce groupe dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[[t]])$ examinée en 2.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BROWN (K.S.) – *Cohomology of Groups*, Graduate Text in Math., Springer-Verlag, 1982.
- [2] CHAPMAN (T.A.) – *Topological invariance of Whitehead torsion*, Amer. J. Math., t. **96**, 1974, p. 488–497.
- [3] COHEN (M.M.) – *A course in simple homotopy theory*, Graduate Text in Math., Springer-Verlag, 1973.
- [4] COHN (P.M.) – *Free rings and their relations*, Academic Press, 1971.
- [5] FAITH (C.) – *Algebra, vol. 1 : rings, modules and categories*, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [6] FOX (R.H.) – *Free differential calculus I*, Ann. of Math., t. **57**, 1953, p. 547–560.
- [7] FOX (R.H.) – *Free differential calculus II*, Ann. of Math., t. **59**, 1954, p. 196–210.
- [8] KIRK (P.), LIVINGSTONE (C.), WANG (Z.) – *The Gassner representation for string links*, Commun. Contemp. Math., t. **3**, 2001, p. 87–136.

- [9] LE DIMET (J.-Y.) – *Cobordisme d'enlacements de disques*, Mem. Soc. Math. France, t. **116-2**, 1988.
- [10] LEVINE (J.) – *Link concordance and algebraic closure of groups II*, Invent. Math., t. **96**, 1989, p. 236–255.
- [11] MASBAUM (G.), HABBEGER (N.) – *The Kontsevich integral and Milnor's invariants*, Topology, t. **39**, 2000, p. 1253–1289.
- [12] MILNOR (J.) – *A duality theorem for Reidemeister torsion*, Ann. of Math., t. **76**, 1962, p. 137–147.
- [13] MILNOR (J.) – *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc., t. **72**, 1966, p. 358–426.
- [14] ROSENBERG (J.) – *Algebraic K-theory and its application*, Graduate Text in Math., Springer-Verlag, 1994.
- [15] VOGEL (P.) – *On the obstruction group in homology surgery*, I.H.E.S., Publications Math., t. **55**, 1982, p. 165–206.
- [16] WADA (M.) – *Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups*, Topology, t. **33-2**, 1994, p. 241–256.