Bull. Soc. math. France
129 (2), 2001, p. 211–213

APPENDICE À L'ARTICLE D'EDUARDO COREL : CALCUL DES RÉSEAUX DE LEVELT

PAR A.H.M. LEVELT

À la mémoire de Raymond Gérard

RÉSUMÉ. — Un algorithme est présenté pour calculer en toute généralité le « réseau de Levelt » Λ_L pour un réseau Λ donné.

ABSTRACT (*Computation of Levelt lattices*). — An algorithm is presented which computes in all generality "Levelt's lattice" Λ_L for a given lattice Λ.

Avec les notations de l'article de Corel, nous allons étudier la situation suivante :

- M, réseau ∇_θ-stable de V (rappelons que la *régularité de la connexion* ∇ est définie dans l'article de Corel par l'existence d'un réseau stable par ∇_θ) ;
- $\mathcal{N}$, l'ensemble des sous-réseaux de $x^{-1}M$ contenant M ;
- $\mathcal{N}_{\text{stable}}$, le sous-ensemble des réseaux stables de $\mathcal{N}$;
- $\overline{M}$, le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $x^{-1}M/M$;
- δ, le $\mathbb{C}$-endomorphisme de $\overline{M}$ induit par ∇_θ ;
- $\phi : x^{-1}M \to \overline{M}$, l'application canonique ;
- $\mathcal{F}$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $\overline{M}$;
- $\mathcal{F}_{\text{stable}}$, l'ensemble des éléments δ-stables de $\mathcal{F}$.

Texte reçu le 31 août 2000

A.H.M. LEVELT, Université de Nimègue, Pays-Bas • *E-mail :* `ahml@sci.kun.nl`

Classification mathématique par sujets (2000). — 34A30, 34C20, 34M15, 34M35.

Mots clefs. — Système différentiel, point singulier régulier, réseau, exposants, relation de Fuchs.

PROPOSITION 1. — *L'application* $\Phi : N \mapsto (N+M)/M$ *induit une bijection de* $\mathcal{N}$ *sur* $\mathcal{F}$ *dont* $F \mapsto \phi^{-1}(F)$ *est l'application inverse. La restriction de* Φ *à* $\mathcal{N}_{\text{stable}}$ *est une bijection sur* $\mathcal{F}_{\text{stable}}$.

La démonstration élémentaire est laissée au lecteur.

PROPOSITION 2. — *Soit* W *un* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel de dimension finie,* δ *un endomorphisme* $\mathbb{C}$*-linéaire de* W *et* F *un sous-espace vectoriel de* W*. Définissons*

$$F_L = \{w \in F \mid \delta^i(w) \in F \text{ pour } i = 0, 1, 2, \ldots\} = \bigcap_{i=0}^{\infty} (\delta^i)^{-1}(F).$$

Alors F_L *est le plus grand sous-espace* δ*-stable de* F.

REMARQUE 1. — On voit facilement $\bigcap_{i=0}^{\infty}(\delta^i)^{-1}(F) = \bigcap_{i=0}^{\dim(F)}(\delta^i)^{-1}(F)$.

Démonstration. — Prouvons d'abord l'inclusion $\delta(F_L) \subset F_L$. Pour $w \in F_L$, on a $\delta^i(w) \in F$ pour tout i. D'où $\delta^i(\delta(w)) \in F$ pour tout i, c'est-à-dire $\delta(w) \in F_L$. Ensuite, soit G un sous-espace δ-stable de F. Alors pour tout $w \in G$ et tout i, on a $\delta^i(w) \in G$, donc $\in F$. Ceci montre que $w \in F_L$ et on conclut que $G \subset F_L$. □

THÉORÈME 1. — (*Avec les notations et définitions précédentes et* $W = \overline{M}$). *Soit* ∇ *une connexion régulière sur* V *et* Λ *un réseau de* V*. Alors il existe un sous-réseau stable* M *de* Λ *tel que* $x^{-1}M \not\subset \Lambda$*. Pour chaque* M *ayant ces propriétés on définit*

$$F = \phi(x^{-1}M \cap \Lambda) \text{ et } N = \phi^{-1}(F_L).$$

Alors N *est un sous-réseau stable de* Λ *vérifiant* $M \subset N \subset x^{-1}M \cap \Lambda$*. De plus les énoncés suivants sont équivalents :*

(i) $N = M$;
(ii) M *est le plus grand sous-réseau stable de* Λ.

REMARQUE 2. — Le plus grand sous-réseau stable de Λ est appelé *réseau de Levelt* dans [1] et dans l'article de Corel. Notation : Λ_L.

Démonstration. — Par définition, V contient un réseau stable P. Pour un $r \in \mathbb{Z}$ convenable, on a $x^r P \subset \Lambda$. Prenons r le plus petit possible ; alors $M = x^r P$ a les propriétés désirées. En vertu de la proposition 1, N contient M et N est un sous-réseau stable de $x^{-1}M$, même de $x^{-1}M \cap \Lambda$.

Nous allons démontrer (i) $\Rightarrow$ (ii) par l'absurde. Supposons que $N = M$ et que Γ soit un sous-réseau stable de Λ qui n'est pas contenu dans M. Remplaçant si besoin Γ par $\Gamma + M$, on peut supposer que $M \subset \Gamma$. Il existe $g \in \Gamma \backslash M$ tel que $xg \in M$, donc $g \in x^{-1}M \cap \Gamma$. Grâce aux propositions 1 et 2, le sous-réseau stable $x^{-1}M \cap \Gamma$ de $x^{-1}M \cap \Lambda$ est contenu dans N, donc contenu dans M et nous avons la contradiction $g \in x^{-1}M \cap \Gamma \subset M$.

L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est triviale. $\square$

Le théorème 1 donne naissance à un algorithme, nommé LSSL (*largest stable sub-lattice*), calculant Λ_L si la matrice de ∇_θ par rapport à une $\mathcal{O}$-base de Λ est donnée. On calcule d'abord M par l'algorithme *minimal_pole* de [3] et ensuite une $\mathcal{O}$-base de $x^{-1}M \cap \Lambda$, une base du $\mathbb{C}$-sous-espace

$$F = (x^{-1}M \cap \Lambda)/M$$

de $\overline{M}$ et une base de F_L. Ainsi on obtient un $\mathcal{O}$-base de N. Si $N = M$, on sait que $\Lambda_L = M$. Dans le cas contraire on remplace M par $M_1 = N$ et on répète la construction précédente. Notons qu'alors $\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M_1) < \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M)$. Si M_1 est le plus grand sous-réseau stable de Λ, on a fini. Sinon, on trouve un sous-réseau stable $M_2 \subset x^{-1}M_1 \cap \Lambda$ contenant strictement M_1. Donc $\dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M_2) < \dim_{\mathbb{C}}(\Lambda/M_1)$. Évidemment cette procédure s'arrête après un nombre fini d'étapes.

L'algorithme LSSL a été implanté en Maple et appliqué aux exemples de la thèse de Corel (logiciels disponibles, message électronique à ahml@sci.kun.nl).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Corel (E) – *Exposants, réseaux de Levelt et relations de Fuchs pour les systèmes différentiels réguliers*, thèse, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 28 juin 1999.

[2] Gérard (R.), Levelt (A.H.M.) – *Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, **23** (1973), 157–195.

[3] Levelt (A.H.M.) – *Stabilizing Differential Operators*, in *Differential Equations and Computer Algebra*, M. Singer (éd.), Academic Press (1991), 181–228.