

# BULLETIN DE LA S. M. F.

MOHAMED MKAOUAR

## **Sur le développement en fraction continue de la série de Baum et Sweet**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 123, n° 3 (1995), p. 361-374

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1995\\_\\_123\\_3\\_361\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1995__123_3_361_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## SUR LE DÉVELOPPEMENT EN FRACTION CONTINUE DE LA SÉRIE DE BAUM ET SWEET

PAR

MOHAMED MKAOUAR (\*)

---

RÉSUMÉ. — Baum et Sweet ont donné en 1976 un exemple d'élément algébrique sur  $\mathbb{F}_2(X)$  de degré 3 dont le développement en fraction continue est à quotients partiels de degrés bornés. L'objet principal de ce travail est de montrer d'une part que ce développement n'est pas engendré par un automate fini et d'autre part qu'il est engendré par une substitution de longueur non constante sur un alphabet à 20 lettres.

ABSTRACT. — Baum and Sweet gave in 1976 an example of algebraic element on  $\mathbb{F}_2(X)$  of degree 3 which has a bounded continued fraction expansion. Our principal result is first to prove that this expansion is not generated by a finite automaton, and then that it is generated by a finite substitution of non-constant length on an alphabet of 20 letters.

### 1. Introduction

On ne connaît aucun nombre réel algébrique de degré supérieur à 3, dont le développement en fraction continue est à quotients partiels bornés (voir par exemple [SHA] et [P-S]). Plus de choses sont connues dans le cas des séries formelles

$$\sum a_n X^{-n}$$

sur un corps fini  $\mathbb{F}_p$  de caractéristique  $p$  qui sont algébriques sur le corps de fractions rationnelles  $\mathbb{F}_p(X)$  : en 1976, BAUM et SWEET ont donné dans [B-S1] le premier exemple d'une série formelle de degré 3 en caractéristique  $p = 2$ , dont les quotients partiels ne prennent qu'un nombre fini de valeurs ainsi que des exemples dont les quotients partiels prennent une infinité de valeurs. Ce travail a été poursuivi par BAUM et

---

(\*) Texte reçu le 8 juillet 1993, révisé le 6 décembre 1993 et le 24 janvier 1994.  
M. MKAOUAR, Faculté des Sciences de Sfax, Département de Mathématiques, Sfax 3038, Tunisie.

Classification AMS : 11A55, 11B85, 30B70.

SWEET dans [B-S2]. Comme l'algébricité de  $f = \sum a_n X^{-n}$  équivaut à la  $p$ -automaticité de la suite  $(a_n)$  d'après le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy [C-K-M-R], MENDÈS FRANCE a posé la question naturelle suivante : *si les quotients partiels de  $f$  ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, forment-ils eux aussi une suite  $p$ -automatique ?*

En d'autres termes ce type de régularité de la suite  $(a_n)$  passe-t-il à la suite des quotients partiels ? On voit que la réponse à cette question suppose qu'on sache, d'une part identifier les séries algébriques à quotients partiels prenant un nombre fini de valeurs, d'autre part, donner une expression (explicite) de ces quotients partiels, enfin montrer la  $p$ -automaticité en utilisant ce développement explicite. En 1986, MILLS et ROBBINS ont donné des exemples de telles séries avec des développements en fraction continue explicites, et en particulier les seuls exemples connus en caractéristique  $p > 2$  [M-R].

En 1988, ALLOUCHE, BÉTRÉMA et SHALLIT ont montré dans [ALL1] et [A-B-S] que, pour chaque exemple donné dans [M-R], avec  $p > 3$ , la suite des quotients partiels est  $p$ -automatique. La méthode utilisée ne permettait pas d'étudier l'exemple initial donné en caractéristique 2 par BAUM et SWEET. Nous allons montrer que, pour cet exemple, la suite des quotients partiels n'est pas  $q$ -automatique (pour tout entier  $q \geq 2$ ), mais qu'elle est substitutive.

## 2. Substitutions

(Voir [EIL], [QUE] et [MAU].)

Soit  $\Sigma$  un alphabet fini contenant deux lettres au moins. Les éléments de  $\Sigma^i$  sont appelés *mots de longueur  $i$*  ( $i \geq 1$ ). On convient que  $\Sigma^0$  est l'ensemble dont le seul élément est le mot vide et on pose

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\infty} \Sigma^i$$

l'ensemble des mots finis sur  $\Sigma$ , et  $M(\Sigma)$  l'ensemble des mots finis et infinis sur  $\Sigma$ . Si  $m \in \Sigma^*$ , on note  $|m|$  la longueur du mot  $m$ .

DÉFINITION 1. — Soit  $\sigma$  une application de  $\Sigma$  dans  $\Sigma^*$ . Par concaténation,  $\sigma$  se prolonge en une application de  $M(\Sigma)$  dans lui-même en posant :

$$\text{pour tout } (m', m'') \in \Sigma^{*2}, \quad \sigma(m'm'') = \sigma(m')\sigma(m'')$$

et, pour tout  $m \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ ,

$$\sigma(m) = \sigma(m_0)\sigma(m_1) \cdots \sigma(m_n) \cdots \quad \text{si } m = m_0 \cdots m_n \cdots.$$

L'application  $\sigma$  ainsi obtenue est appelée *substitution* sur l'alphabet  $\Sigma$ . Si de plus,  $|\sigma(a)| = q$  pour tout  $a \in \Sigma$ , alors l'application  $\sigma$  est appelée une *q-substitution*.

Soit  $\ell \in \Sigma$  telle que  $\sigma(\ell) \in \ell\Sigma^*$ . On munit  $M(\Sigma)$  de la métrique naturelle  $\rho$  :

$$\rho(m_0m_1m_2 \cdots; m'_0m'_1m'_2 \cdots) = \frac{1}{\inf\{n \geq 1 \mid m_{n-1} \neq m'_{n-1}\}}.$$

En désignant par  $\sigma^n$  la  $n$ -ème itérée de  $\sigma$ , on voit que la suite  $(\sigma^n(x))$  converge vers un élément  $s \in \ell\Sigma^{\mathbb{N}}$  qui est point fixe de la substitution  $\sigma$  :

$$\sigma(s) = s.$$

DÉFINITION 2. — Soient  $\sigma$  une substitution sur l'alphabet fini  $\Sigma$ ,  $\Xi$  un alphabet fini et  $\tau$  une application de  $\Sigma$  vers  $\Xi$ . On dit que le mot infini  $t \in \Xi^{\mathbb{N}}$  est *engendré* par une substitution s'il existe  $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$  tel que  $\sigma(s) = s$  et  $\tau(s) = t$ . Si  $\sigma$  est une *q-substitution*, on dit que  $t$  est *engendré par une q-substitution* (ou un *q-automate*).

### 3. Énoncé du résultat

Il est démontré dans [B-S1] que l'équation

$$Xf^3 + f + X = 0$$

admet une solution unique  $f$  dans  $\mathbb{F}_2((X^{-1}))$  admettant des quotients partiels appartenant à  $\{1, X, X + 1, X^2, X^2 + 1\}$  et donc bornés. Par ailleurs, il est démontré dans [M-R] que le développement en fraction continue de  $f$  est donné par

$$f = [1, X, \Gamma_\infty],$$

où  $\Gamma_\infty$  est la suite définie comme suit. Notons  $T$  l'ensemble de polynômes sur  $\mathbb{F}_2$  défini par :

$$T = \{X, X + 1, X^2, X^2 + 1\}.$$

Si  $\Omega = (w_j)_{1 \leq j \leq m} \in T^m$  est une suite de quotients partiels, nous notons :

$$\begin{aligned} \overleftarrow{\Omega} &= w_m w_{m-1} \cdots w_2 w_1, \\ \tau(\Omega) &= (w_1 + 1)w_2 \cdots w_m, \\ \Omega^{(n)} &= \underbrace{\Omega \Omega \cdots \Omega}_n, \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

- Pour  $n$  impair,  $n \geq 3$  notons  $\Lambda_n$  la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X, X + 1, X^2, (X, X^2)^{((2^{n-1}-4)/3)}, X + 1, X.$$

- Pour  $n$  pair,  $n \geq 4$ , notons  $\Lambda_n$  la suite palindromique :

$$\Lambda_n = X + 1, X^2 + 1, (X, X^2)^{((2^{n-1}-5)/3)}, X, X^2 + 1, X + 1.$$

Soit

$$\Gamma_0 = X + 1,$$

$$\Gamma_1 = \Gamma_0, X^2 + 1,$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_1, X, X^2, X + 1,$$

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1}, \tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}), \Lambda_n, \Gamma_{n-3} \text{ pour } n \geq 3.$$

Comme  $\Gamma_n$  commence par  $\Gamma_{n-1}$  alors  $\Gamma_n$  admet une limite, notée  $\Gamma_\infty$ .

Nous nous proposons de démontrer les théorèmes suivants :

THÉORÈME 1. — *La suite  $X, \Gamma_\infty$  est substitutive*

THÉORÈME 2. — *La suite  $X, \Gamma_\infty$  n'est pas 2-automatique.*

THÉORÈME 3. — *La suite  $X, \Gamma_\infty$  n'est pas  $q$ -automatique pour aucun nombre  $q \geq 2$ .*

#### 4. Démonstration du théorème 1

Soient

$$H = \{e, a_i, b_j, c_k, d_\ell ; 0 \leq i \leq 5, 0 \leq k \leq 2, 0 \leq j \leq 5, 0 \leq \ell \leq 3\}$$

et  $H^*$  l'ensemble des mots finis formés par des éléments de  $H$ . Soit  $P$  la projection  $P : H \rightarrow T$  définie par :

$$P(e) = P(a_i) = X, \quad P(b_j) = X + 1, \quad P(c_k) = X^2, \quad P(d_\ell) = X^2 + 1.$$

Soit  $\alpha$  la substitution sur  $H$  et soit  $\pi$  la permutation de  $H$  définies respectivement par :

$$\alpha : \begin{cases} e \mapsto eb_0 & b_0 \mapsto d_0 & c_0 \mapsto a_5c_0a_5 & d_0 \mapsto a_0c_1b_4 \\ a_0 \mapsto a_2a_1 & b_1 \mapsto d_1 & c_1 \mapsto b_2c_0b_1 & d_1 \mapsto a_5c_0b_1 \\ a_1 \mapsto b_3b_5 & b_2 \mapsto d_2 & c_2 \mapsto a_0c_1a_3 & d_2 \mapsto b_2c_0a_5 \\ a_2 \mapsto c_2 & b_3 \mapsto d_3 & & d_3 \mapsto b_5c_1a_3, \\ a_3 \mapsto a_4a_2 & b_4 \mapsto a_4b_0 & & \\ a_4 \mapsto b_4b_0 & b_5 \mapsto b_3a_1 & & \\ a_5 \mapsto c_0 & & & \end{cases}$$

$$\pi : \begin{cases} e \mapsto e & b_0 \mapsto b_3 & c_0 \mapsto c_0 & d_0 \mapsto d_3 \\ a_0 \mapsto a_3 & b_1 \mapsto b_2 & c_1 \mapsto c_1 & d_1 \mapsto d_2 \\ a_1 \mapsto a_4 & b_2 \mapsto b_1 & c_2 \mapsto c_2 & d_2 \mapsto d_1 \\ a_2 \mapsto a_2 & b_3 \mapsto b_0 & & d_3 \mapsto d_0. \\ a_3 \mapsto a_0 & b_4 \mapsto b_5 & & \\ a_4 \mapsto a_1 & b_5 \mapsto b_4 & & \\ a_5 \mapsto a_5 & & & \end{cases}$$

Montrons que :

$$X\Gamma_\infty = P(\alpha^\infty e).$$

Posons  $I_0 = \{b_3, b_5, d_3\}$  et  $J_0 = \{b_0, b_4, d_0\}$  et soient :

- $I$  la partie de  $H^*$  formée des mots commençant par un élément de  $I_0$  ;
- $J$  la partie de  $H^*$  formée des mots se terminant par un élément de  $J_0$ .

Soient  $\delta$  et  $\gamma$  les applications définies par :

- $\delta : I_0 \rightarrow H$  avec  $\delta(b_3) = a_2$ ,  $\delta(b_5) = a_0$  et  $\delta(d_3) = c_2$  ;
- $\gamma : J_0 \rightarrow H$  avec  $\gamma(b_0) = a_2$ ,  $\gamma(b_4) = a_3$  et  $\gamma(d_0) = c_2$ .

On prolonge  $\delta$  et  $\gamma$  respectivement sur  $I$  et  $J$  de la façon suivante : si  $W = w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m$ , alors :

$$\delta(W) = \delta(w_1) w_2 \dots w_m \quad \text{et} \quad \gamma(W) = w_1 \dots w_{m-1} \gamma(w_m).$$

On remarque que  $\pi$  est une bijection de  $I_0$  dans  $J_0$  et que  $\pi^2$  est l'identité puis que  $\gamma = \pi \delta \pi$ . On vérifie aussi que  $\alpha \circ \delta = \delta \circ \alpha$  sur  $I$ , et que  $\alpha \circ \gamma = \gamma \circ \alpha$  sur  $J$ . Soit maintenant  $\Gamma'_n$  la suite définie par :

$$\begin{aligned} \Gamma'_0 &= b_0, & \Gamma'_1 &= b_0 d_0, & \Gamma'_2 &= b_0 d_0 a_0 c_1 b_4 \\ \Gamma'_n &= \Gamma'_{n-1} \delta(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})}) \Lambda'_n \Gamma'_{n-3} & \text{pour } n &\geq 3. \end{aligned}$$

Cette définition de la suite  $\Gamma'_n$  a un sens car  $\Gamma'_n \in J$  ; donc  $\overleftarrow{\pi(\Gamma'_n)}$  est dans  $I$ . La suite  $\Lambda'_n$  est définie par :

- si  $n$  est impair,  $n \geq 3$ , alors  $\Lambda'_n = a_1 b_2 c_0 (a_5 c_0)^{((2^{n-1}-4)/3)} b_1 a_4$
- si  $n$  est pair,  $n \geq 4$ , alors  $\Lambda'_n = b_5 d_2 (a_5 c_0)^{((2^{n-1}-5)/3)} a_5 d_1 b_4$ .

On vérifie que  $\overleftarrow{\pi(\Lambda'_n)} = \Lambda'_n$  et que  $P(\Lambda'_n) = \Lambda_n$  puis que  $P(\overleftarrow{\Gamma'_n}) = \overleftarrow{P(\Gamma'_n)}$ . Pour démontrer le THÉORÈME 1 nous avons besoin de quelques lemmes.

LEMME 1. — Pour tout  $n \geq 3$ , on a  $\alpha(\Lambda'_n) = b_3 \Lambda'_{n+1} b_0$ .

Preuve. — Si  $n$  est pair,  $n \geq 4$  :

$$\begin{aligned} \alpha(\Lambda'_n) &= \alpha(b_5 d_2) (\alpha(a_5 c_0))^{((2^{n-1}-5)/3)} \alpha(a_5 d_1 b_4) \\ &= b_3 a_1 b_2 c_0 a_5 (c_0 a_5 c_0 a_5)^{((2^{n-1}-5)/3)} c_0 a_5 c_0 b_1 a_4 b_0 \\ &= b_3 \Lambda'_{n+1} b_0. \end{aligned}$$

Si  $n$  est impair,  $n \geq 3$  :

$$\begin{aligned} \alpha(\Lambda'_n) &= \alpha(a_1 b_2 c_0) (\alpha(a_5 c_0))^{((2^{n-1}-4)/3)} \alpha(b_1 a_4) \\ &= b_3 b_5 d_2 a_5 c_0 a_5 (c_0 a_5 c_0 a_5)^{((2^{n-1}-4)/3)} c_0 a_5 d_1 b_4 b_0 \\ &= b_3 \Lambda'_{n+1} b_0. \quad \square \end{aligned}$$

LEMME 2. — Pour tout  $n \geq 0$  on a :

- (i)  $\alpha(e\Gamma'_n) = e\Gamma'_{n+1}$
- (ii)  $\alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma}'_n)) b_3 = \pi(\overleftarrow{\Gamma}'_{n+1})$ .

Preuve. — (Par récurrence sur  $n$ .) Vérifions tout d'abord que (i) et (ii) sont vraies pour  $n = 0, 1$  et  $2$  :

- Si  $n = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(e\Gamma'_0) &= e b_0 d_0 = e\Gamma'_1, \\ \alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma}'_0)) b_3 &= \alpha(b_3) b_3 = d_3 b_3 = \pi(d_0 b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma}'_1). \end{aligned}$$

- Si  $n = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(e\Gamma'_1) &= e b_0 d_0 a_0 c_1 b_4 = e\Gamma'_2, \\ \alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma}'_1)) b_3 &= \alpha(d_3 b_3) b_3 = b_5 c_1 a_3 d_3 b_3 = \pi(b_4 c_1 a_0 d_0 b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma}'_2). \end{aligned}$$

- Si  $n = 2$ , on a :

$$\begin{aligned} \alpha(e\Gamma'_2) &= e b_0 d_0 a_0 c_1 b_4 a_2 a_1 b_2 c_0 b_1 a_4 b_0 = e\Gamma'_3, \\ \alpha(\pi(\overleftarrow{\Gamma}'_2)) b_3 &= \alpha(b_5 c_1 a_3 d_3 b_3) b_3 = b_3 a_1 b_2 c_0 b_1 a_4 a_2 b_5 c_1 a_3 d_3 b_3 \\ &= \pi(b_0 a_4 b_1 c_0 b_2 a_1 a_2 b_4 c_1 a_0 d_0 b_0) = \pi(\overleftarrow{\Gamma}'_3). \end{aligned}$$

- Supposons maintenant que  $n \geq 3$ . On a

$$(1) \quad \Gamma'_n = \Gamma'_{n-1} \delta(\pi(\overleftarrow{\Gamma}'_{n-3})) \Lambda'_n \Gamma'_{n-3}$$

et l'hypothèse de récurrence nous donne :

$$(i) \alpha(e\Gamma'_{n-1}) = e\Gamma'_n \text{ et } b_0\alpha(\Gamma'_{n-3}) = \Gamma'_{n-2};$$

$$(ii) \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})})b_3 = \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-2})}.$$

En appliquant  $\alpha$  dans (1), on a :

$$\alpha(e\Gamma'_n) = \alpha(e\Gamma'_{n-1}) \alpha(\delta(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})})) \alpha(\Lambda'_n) \alpha(\Gamma'_{n-3}).$$

D'après le LEMME 1 et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \alpha(e\Gamma'_n) &= e\Gamma'_n \delta(\alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})})) b_3 \Lambda'_{n+1} b_0 \alpha(\Gamma'_{n-3}) \\ &= e\Gamma'_n \delta(\alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})}) b_3) \Lambda'_{n+1} \Gamma'_{n-2} \\ &= e\Gamma'_n \delta(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-2})}) \Lambda'_{n+1} \Gamma'_{n-2} \\ &= e\Gamma'_{n+1}. \end{aligned}$$

Pour démontrer (ii), il suffit de remarquer que :

$$\overleftarrow{\pi(\Gamma'_n)} = \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})} \Lambda'_n \gamma(\Gamma'_{n-3}) \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-1})}$$

et par hypothèse de récurrence et le LEMME 1 on a :

$$\begin{aligned} \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_n)}) b_3 &= \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})}) \alpha(\Lambda'_n) \alpha(\gamma(\Gamma'_{n-3})) \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-1})}) b_3 \\ &= \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})}) b_3 \Lambda'_{n-3} b_0 \gamma(\alpha(\Gamma'_{n-3})) \alpha(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-1})}) b_3 \\ &= \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-2})} \Lambda'_{n+1} \gamma(b_0 \alpha(\Gamma'_{n-3})) \overleftarrow{\pi(\Gamma'_n)} \\ &= \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-2})} \Lambda'_{n+1} \gamma(b_0 \alpha(\Gamma'_{n-2})) \overleftarrow{\pi(\Gamma'_n)} \\ &= \overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n+1})}. \end{aligned}$$

*Suite de la démonstration du théorème 1.* — D'après le LEMME 2, on a  $\alpha^n(e) = e\Gamma'_{n-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . On peut vérifier facilement (par récurrence sur  $n$ ) que  $P(\Gamma'_n) = \Gamma_n$ . En effet l'égalité est vraie pour  $n = 0, 1$  et 2. Pour  $n \geq 3$  on a :

$$\begin{aligned} \Gamma'_n &= \Gamma'_{n-1} \delta(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})}) \Lambda'_n \Gamma'_{n-3}, \\ P(\Gamma'_n) &= P(\Gamma'_{n-1}) P(\delta(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})})) P(\Lambda'_n) P(\Gamma'_{n-3}). \end{aligned}$$



par hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned}
 P(\Gamma'_n) &= \Gamma_{n-1} \tau(P(\overleftarrow{\pi(\Gamma'_{n-3})})) \Lambda_n \Gamma_{n-3} \\
 &= \Gamma_{n-1} \tau(P(\overleftarrow{\Gamma'_{n-3}})) \Lambda_n \Gamma_{n-3} \\
 &= \Gamma_{n-1} \tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}) \Lambda_n \Gamma_{n-3} \\
 &= \Gamma_n. \quad \square
 \end{aligned}$$

**5. Démonstration du théorème 2**

Soit  $\Theta : T \rightarrow \{a, b\}$  la projection définie par :

$$\Theta(X) = \Theta(X^2) = a, \quad \Theta(X + 1) = \Theta(X^2 + 1) = b.$$

On pose  $S_n = \Theta(\Gamma_n)$ . Si  $\Gamma_\infty$  est 2-automatique, alors  $S_\infty$  l'est aussi. Supposons que  $S_\infty$  soit 2-automatique. Il existe alors un alphabet fini  $\Sigma$ , une 2-substitution  $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma^*$ , un point fixe  $S'_\infty$  de  $\sigma$  et une projection  $P : \Sigma \rightarrow \{a, b\}$  tels que  $S_\infty = P(S'_\infty)$ . Soient  $A = P^{-1}\{a\}, B = P^{-1}\{b\}$  et donc  $\Sigma = A \cup B$ . Soit  $S'_n$  le début de  $S'_\infty$  tel que  $S_n = P(S'_n)$ . Comme on a

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \tau(\overleftarrow{\Gamma_{n-3}}) \Lambda_n \Gamma_{n-3},$$

alors  $S_n$  satisfait une relation analogue à celle de  $\Gamma_n$  et par suite on peut écrire  $S_n$  de la manière suivante :

$$S_n = S_{n-1} \tau'(\overleftarrow{S_{n-3}}) \Lambda'_n S_{n-3},$$

où  $\tau'$  est l'application définie par  $\tau'(a) = b$  et  $\tau'(b) = a$ , et prolongée sur  $\{a, b\}^*$  de la manière suivante :

$$\text{si } w = w_1 w_2 \cdots w_m, \text{ alors } \tau'(w) = \tau'(w_1) w_2 \cdots w_m.$$

La suite  $\Lambda'_n$  est la suite palindromique définie par :

- si  $n$  est pair,  $n \geq 4$ , alors  $\Lambda'_n = bb(a)^{((2^n-7)/3)}bb$ ;
- si  $n$  est impair,  $n \geq 3$ , alors  $\Lambda'_n = ab(a)^{((2^n-5)/3)}ba$ .

Comme  $S_n = P(S'_n)$ , il existe une partie  $\Lambda''_n$  dans  $S'_n$  telle que l'on ait  $\Lambda'_n = P(\Lambda''_n)$ .

REMARQUE 1. — La suite  $\Lambda''_n$  privée de ses deux premiers et deux derniers termes est un élément de  $A^*$ .

REMARQUE 2. — Soit  $u_n = |\Gamma_n|$ . Comme on a

$$\Gamma_n = \Gamma_{n-1} \tau(\overline{\Gamma_{n-3}}) \Lambda_n \Gamma_{n-3},$$

alors  $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = 5$  et

$$u_n = u_{n-1} + 2u_{n-3} + \frac{1}{3}(2^n + (-1)^{n+1} + 6).$$

Il en résulte :

$$u_n = \frac{4}{3}2^n + \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \lambda_3 r_3^n + \lambda_4 (-1)^{n+1} + \lambda_5$$

où 
$$\begin{cases} \lambda_i = \frac{26 + 10r_i - r_i^2}{116} & \text{pour } 1 \leq i \leq 3, \\ \lambda_4 = \frac{1}{12}, \quad \lambda_5 = -1, \end{cases}$$

et où  $r_1, r_2$  et  $r_3$  sont solutions de l'équation  $r^3 - r^2 - 2 = 0$  :

$$\begin{cases} r_1 = \frac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} + \frac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} + \frac{1}{3}, \\ r_2 = \frac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} j + \frac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} j^2 + \frac{1}{3}, \\ r_3 = \frac{\sqrt[3]{28 - \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} j^2 + \frac{\sqrt[3]{28 + \sqrt{(28)^2 - 1}}}{3} j + \frac{1}{3}, \end{cases}$$

avec  $j = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}i$ .

On vérifie facilement que  $1 < |r_2| = |r_3| < r_1 < 2$  et donc :

$$u_n = \frac{4}{3}2^n + \lambda_1 r_1^n + o(r_1^n).$$

LEMME 3. — *Posons :*

$$S_n = X_n Y_n S_{n-3} \quad \text{avec} \quad |X_n| = 2^n - 1,$$

$$S'_\infty = W_0 W_1 \cdots W_n \cdots \quad \text{avec} \quad |W_n| = 2^n, \quad \forall n \geq 1 \text{ et } |W_0| = 2.$$

Soit  $A_n$  le facteur de  $S'_n$  dont les indices de début et de fin sont ceux de  $Y_n$  dans  $S_n$ . Alors il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > m_0$  on a :

- (i)  $A_n$  est suffixe de  $\Lambda''_n$ ,
- (ii)  $|A_n| < |A_{n+1}| < 2|A_n|$ ,
- (iii)  $A_n$  est préfixe de  $W_n$ .

*Preuve.* — Soient  $u_n = |\Gamma_n| = |S'_n|$  et

$$S'_n = x(0)x(1)x(2) \cdots x(2^n - 1) \cdots x(u_n).$$

Si on effectue une coupure sur  $S'_{n''}$  au niveau de  $x(2^n - 1)$ , alors cette coupure est faite exactement sur  $\Lambda_n$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} u_{n-1} + u_{n-3} &= \frac{5}{6} 2^n + O(r_1^n), \\ u_{n-1} + u_{n-3} + |\Lambda''_n| &= \frac{7}{6} 2^n + O(r_1^n), \end{aligned}$$

et par suite

$$u_{n-1} + u_{n-3} \leq 2^n - 1 \leq u_{n-1} + u_{n-3} + |\Lambda''_n|,$$

ce qui montre que la coupure se fait sur  $\Lambda''_n$ . Donc  $A_n$  est suffixe de  $\Lambda''_n$ .

Soit  $v_n = |A_n| - 2$  et montrons que  $v_n < v_{n+1} < 2v_n$ . On a :

$$v_n = u_{n-1} + u_{n-3} + |\Lambda''_n| - 2^n - 1.$$

Or  $u_n = \frac{4}{3} 2^n + \lambda_1 r_1^n + o(r_1^n)$ , ce qui donne

$$v_n = 2^n + o(2^n), \quad 2v_n - v_{n+1} = \lambda_1(r_1 - 1)r_1^{n-2} + o(r_1^n)$$

et comme  $r_1 > 1$ , alors il existe  $m_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > m_0$ , on a  $v_n < v_{n+1} < 2v_n$ . Si l'on définit alors les  $W_n$  comme dans l'énoncé, on constate que le choix de  $X_n$  et l'inégalité  $|A_n| \leq |\Lambda''_n| < 2^{n-1}$  impliquent que  $A_n$  est préfixe de  $W_n$ .

REMARQUE 3. — Les  $A_n$  sont formés par des éléments de  $A$ , à l'exception de leurs deux derniers termes.

*Suite de la démonstration du théorème 2.* — Le lemme précédent peut se traduire par le schéma suivant :

$$\begin{aligned} S'_\infty &= \frac{W_{n-1} \quad | \quad W_{n-1}}{\hspace{10em}} \\ S'_\infty &= \frac{\hspace{10em} | \quad A_n \quad |}{\hspace{10em}} \\ S'_\infty &= \frac{S_{n-1} \quad | \quad \tau'(S_{n-3}) \quad | \quad \Lambda'_n \quad |}{\hspace{10em}} \\ &\qquad \frac{5}{6} 2^n + O(r_1^n) \quad 2^n \quad \frac{7}{6} 2^n + O(r_1^n) \end{aligned}$$

On remarque que  $A_{n+1}$  est préfixe de  $\sigma(A_n)$  et que  $P(A_n)$  commence par  $(a)^{v_n}$ . Soit  $C$  un préfixe de  $A_n$ . Si  $|\sigma^i(C)| \leq v_{n+i}$  alors  $\sigma^i(C)$ , qui est préfixe de  $A_{n+i}$ , a une image par  $P$  qui ne contient que des  $a$ . Si  $|\sigma^i(C)| > v_{n+i}$  alors  $P(\sigma^i(C))$  contient un  $b$ . Conclusion, si l'on a

$$(*) \quad |\sigma^i(C)| \leq v_{n+i} \quad \text{pour } 0 \leq i < p,$$

alors le mot  $C$  contient une lettre  $c_p$  de l'alphabet  $\Sigma$  telle que :

$$(**) \quad P(\sigma^i(c_p)) \begin{cases} = (a)^{2^i} & \text{pour } 0 \leq i < p, \\ \neq (a)^{2^p} & \text{pour } i = p, \end{cases}$$

On se fixe un entier  $p$ . Comme  $|\sigma(C)| = 2^i|C|$  et comme

$$v_n = \frac{1}{6} 2^n + \lambda_1 r_1^n + o(r_1^n) = 2v_{n-1} + \lambda_1 r_1^{n-1}(r_1 - 2) + o(r_1),$$

on a  $v_{n+1} < 2v_n$  pour  $n$  assez grand. On en déduit que, pour  $n$  assez grand, les conditions (\*) sont vérifiées si :

$$2^{p-1}|C| \leq v_{n+p-1}, \quad v_{n+p} < 2^p|C|.$$

Si, pour  $n$  assez grand, l'intervalle  $]2^{-p}v_{n+p}, 2^{-p+1}v_{n+p-1}]$  contient un entier (que l'on prendra pour  $|C|$ ), l'alphabet  $\Sigma$  contient une lettre  $c_p$  vérifiant (\*\*). Or la longueur

$$2^{-p}(2v_{n+p-1} - v_{n+p}) \sim 2^{-p}\lambda_1 r_1^{n-p+1}(2 - r_1)$$

de cet intervalle tendant vers l'infini avec  $n$ , ceci est toujours vérifié. Pour chaque entier  $p$ , l'alphabet  $\Sigma$  contient donc une lettre  $c_p$  vérifiant (\*\*). Ces lettres sont distinctes ce qui contredit la finitude de l'alphabet  $\Sigma$ .  $\square$

COROLLAIRE. — *La suite  $\Gamma_\infty$  n'est pas  $2^p$ -automatique, pour tout  $p \geq 1$ .*

Le corollaire est une conséquence immédiate d'un théorème de Cobham [COB1].  $\square$

### 6. Démonstration du théorème 3

DÉFINITION 3. — Soit  $m$  un mot infini sur l'alphabet  $A$  et  $a \in A$ . On note  $\Pi(a, m, n)$  le nombre d'apparitions de  $a$  dans  $m(0)m(1)\dots m(n-1)$ .

La densité asymptotique inférieure et la densité asymptotique supérieure de  $a$  dans  $m$  sont respectivement les limites :

$$d^-(a, m) = \liminf \frac{\Pi(a, m, n)}{n},$$

$$d^+(a, m) = \limsup \frac{\Pi(a, m, n)}{n}.$$

Si  $d^-(a, m) = d^+(a, m)$  alors cette valeur commune est notée  $d(a, m)$  et est appelée la *densité asymptotique* de  $a$  dans  $m$ .

THÉORÈME 4 [COB2]. — Soit  $m$  une suite  $q$ -automatique. Alors on a  $d(a, m) = 0$  si et seulement si il existe deux entiers  $u$  et  $v$  tels que

$$q^{u-1} \leq v < q^u \quad \text{et} \quad m(n) \neq a$$

pour tout entier  $n$  de la forme

$$n = jq^{u+k} + vq^k + i$$

avec  $j, k \geq 0$  et  $0 \leq i < q^k$  (autrement dit, tel que le développement en base  $q$  de  $n$  contienne celui de  $v$ ).

Nous avons déjà montré que la suite  $\Gamma_\infty$  n'est pas  $2^p$ -automatique ( $p \geq 1$ ); il nous reste à montrer que si  $\log_2 q$  n'appartient pas à  $\mathbb{N}$ ,  $\Gamma_\infty$  n'est pas  $q$ -automatique. Dans la démonstration de ce théorème, on va utiliser le THÉORÈME 4.

On a  $\Gamma_n = m(1)m(2)\dots m(u_n)$ . Comme  $\Gamma_n$  se termine soit par  $X+1$ , soit par  $X^2+1$ , alors  $m(u_n)$  appartient à  $\{X+1, X^2+1\}$ . On vérifie que  $d(X+1, \Gamma_\infty) = d(X^2+1, \Gamma_\infty) = 0$ . Par ailleurs, si  $S_n = \Theta(\Gamma_n)$ , où  $\Theta$  est l'application définie sur  $T$  par

$$\Theta(X^2+1) = \Theta(X+1) = b, \quad \Theta(X) = \Theta(X^2) = a,$$

et :

- si  $S_n = m'(1)m'(2)\dots m'(u_n)$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $m'(u_n) = b$ ,
- si  $S_\infty = \Theta(\Gamma_\infty)$ , alors  $d(b, S_\infty) = 0$ .

Considérons  $q$  tel que  $\log_2 q$  ne soit pas dans  $\mathbb{N}$  et montrons que  $S_\infty$  n'est pas  $q$ -automatique. Pour cela, il suffit de prouver que pour tout entier  $v \geq 1$ , il existe  $(j, k, n) \in \mathbb{N}^3$  tel que

$$(jq^u + v)q^k \leq u_n \leq (jq^u + v + 1)q^k - 1,$$

où  $u$  est l'unique entier tel que  $q^{u-1} \leq v < q^u$ , et le théorème de Cobham permettra de conclure.

Soit  $v \geq 1$  et soit  $u$  l'unique entier tel que  $q^{u-1} \leq v < q^u$ . Comme  $u_n = |\Gamma_n| = |S_n| \sim \frac{4}{3} 2^n$ , on peut écrire  $u_n$  sous la forme :

$$u_n = c_n 2^n, \text{ avec } \lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \frac{4}{3}.$$

Soit  $0 < \delta < 1/(4q^u)$  pour que

$$\frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} < \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta}.$$

Il existe alors  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n > n_0$ , on ait  $\frac{4}{3} - \delta < c_n < \frac{4}{3} + \delta$ , et  $q^{-k} < \frac{1}{4}$  pour tout  $k > 1$ .

Soit  $F = \{k \log_2 q, k > n_0, k \in \mathbb{N}\}$ ; alors  $F$  est dense modulo 1 (car  $\log_2 q$  n'est pas rationnel). Donc, il existe  $n, k > n_0$  tel que

$$\log_2 \frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} < n - k \log_2 q < \log_2 \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta}$$

et par suite :

$$\log_2 \frac{q^u + v}{\frac{4}{3} - \delta} + k \log_2 q < n < \log_2 \frac{q^u + v + \frac{3}{4}}{\frac{4}{3} + \delta} + k \log_2 q.$$

Comme  $\frac{4}{3} - \delta < c_n < \frac{4}{3} + \delta$  et  $q^{-k} < \frac{1}{4}$ , il vient :

$$\begin{aligned} \log_2 \frac{(q^u + v)q^k}{c_n} &< n < \log_2 \frac{(q^u + v + 1 - q^{-k})q^k}{c_n}, \\ (q^u + v)q^k &< c_n 2^n < (q^u + v + 1)q^k - 1, \\ (q^u + v)q^k &< u_n < (q^u + v + 1)q^k - 1. \quad \square \end{aligned}$$

### 6. Conclusion

Notre travail nous conduit à reformuler la question posée par MENDÈS FRANCE de la manière suivante : *si  $f$  est algébrique sur  $\mathbb{F}[X]$  et si son développement en fraction continue est à quotients partiels de degré borné, alors ce développement est-il toujours engendré par une substitution sur un alphabet fini ?*

Je remercie vivement Jean-Paul ALLOUCHE, Christian MAUDUIT et Jeffry SHALLIT pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches, ainsi que pour les nombreuses discussions que nous avons pu avoir.

## BIBLIOGRAPHIE

- [AL1] ALLOUCHE (J.-P.). — *Automates finis en théorie des nombres*, Expo. Math., t. **5**, 1987, p. 239–266.
- [ALL 2] ALLOUCHE (J.-P.) Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles. — C. R. Acad. Sciences, t. **307**, 1988, p. 631–633.
- [A-B-S] ALLOUCHE (J.-P.), BETREMA (J.) et SHALLIT (J.). — *Sur des points fixes de morphismes d'un monoïde libre*, RAIRO Informatique Théorique et Applications, t. **23**, 1989, p. 235–249.
- [A-F-V] ALLOUCHE (J.-P.), MENDÈS FRANCE (M.) et VAN DER POORTEN (A.J.). — *An infinite product with bounded partial quotients*, Acta Arithmetica, t. **59**, 1991, p. 171–182.
- [B-S 1] BAUM (L.E.) et SWEET (M.M.). — *Continued fractions of algebraic power series in characteristic 2*, Ann. of Math., t. **103**, 1976, p. 593–610.
- [B-S 2] BAUM (L.E.) et SWEET (M.M.). — *Badly approximable power series in characteristic 2*, Ann. of Math., t. **105**, 1977, p. 573–580.
- [C-K-M-R] CHRISTOL (G.), KAMAE (T.), MENDÈS FRANCE et RAUZY (G.) Suites algébriques, automates et substitutions. — Bull. Soc. Math. France, t. **108**, 1980, p. 401–419.
- [COB 1] COBHAM (A.). — *On the base-dependence of sets of numbers reconizable by finite automata*, Math. Syst. Theory, t. **3**, 1969, p. 186–192.
- [COB2] COBHAM (A.). — *Uniform tag sequences*, Math. Syst. Theory, t. **6**, 1972, p. 164–192.
- [EIL] EILENBERG (S.). — *Automata, languages and machines, vol. A.* — Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1974.
- [MAU] MAUDUIT (C.). — *Substitutions et ensemble normaux*, Habilitation à diriger des recherches, 1989, Université Aix Marseille II.
- [MKA] MKAOUAR (M.). — *Sur le développement en fraction continue de certaines séries formelles*, Thèse de Doctorat, 1993, Université Claude Bernard Lyon I.
- [M-R] MILLS (W.H.) et ROBBINS (D.P.). — *Continued fractions for certain algebraic power series*, J. of Number Theory, t. **23**, 1986, p. 388–404.
- [QUE] QUEFFÉLEC (M.). — *Substitution dynamical systems-spectral analysis.* — Lecture Notes in Mathematics **1294**, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [SHA] SHALLIT (J.O.). — *Real numbers with bounded partial quotients a survey*, L'Enseignement Math., t. **38**, 1992, p. 151–187.
- [S-V] SHALLIT (J.O.) et VAN DER POORTEN (A.J.). — *Folded continued fractions*, J. Number Theory, t. **40**, 1992, p. 237–250.