BULLETIN DE LA S. M. F.

AHMED ABOUELAZ
RADOUAN DAHER

Sur la transformation de Radon de la sphère S^d

Bulletin de la S. M. F., tome 121, nº 3 (1993), p. 353-382
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_3_353_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 353–382.

SUR LA TRANSFORMATION DE RADON DE LA SPHÈRE S^d

PAR

AHMED ABOUELAZ ET RADOUAN DAHER (*)

RÉSUMÉ. — Nous introduisons et étudions une transformation de Radon sur la sphère de dimension d, obtenue par intégration sur des sphères de dimension $(d-1)$. Nous établissons notamment des formules d'inversion et de Plancherel pour cette transformation et des formules d'inversion pour la transformation duale.

ABSTRACT. — We define and study the Radon transform on the sphere S^d. This transform is obtained by integration on the $(d-1)$-dimensional sphere. We specially establish inversion's theorems and Plancherel's formulas for this transform. Inversion's theorems for the dual Radon transform are also given.

Introduction

Parmi les nombreux travaux qui étudient des problèmes de géométrie intégrale sur un espace symétrique (voir par exemple [5], [7], [8], [9], [13], etc.), le cas d'un espace symétrique de type compact est moins souvent considéré que le type non compact. Le cas compact a toutefois été abordé a plusieurs reprises, notamment par S. HELGASON (voir [7], [9]); T. SHERMAN a, d'autre part, développé une analyse de Fourier sur la sphère, analogue à celle des groupes de Lie abéliens (voir [12]).

Notre propos est ici de définir et étudier une transformation de Radon sur la sphère $S^d = \mathrm{SO}(d+1)/\mathrm{SO}(d)$ de dimension d. Cette transformation R consiste essentiellement à intégrer une fonction donnée sur la famille des sphères de dimension $(d-1)$ passant par un point fixé, $a_\pi = (0,0,0,\dots,-1)$, de S^d appelé *pôle sud.* Si l'on applique aux fonctions sur S^d qui sont invariantes par rotation autour de ce point, on obtient

(*) Texte reçu le 23 janvier 1992, révisé le 15 juin 1992.
Ahmed ABOUELAZ et Radouan DAHER, Département de Mathématiques et d'Informatique, Faculté des Sciences Ain Chok, BP 5366 Mâarif, Casablanca, Maroc.
Classification AMS : 22E25, 22E30, 43A80, 43A85, 58G35.

une analogie intéressante avec la transformation d'Abel de l'espace hyperbolique $\mathrm{SO}_0(d,1)/\mathrm{SO}(d)$ (de dimension d), qui consiste à intégrer sur les horocycles (de dimension $(d-1)$).

Notre transformation R sur la sphère est ainsi — comme celle de l'espace hyperbolique — liée simplement à la transformation de Fourier sphérique (paragraphe 2 ci-dessous). Elle peut s'inverser au moyen d'un opérateur différentiel (si d est impair) ou intégro différentiel (si d est pair) ; ces théorèmes d'inversion sont établis au paragraphe 3 pour des fonctions C^∞ sur la sphère, invariantes par le groupe $\mathrm{SO}(d)$, et nulles au voisinage du pôle sud, qui joue ici — en quelque sorte — le rôle de point à l'infini.

Nous donnons aussi au paragraphe 3 — dans l'esprit des articles [10] et [11] de T. KOORNWINDER — quelques résultats (par exemple théorème d'inversion et estimations de type L^p) pour une transformation intégrale plus générale $R_{\alpha\beta}$, non nécessairement issue d'une structure géométrique ; le cas de la sphère S^d correspondant à $\alpha=1$ et $\beta=\frac{1}{2}(d-1)$.

Une formule de Plancherel est établie au paragraphe 4 pour la transformation R. Nous obtenons enfin au paragraphe 5 des formules d'inversion pour la transformation duale R^* et pour la transformation R^*R.

Nous remercions vivement le Professeur François ROUVIÈRE pour les conseils et suggestions qu'il a bien voulu nous apporter.

1. Notations et préliminaires

Pour $d \geq 2$, on note S^d la sphère unité de dimension d dans $\mathbb{R}^{d+1}$. Soient $(e_1, e_2, e_3, \dots, e_{d+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{d+1}$ et

$$N = (0,0,0,\dots,0,1) = e_{d+1}$$

le pôle nord. Le groupe spécial orthogonal $G = \mathrm{SO}(d+1)$ opère transitivement sur S^d ; on désigne par K le sous-groupe de G, stabilisateur du point N, isomorphe à $\mathrm{SO}(d)$:

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathrm{SO}(d) \right\}.$$

La sphère S^d s'écrit comme espace homogène de la manière suivante :

$$S^d = G/K = \mathrm{SO}(d+1)/\mathrm{SO}(d).$$

Désignons par A le sous-groupe de G formé des matrices

$$a_t = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

où $t \in \mathbb{R}$ et I_{d-1} est la matrice unité.

Ce groupe A est constitué des rotations dans le plan e_d, e_{d+1} conservant $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{d-1}$. Le groupe G admet la décomposition de Cartan $G = \mathrm{KAK}$. On note M le centraliseur de A dans K, constitué des matrices de K de la forme

$$m = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad u \in \mathrm{SO}(d-1).$$

Le groupe K admet aussi la décomposition de Cartan suivante $K = \mathrm{MBM}$, où B est le sous-groupe de K des matrices de la forme

$$b_\theta = \begin{pmatrix} I_{d-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Ce sont des rotations dans le plan e_{d-1}, e_d conservant les vecteurs $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_{d-2}, e_{d+1}$. Dans [3], le corollaire 1-7, page 10, donne l'expression de la mesure de Haar normalisée du groupe G. Pour la décomposition $G = \mathrm{KAK}$, si f est une fonction continue sur G,

$$(1) \quad \int_G f(g)\,\mathrm{d}g = B\big(\tfrac{1}{2}d, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi \Big\{\int_{K\times K} f(ka_tk')\,\mathrm{d}k\,\mathrm{d}k'\Big\}(\sin t)^{d-1}\,\mathrm{d}t,$$

où $\mathrm{d}k$ désigne la mesure de Haar normalisée du groupe K (c'est-à-dire $\int_K \mathrm{d}k = 1$) et $B(\ ,\ )$ la fonction bêta d'Euler. De même, la mesure de Haar normalisée de K s'exprime dans la décomposition $K = \mathrm{MBM}$ comme suit : si h est une fonction continue sur K alors

$$(2) \quad \int_K h(k)\,\mathrm{d}k = B\big(\tfrac{1}{2}(d-1), \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \times \int_0^\pi \Big\{\int_{M\times M} h(mb_\theta m')\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}m'\Big\}(\sin\theta)^{d-2}\,\mathrm{d}\theta,$$

où $\mathrm{d}m$ désigne la mesure de Haar normalisée du groupe M. Notons que lorsque la fonction f est K bi-invariante sur G (respectivement lorsque h est M bi-invariante sur K), les deux formules ci-dessus deviennent :

$$(3) \quad \int_G f(g)\,\mathrm{d}g = B\big(\tfrac{1}{2}d, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi f(a_t)(\sin t)^{d-1}\,\mathrm{d}t,$$

$$(4) \quad \int_K h(k)\,\mathrm{d}k = B\big(\tfrac{1}{2}(d-1), \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi h(b_\theta)(\sin\theta)^{d-2}\,\mathrm{d}\theta.$$

Nous savons que les fonctions sphériques de S^d, notées φ_n (avec $n \in \mathbb{N}$), peuvent s'exprimer à l'aide des polynômes de Gegenbauer appelés aussi *polynômes ultrasphériques* (cf. [3, p. 11]).

Soit $C_n^\lambda(z)$ le polynôme de Gegenbauer avec $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda > -\frac{1}{2}$. Ce polynôme admet plusieurs représentations intégrales. Celle qui s'avère être la plus intéressante est l'intégrale de Mehler (cf. [2, p. 177])

$$C_n^\lambda(\cos\tau) = 2^\lambda B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \frac{(2\lambda)_n}{n\,!} (\sin\tau)^{1-2\lambda} \times \int_0^\tau \cos(n+\lambda)t \cdot (\cos t - \cos\tau)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

La convergence de cette intégrale aura lieu si et seulement si $\lambda > 0$, car $(\cos t - \cos\tau)^{1-\lambda}$ est équivalent à $(\tau - t)^{1-\lambda}(\sin\tau)^{1-\lambda}$ au voisinage de τ. Les fonctions sphériques de S^d sont alors données par (voir [3, p. 11])

$$\varphi_n(x) = \frac{n\,!}{(2\lambda)_n} C_n^\lambda(x \cdot N), \tag{6}$$

avec $\lambda = \frac{1}{2}(d-1)$, où $x \in S^d$ et où N est le pôle nord de S^d.

Signalons que pour $\lambda = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $d = 2$, on retrouve les polynômes de Legendre (cf. [7, prop. 2-8, p. 404]). Il est à noter aussi qu'on peut définir les fonctions sphériques φ_n sur le groupe G par

$$\varphi_n(g) = \varphi_n(g \cdot N) \quad \text{où} \quad g \in G. \tag{7}$$

2. Transformation de Fourier sphérique sur S^d et approche géométrique de la transformation de Radon

a) *Transformation de Radon sur S^d.* — Nous définissons la transformation de Fourier-Gegenbauer sur la sphère S^d de la manière suivante :

$$\tilde{f}(n) = \int_G f(g)\varphi_n(g^{-1})\,\mathrm{d}g, \tag{8}$$

où f est une fonction continue K bi-invariante sur G. Sachant que les fonctions sphériques φ_n sur G s'expriment à l'aide des polynômes de Gegenbauer et en utilisant la formule d'intégration sur G (égalité (3)), l'égalité (8) devient :

$$\tilde{f}(n) = \frac{n\,!}{(2\lambda)_n} B\big(\lambda + \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi f(a_t) C_n^\lambda(\cos t)(\sin t)^{2\lambda}\,\mathrm{d}t. \tag{9}$$

En remplaçant $C_n^\lambda(\cos t)$ par l'intégrale dite de Mehler (égalité (5)), il vient donc :

$$(10)\quad \tilde{f}(n) = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \int_0^\pi f(a_t) \sin t \,\mathrm{d}t \Big\{ \int_0^t \cos(n+\lambda)\tau \cdot (\cos\tau - \cos t)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}\tau \Big\}.$$

Par une permutation d'intégrale, il s'ensuit que :

$$(11)\quad \tilde{f}(n) = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \int_0^\pi \cos(n+\lambda)\tau \Big\{ \int_{t=\tau}^\pi f(a_t) \sin t (\cos\tau - \cos t)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}t \Big\} \,\mathrm{d}\tau.$$

Nous avons ainsi écrit la transformation de Fourier-Gegenbauer comme composée de la transformée de Fourier cosinus classique (avec décalage de λ) avec une transformation intégrale que nous appellerons *transformée de Radon* sur la sphère S^d, notée R. En d'autres termes :

$$(12)\qquad \tilde{f}(n) = \int_0^\pi \cos(n+\lambda)\tau \cdot Rf(\tau) \,\mathrm{d}\tau,$$

avec

$$(13)\qquad Rf(\tau) = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \int_{t=\tau}^\pi f(a_t) \sin t \cdot (\cos\tau - \cos t)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}t,$$

où $0 < \tau < \pi$, où $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda = \frac{1}{2}(d-1)$.

L'analogue de cette définition pour l'espace hyperbolique réel de dimension d s'écrit :

$$(14)\qquad Rf(\tau) = c \int_{t=\tau}^\infty f(a_t) \,\mathrm{sh}\, t \cdot (\mathrm{ch}\, t - \mathrm{ch}\, \tau)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}t,$$

où c est une constante positive.

Il est bien connu que cette dernière égalité a une interprétation géométrique en termes de groupes de Lie. Dans ce qui suit nous donnons une interprétation analogue dans le cas des sphères.

b) *Une approche géométrique de la transformation de Radon sur la sphère S^d.* — On se propose d'étudier l'intégrale

$$(15)\qquad I_F(t) = \int_K F\big(a_{(\pi+t)/2}\, k\, a_{(\pi-t)/2} N\big) \,\mathrm{d}k, \qquad t \in \mathbb{R},$$

où F est une fonction continue K-invariante sur S^d. Donnons tout d'abord la signification géométrique de cette intégrale.

Soit $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_{d+1}^0) \in S^d$; l'orbite Kx^0 est l'intersection de S^d avec l'hyperplan $x_{d+1} = x_{d+1}^0$, c'est la sphère (de dimension $d-1$) de diamètre d'extrémités x^0 et $(-x_1^0, \ldots, -x_d^0, x_{d+1}^0)$.

Prenons $x^0 = a_{(\pi-t)/2}N = \big(0, 0, \ldots, -\cos\frac{1}{2}t, \sin\frac{1}{2}t\big)$. L'autre extrémité du diamètre est $\big(0, 0, \ldots, \cos\frac{1}{2}t, \sin\frac{1}{2}t\big) = a_{(t-\pi)/2}N$. Il en résulte que les $a_{(t+\pi)/2}\, k\, a_{(\pi-t)/2}N$ forment une sphère (de dimension $d-1$) de diamètre $a_\pi N = S$ (pôle sud) et $a_t N$.

Pour illustrer ceci faisons un dessin dans le cas de la sphère S^2 (voir figure 16).

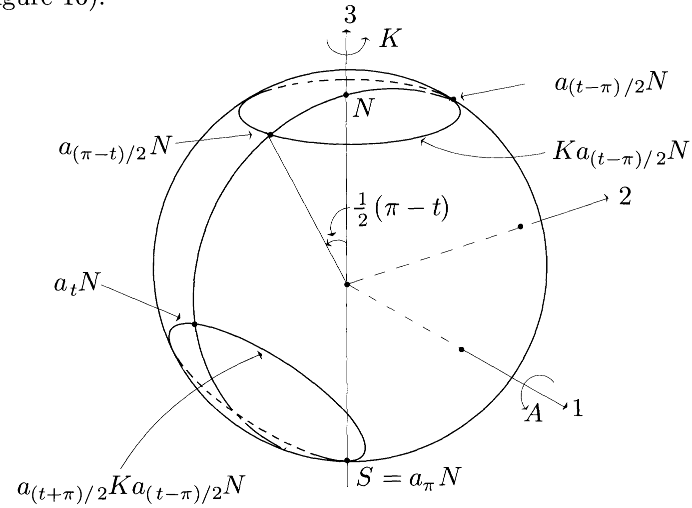

Figure 16

A présent, calculons explicitement l'intégrale $I_F(t)$. La décomposition de Cartan $K = \mathrm{MBM}$ donne

$$(17)\qquad I_F(t) = B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi (\sin\theta)^{d-2}\,\mathrm{d}\theta \times \int_{M\times M} F(a_{(\pi+t)/2}\cdot m\, b_\theta\, m' a_{(\pi-t)/2}\cdot N)\,\mathrm{d}m\,\mathrm{d}m'.$$

En utilisant l'invariance de F par K (a fortiori par M) et le fait que M commute à A, avec $m'N = N$, il vient donc

$$(18)\qquad I_F(t) = B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi F(x_{t,\theta})(\sin\theta)^{d-2}\,\mathrm{d}\theta,$$

avec $x_{t,\theta} = a_{(\pi+t)/2}\cdot b_\theta a_{(\pi-t)/2}\cdot N$.

Par un calcul de matrices 3×3 (ou un calcul direct), on a :

$$x_{t,\theta} = \Big(0, 0, \ldots, 0, \sin\theta \cos \tfrac{1}{2} t, -\sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot \sin t, 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} t - 1\Big).$$

Donc

$$x_{-t,\theta} = \operatorname{diag}\big(-1, 1, 1, \ldots, 1, -1, 1\big) \cdot x_{t,\theta} ,$$

où $\operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{d+1})$ est la matrice à $(d+1)$ lignes et à $(d+1)$ colonnes qui vaut $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{d+1}$ sur la diagonale et zéro ailleurs.

On a de même

$$x_{t+2\pi,\theta} = \operatorname{diag}\big(-1, 1, 1, \ldots, 1, -1, 1, 1\big) \cdot x_{t,\theta}.$$

Puisque $\operatorname{diag}(-1, 1, 1, \ldots, 1, -1, 1)$ et $\operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1, -1, 1, 1)$ sont des éléments de K, on obtient, grâce à la K-invariance de F,

$$I_F(-t) = I_F(t) = I_F(t + 2\pi) \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}. \tag{19}$$

D'autre part, on a $x_{t,\theta} = b_\alpha a_\tau \cdot N$ avec :

$$\begin{cases} \sin\alpha \cdot \sin\tau = \sin\theta \cdot \cos \tfrac{1}{2} t, \\ \cos\alpha \cdot \sin\tau = \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot \sin t, \\ \cos^2 \tfrac{1}{2}\tau = \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos^2 \tfrac{1}{2} t. \end{cases}$$

Ceci détermine α et τ (modulo 2π), connaissant θ et t (modulo 2π).

Mais d'après la parité et la 2π-périodicité de $I_F(t)$ (voir égalité 19), on peut se limiter à $0 \le t \le \pi$

$$F(x_{t,\theta}) = F(a_\tau \cdot N) = F(a_{-\tau} \cdot N), \tag{20}$$

par la K-invariance ($a_{-t} \cdot N = \operatorname{diag}(-1, 1, \ldots, 1, -1, 1) \cdot a_t \cdot N$). On peut donc prendre $0 \le \tau \le \pi$ et par suite

$$\cos \tfrac{1}{2}\tau = \sin \tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos \tfrac{1}{2} t. \tag{21}$$

Pour t fixé dans $[0, \pi]$ et θ variant de 0 à π, le τ correspondant est alors dans $[0, \pi]$ et plus exactement dans $[t, \pi]$.

Avec un tel τ vérifiant l'égalité (21), et grâce à l'égalité (20), nous avons :

$$I_F(t) = B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi F(a_\tau \cdot N)(\sin\theta)^{d-2} \, \mathrm{d}\theta. \tag{22}$$

D'autre part

$$(23)\quad \begin{aligned} I_F(t) &= B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} \int_0^\pi F(a_\tau \cdot N)(\sin\theta)^{d-3} 2\sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \cos\tfrac{1}{2}\theta \cdot \mathrm{d}\theta \\ &= 2B(\lambda, \tfrac{1}{2})^{-1} \int_t^\pi F(a_\tau \cdot N)(\sin\theta)^{d-3} \sin\tfrac{1}{2}\theta \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\tau}{\cos\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}\tau, \end{aligned}$$

$$(24)\quad I_F(t) = B(\lambda, \tfrac{1}{2})^{-1} \int_t^\pi F(a_\tau \cdot N)(\sin\theta)^{d-3} \frac{\sin\tau}{\cos^2\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}\tau.$$

La dernière égalité est justifiée par l'égalité (21) car

$$\sin\frac{1}{2}\theta = \frac{\cos\frac{1}{2}\tau}{\cos\frac{1}{2}t} \quad \text{entraîne} \quad \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \mathrm{d}\theta = \frac{\sin\frac{1}{2}\tau}{\cos\frac{1}{2}t}\,\mathrm{d}\tau.$$

D'après la même égalité, on a de même

$$(25)\qquad \cos\frac{1}{2}\theta \cdot \cos\frac{1}{2}t = \big(\cos^2 t - \cos^2\frac{1}{2}\tau\big)^{1/2},$$

d'où

$$(26)\qquad \sin\theta \cdot \cos^2\frac{1}{2}t = 2^{1/2}\cos\frac{1}{2}\tau \cdot (\cos t - \cos\tau)^{1/2}.$$

Il vient donc :

$$(27)\quad \begin{aligned} I_F(t) &= B\big(\lambda, \tfrac{1}{2}\big)^{-1} 2^{(\lambda-1)} \big(\cos\tfrac{1}{2}t\big)^{2(1-2\lambda)} \\ &\quad \times \int_t^\pi F(a_\tau \cdot N)(\sin\tau)\big(\cos\tfrac{1}{2}\tau\big)^{2(\lambda-1)} (\cos t - \cos\tau)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}\tau. \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi une expression analogue à un facteur multiplicatif près et modulo un changement de fonction — à la définition de la transformée de Radon sur S^d donnée précédement. Ceci nous suggère de proposer une approche géométrique de la transformation de Radon.

Étant donnée une fonction f, continue et K bi-invariante sur G, posons :

$$(28)\qquad F(k \cdot a_\tau \cdot N) = \big(\cos\tfrac{1}{2}\tau\big)^{3-d} f(a_\tau),$$

avec $\tau \in \mathbb{R}$, τ différent de π modulo 2π et $k \in K$. La fonction F est bien définie : en effet, si $ka_\tau = k'a_{\tau'}$, cela entraîne par la K bi-invariance de f que $f(a_\tau) = f(a_{\tau'})$. Or l'égalité $ka_\tau = k'a_{\tau'}$ entraîne $\tau = \tau'$. Donc :

$$F(ka_\tau \cdot N) = \big(\cos\tfrac{1}{2}\tau\big)^{3-d} f(a_\tau) = \big(\cos\tfrac{1}{2}\tau'\big)^{3-d} f(a_{\tau'}).$$

La fonction F se prolonge continûment si $f(a_\tau)$ s'annule à l'ordre $(d-3)$ en $t=\pi$ (ou si $d \le 3$) et par suite $I_F(t)$ est bien convergente ; remarquons que F est C^∞ si f est C^∞ et s'annulle à l'ordre $(d-3)$ en $\tau=\pi$. Dès lors, la transformation de Radon est donnée par

$$Rf(t) = 2B\big(\tfrac{1}{2}d, \tfrac{1}{2}\big)^{-1}\big(\cos\tfrac{1}{2}t\big)^{2d-4} I_F(t). \tag{29}$$

Par l'égalité (19), on obtient

$$Rf(t) = Rf(-t) = Rf(t+2\pi). \tag{30}$$

De plus, Rf s'annule à l'orde $(2d-4)$ en $t=\pi+2k\pi$ et Rf est nulle au voisinage de ces points s'il en est ainsi pour $f(a_t)$.

Rappelons que pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\tilde{f}(n) = \int_0^\pi \cos(n+\lambda)t \cdot Rf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{31}$$

Lorsque la dimension $d = 2\lambda+1$ est impaire, ceci peut s'écrire aussi

$$\tilde{f}(n-\lambda) = \int_0^\pi \cos(nt) Rf(t)\,\mathrm{d}t = (Rf)^\wedge(n), \tag{32}$$

où le signe $\wedge$ désigne la transformée de Fourier-cosinus.

Terminons ce paragraphe par la démonstration d'une formule de transmutation d'opérateurs. Pour cela on a besoin du théorème de Phragmen-Lindelöf.

LEMME 2.1. — *Si f est une fonction analytique et* $\mathrm{O}(\mathrm{e}^{r|z|})$ *avec* $r<\pi$ *pour* $\operatorname{Re} z \ge 0$, *si de plus* $f(n)=0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *alors f est identiquement nulle.* (*Voir* [14, p. 186].)

THÉORÈME 2.2. — *Soit f une fonction de classe* $C^\infty(G\,||\,K)$, *nulle au voisinage de a_π « pôle sud ». Alors :*

$$R(Lf) = \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \lambda^2\Big) Rf, \tag{33}$$

où L est l'opérateur de Laplace-Beltrami de S^d et $\lambda = \frac{1}{2}(d-1)$.

Preuve. — Sachant que

$$(Lf)^\sim(n) = -n(n+2\lambda)\tilde{f}(n) = \big[-(n+\lambda)^2+\lambda^2\big]\cdot\tilde{f}(n), \tag{34}$$

il vient :

$$(35)\qquad (Lf)^{\sim}(n) = \int_0^{\pi} \left[-(n+\lambda)^2 + \lambda^2\right] \cos(n+\lambda)t \cdot Rf(t)\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant deux fois par parties, on obtient :

$$(36)\qquad \begin{aligned}(Lf)^{\sim}(n) = \Big[-(n+\lambda)\sin(n+\lambda)t\cdot Rf(t) - \cos(n+\lambda)t\cdot (Rf)'(t)\Big]_0^{\pi}\\ + \int_0^{\pi} \cos(n+\lambda)t \cdot \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \lambda^2\Big) Rf(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or Rf est paire, donc $(Rf)'(0) = 0$. De plus, on a $(Rf)(\pi) = (Rf)'(\pi) = 0$. Il s'ensuit :

$$(37)\qquad (Lf)^{\sim}(n) = \int_0^{\pi} \cos(n+\lambda)t \cdot \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \lambda^2\Big) Rf(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par ailleurs

$$(38)\qquad (Lf)^{\sim}(n) = \int_0^{\pi} \cos(n+\lambda)t \cdot R(Lf)(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction

$$h(t) = R(Lf)(t) - \Big(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} + \lambda^2\Big) Rf(t)$$

est paire, 2π-périodique, C^{∞} et nulle au voisinage de π. En effet, puisque le support de Lf est inclus dans le support de f, et que le support de $(\mathrm{d}^2/\mathrm{d}t^2 + \lambda^2)f$ est inclus dans le support de f et que f est nulle au voisinage de π (voir l'hypothèse faite sur f), cela entraîne que h est nulle au voisinage de π. (Notons que ceci peut être déduit facilement du théorème du support qui sera démontré dans les prochains paragraphes.)

Posons

$$B(z) = \int_0^{\pi} \cos(z+\lambda)t \cdot h(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad z \in \mathbb{C}.$$

L'application $z \mapsto B(z)$ est analytique sur $\mathbb{C}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B(n) = 0$ (voir les formules (37) et (38)). De plus

$$B(z) = \int_0^{r} \cos(z+\lambda)t \cdot h(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{avec} \quad r < \pi.$$

L'égalité ci-dessus est justifiée par le fait que h est nulle au voisinage de π. On a $|B(z)| \leq C\mathrm{e}^{r|z|}$ avec $r < \pi$ et C une constante qui dépend de λ et de h. D'après le LEMME 2.1, on aura $B(z) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; en particulier B est nulle aux points $(n - \lambda)$ avec $n \in \mathbb{N}$, donc

$$\int_0^\pi \cos nt \cdot h(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent h est identiquement nulle, ce qui démontre le THÉORÈME 2.2.

3. Inversion de la transformation de Radon sur la sphère S^d

Dans ce qui suit, nous allons reconstituer f à l'aide de sa transformée de Radon. Précisons d'abord quelques notations :

• Nous notons $C(G\,||\,K)$ (resp. $C^\infty(G\,||\,K)$ l'ensemble des fonctions continues bi-invariantes par K (resp. l'ensemble des fonctions C^∞ sur G, bi-invariantes par K.)

• Soit $C_+(A)$ (res. $C_+^\infty(A)$) l'ensemble des fonctions continues sur A et paires (resp. l'ensemble des fonctions de $C_+(A)$ qui sont C^∞ sur A).

THÉORÈME 3.1. — *($d \geq 3$ est supposé impair.) Soient f une fonction de $C^\infty(G\,||\,K)$ et $\lambda = \frac{1}{2}(d-1)$. On suppose de plus que f est nulle au voisinage de a_π (pôle sud). Alors pour tout $s \in [0,\pi]$, on a :*

$$f(a_s) = \frac{1}{\lambda!}\,\frac{\pi}{2^\lambda}\Big(\frac{-1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^\lambda Rf(s). \tag{39}$$

Preuve. — Par la formule (13) on a

$$Rf(s) = \int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t,$$

avec $\varphi(t) = c\sin t \cdot f(a_t)$ et $c = 2^\lambda\lambda/\pi$.

• Pour $\lambda = 1$, il vient $Rf(s) = \displaystyle\int_s^\pi \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Par suite

$$f(a_s) = \frac{1}{c}\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)Rf(s).$$

• Pour $\lambda \geq 1$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Rf(s) = (\lambda - 1)\int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{\lambda-2}(-\sin s)\,\mathrm{d}t.$$

Cela entraîne :

$$\Big(-\frac{1}{\sin(s)}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)Rf(s) = (\lambda-1)\int_s^\pi \varphi(t)(\cos s-\cos t)^{\lambda-2}\,\mathrm{d}t.$$

Avec les mêmes techniques de calcul, on obtient :

$$\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)Rf(s) = (\lambda-1)(\lambda-2)\int_s^\pi \varphi(t)\big(\cos s-\cos t\big)^{\lambda-3}\,\mathrm{d}t.$$

Par itération nous avons, avec $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{n_0}Rf(s) = (\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n_0)\int_s^\pi \varphi(t)(\cos s-\cos t)^{\lambda-(n_0+1)}\,\mathrm{d}t.$$

Pour $n_0 = \lambda - 1$, on obtient

$$\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{(\lambda-1)}Rf(s) = (\lambda-1)\,!\int_s^\pi \varphi(t)\,\mathrm{d}t, \tag{40}$$

ce qui implique

$$-\varphi(s) = \frac{1}{\lambda\,!}\,\frac{\pi}{2^\lambda}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{(\lambda-1)}Rf(s),$$

d'où

$$f(a_s) = \frac{\pi}{2^\lambda}\,\frac{1}{\lambda\,!}\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda}Rf(s). \tag{41}$$

Au pôle nord, la formule (40) montre que

$$\begin{aligned} f(a_0) &= \frac{\pi}{2^\pi}\,\frac{1}{\lambda\,!}\,\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\Big(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(\lambda-1)}Rf(0)\\ &= \frac{\pi}{2^\lambda}\,\frac{1}{\lambda\,!}\lim_{t\to 0}\Big(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{\lambda}Rf(t). \end{aligned}$$

Et au pôle sud, nous avons :

$$f(a_\pi) = \frac{\pi}{2^\lambda}\,\frac{1}{\lambda\,!}\lim_{t\to\pi}\Big(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{\lambda}Rf(t) = 0.$$

THÉORÈME 3.2. — *(d est supposé pair.) Soit f une fonction de $C(G\,||\,K)$, supposée nulle au voisinage du pôle sud. Alors :*

$$f(a_s) = \frac{\pi}{2^\lambda \lambda}\,\frac{1}{(\lambda)_m} \int_s^\pi \frac{\left(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^m Rf(t)}{(\cos s - \cos t)^{1/2}} \sin t \,\mathrm{d}t \tag{42}$$

où $d = 2m$, $\lambda = \frac{1}{2}(d-1) = m - \frac{1}{2}$ *et*

$$(\lambda)_m = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)\cdots(\lambda-m+1).$$

Preuve. — Notons d'abord que l'analogue de la formule (42) dans le cas des espaces hyperboliques réels est démontrée dans [4, p. 428].

Soit $\varphi(t) = (2^\lambda \lambda/\pi) f(a_t) \sin t$; en remplaçant λ par sa valeur $(m - \frac{1}{2})$ dans la formule (13) on a

$$Rf(s) = \int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{(m-1)-1/2}\,\mathrm{d}t. \tag{43}$$

En dérivant la formule (43), on obtient

$$\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big) Rf(s) = (\lambda - 1) \int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{(m-2)-1/2}\,\mathrm{d}t.$$

Par itération on a

$$\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{(m-1)} Rf(s) = (\lambda)_m \int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t.$$

Soit :

$$A(s) = \frac{1}{(\lambda)_m}\Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{(m-1)} Rf(s).$$

Il s'agit maintenant de résoudre l'équation intégrale

$$A(s) = \int_s^\pi \varphi(t)(\cos s - \cos t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t, \tag{44}$$

où φ est l'inconnue et $0 \le s \le t \le \pi$. Faisons un changement de variable dans l'intégrale (44), posons $T = \cos t$. On obtient :

$$A(s) = -\int_{\cos s}^{-1} \varphi(\mathrm{Arc}\cos T)\frac{(\cos s - T)^{-1/2}}{\sqrt{1-T^2}}\,\mathrm{d}T. \tag{45}$$

En faisant un autre changement de variables ($\xi = T+1$) dans la formule (45) et en posant $x = 1+\cos s$, il vient

$$A(s) = \int_0^x \frac{F(\xi)}{(x-\xi)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi, \quad \text{avec} \quad F(\xi) = \frac{\varphi(\operatorname{Arc}\cos(\xi-1))}{\sqrt{1-(\xi-1)^2}}. \tag{46}$$

L'intégrale de l'égalité (46) est l'intégrale d'Abel qu'on sait inverser (voir [6, p. 115]). Par conséquent,

$$\Gamma\big(\tfrac12\big)F(x) = \frac{1}{\Gamma\big(\tfrac12\big)} \int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi = \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} g * \varphi_{1/2}\Big)(x), \tag{47}$$

où $\phi_r(x) = \begin{cases} x^{r-1}/\Gamma(r), & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $g(\xi) = A\big(\operatorname{Arc}\cos(\xi-1)\big)$.

Puisque $x = 1+\cos s$ et $\xi = 1+\cos t$, on aura

$$\begin{aligned} \Gamma\big(\tfrac12\big)\frac{\varphi(s)}{\sin s} &= \frac{1}{\Gamma\big(\tfrac12\big)} \int_0^{\cos s+1} \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} g(\xi)}{(x-\xi)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi \\ &= -\frac{1}{\Gamma\big(\tfrac12\big)} \frac{1}{(\lambda)_m} \int_\pi^s \frac{\big(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big)^m Rf(t)}{(\cos s - \cos t)^{1/2}} \sin t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\Gamma\big(\tfrac12\big)} \frac{1}{(\lambda)_m} \int_s^\pi \frac{(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m Rf(t)}{(\cos s - \cos t)^{1/2}} \sin t\,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{48}$$

ce qui donne

$$f(a_s) = \frac{1}{(\lambda)_m} \frac{1}{2^\lambda \lambda} \int_s^\pi \frac{(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m Rf(t)}{(\cos s - \cos t)^{1/2}} \sin t\,\mathrm{d}t.$$

Remarques. — Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\alpha+\beta \neq 0$. Posons

$$(R_{\alpha,\beta}f)(s) = \frac{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}{\pi} \int_s^\pi f(a_t)(\sin t)^\alpha (\cos s - \cos t)^\beta\,\mathrm{d}t \tag{49}$$

avec $f \in C(G\,||\,K)$.

- Si β est un entier supérieur ou égal à un, on a :

$$f(a_s) = \frac{\pi}{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)} \frac{1}{\beta\,!} \Big(\frac{1}{\sin s}\Big)^{\alpha-1} \Big(-\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\beta+1} \big(R_{\alpha,\beta}f(s)\big). \tag{50}$$

La formule (50) est valable pour une fonction de $C^\infty(G\,||\,K)$ nulle au voisinage du pôle sud.

- Si β est de la forme $(m-\frac{3}{2})$ avec $m \in \mathbb{N}$, on a

$$(51)\quad f(a_s) = c(\alpha,\beta,m)\Big(\frac{1}{\sin s}\Big)^{\alpha-1}\int_s^\pi \frac{(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t})^m (R_{\alpha,\beta}f)(t)}{(\cos s-\cos t)^{1/2}}\sin t\,\mathrm{d}t,$$

avec

$$c(\alpha,\beta,m) = \frac{1}{(\beta+1)_m}\,\frac{1}{2^{(\alpha+\beta)}}\,\frac{1}{(\alpha+\beta)}.$$

Les formules (50) et (51) se démontrent exactement comme les PROPOSITIONS (3.1) et (3.2). Dans le cas où $\beta \notin \mathbb{Z}$, on peut utiliser les techniques de dérivation fractionnaire pour inverser l'opérateur $R_{\alpha,\beta}$. En effet,

$$(R_{\alpha,\beta}f)(s) = \frac{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}{\pi}\int_s^\pi \varphi(t)\sin t\cdot\big(\cos s-\cos t\big)^\beta\,\mathrm{d}t,$$

avec $\varphi(t) = f(a_t)(\sin t)^{\alpha-1}$. En posant $x=\cos t$, on obtient :

$$(R_{\alpha,\beta}f)(s) = \frac{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}{\pi}\int_{\cos s}^{-1}\varphi(\operatorname{Arc}\cos x)(\cos s - x)^\beta\,\mathrm{d}x.$$

En faisant aussi le changement de variable $T = x+1$ dans l'intégrale ci-dessus, on obtient

$$(R_{\alpha,\beta}f)(s) = \frac{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}{\pi}\int_0^{\cos s+1}\varphi\big(\operatorname{Arc}\cos(T-1)\big)(\cos s+1-T)^\beta\,\mathrm{d}T.$$

Donc

$$(52)\qquad R_{\alpha,\beta}f\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi = \frac{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}{\pi}\Gamma(\beta+1)\phi_{\beta+1}*\phi\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi,$$

où ψ est l'application de $[0,2]$ dans $[-1,1]$ définie par $\psi(T) = T-1$. Par suite :

$$(53)\qquad \phi\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi = \frac{\pi}{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)}\,\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\,\phi_{-\beta-1}*R_{(\alpha,\beta)}f\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi,$$

c'est-à-dire

$$f(a_s) = \frac{\pi}{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)} \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \frac{1}{\Gamma(-\beta-1)} \Big(\frac{1}{\sin s}\Big)^{\alpha-1} \times \int_s^\pi \frac{(R_{\alpha,\beta}f)(t)}{(\cos s - \cos t)^{\beta+1}} \sin t \, dt, \tag{54}$$

ou encore

$$f(a_s) = \frac{-(\beta+1)\sin\pi(\beta+1)}{2^{(\alpha+\beta)}(\alpha+\beta)} \Big(\frac{1}{\sin s}\Big)^{\alpha-1} \times \int_s^\pi \frac{(R_{\alpha,\beta}f)(t)}{(\cos s - \cos t)^{\beta+2}} \sin t \, dt. \tag{55}$$

Pour $\alpha = 1$ et $\beta = \lambda - 1$, on obtient une autre formule d'inversion de la transformation de Radon, à savoir :

$$f(a_s) = \frac{-\sin\pi\lambda}{2^\lambda} \int_s^\pi \frac{Rf(t)}{(\cos s - \cos t)^{\lambda+1}} \sin t \, dt. \tag{56}$$

THÉORÈME 3.3. — *Soient $f \in C(G\,||\,K)$ et $\lambda = \frac{1}{2}(d-1)$ et soient r, r' deux éléments distincts de $[0,\pi]$ avec $r < r'$. Alors*

$$\int_r^{r'} \big|Rf(x)\big| \sin x \, dx \le \frac{2^\lambda}{\pi} \Big\{(\cos r + 1)^\lambda - (\cos r' + 1)^\lambda\Big\} \times \int_r^{r'} \big|f(a_s)\big| \sin s \, ds, \tag{57}$$

$$\int_0^\pi \big|(R_{2\lambda,\lambda-1}f)(s)\big| \sin s \, ds \le \frac{2\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\lambda(3\lambda-1)\Gamma(\lambda)} \|f\|_{L^1(G)}. \tag{58}$$

Preuve. — En remplaçant α (resp. β) par 1 (resp. par $\lambda - 1$) dans la formule (52), on obtient :

$$Rf \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \Gamma(\lambda) \, \phi_\lambda * f \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi. \tag{59}$$

En appliquant l'inégalité de Hölder à la formule (59), il vient

$$\big\|Rf \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi\big\|_{L^1(I,dx)} \le \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \Gamma(\lambda) \|\phi_\lambda\|_{L^1(I,dx)} \|f\|_{L^1(I,dx)},$$

où $I = [\cos r' + 1, \cos r + 1]$. Or :

$$\|\phi_\lambda\|_{L^1(I,\mathrm{d}x)} = \int_{\cos r'+1}^{\cos r+1} \frac{T^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}\,\mathrm{d}T = \frac{1}{\lambda\,\Gamma(\lambda)}\big\{(\cos r+1)^\lambda - (\cos r'+1)^\lambda\big\}.$$

Par suite, et par le changement de variable $T = \cos x + 1$, l'inégalité précédente devient :

$$(*)\qquad \int_r^{r'} \big|Rf(x)\big| \sin x \,\mathrm{d}x \le \frac{2^\lambda}{\pi}\big\{(\cos r+1)^\lambda - (\cos r'+1)^\lambda\big\} \int_r^{r'} \big|f(a_s)\big| \sin s \,\mathrm{d}s.$$

Pour $r = 0$ et $r' = \pi$, on obtient :

$$(**)\qquad \int_0^\pi \big|Rf(x)\big| \sin x \,\mathrm{d}x \le \frac{2^{2\lambda}}{\pi} \int_0^\pi \big|f(a_s)\big| \sin s \,\mathrm{d}s.$$

Si dans la formule (**), on remplace maintenant $f(a_t)$ par $f(a_t)(\sin t)^{d-2}$, on obtient :

$$\int_0^\pi \big|R_{2\lambda,\lambda-1}f)(a_s)\big| \sin s \,\mathrm{d}s \le \frac{2^{2\lambda}}{\pi}\,\frac{\pi}{2^{2\lambda-1}(3\lambda-1)} \int_0^\pi \big|f(a_s)\big|(\sin s)^{d-1}\,\mathrm{d}s.$$

En appliquant à l'inégalité ci-dessus la formule (3), on aura :

$$\int_0^\pi \big|(R_{2\lambda,\lambda-1}f)(a_s)\big| \sin s \,\mathrm{d}s \le \frac{2\Gamma\big(\lambda+\frac12\big)\Gamma\big(\frac12\big)}{\lambda\,\Gamma(\lambda)(3\lambda-1)}\|f\|_{L^1(G)}.$$

COROLLAIRE 3.3. — *Soit $f \in C(G\,||\,K)$. Alors*

$$\operatorname{supp}\big(t \mapsto Rf(t)\big) \subset \operatorname{supp}\big(t \mapsto f(a_t)\big).$$

Preuve. — Supposons que $r \notin \operatorname{supp}(t \mapsto f(a_t))$. Cela entraîne qu'il existe r' assez voisin de r tel que $[r,r'] \cap \operatorname{supp}(t \mapsto f(a_t)) = \emptyset$. En appliquant l'inégalité (57) et en tenant compte de

$$[r,r'] \cap \operatorname{supp}(t \mapsto f(a_t)) = \emptyset,$$

on obtient

$$\int_r^{r'} \left|Rf(x)\right| \sin x \, \mathrm{d}x = 0,$$

donc $Rf(r) = 0$ (puisque l'application $x \mapsto Rf(x)$ est continue).

Comme dans le cas des espaces hyperboliques réels (voir [11, p. 49]), la famille des opérateurs $R_{\alpha,\beta}$ généralise la transformation de Radon sur la sphère S^d, dont on ne connaît l'interprétation en termes de groupes que pour des valeurs particulières de α et β.

Pour $r \notin \{-m, -m - \frac{1}{2}\}$ avec $m \in \mathbb{N}$, posons :

$$W_r(f)(y) = \frac{2\Gamma(r+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(r+\frac{1}{2}\big)} \int_y^{\infty} (t^2 - y^2)^{r-1/2} f(t) t \, \mathrm{d}t.$$

La transformation $f \mapsto W_r(f)$ ainsi définie s'appelle la *transformation de Weyl*. Pour plus de renseignements sur cette transformation on renvoie à [15, p. 54 et 85], voir aussi [11].

PROPOSITION 3.4. — *Soit f une fonction de $C(G\,||\,K)$, nulle au voisinage du pôle sud. On a*

$$Rf(s) = \frac{2^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}}\,\lambda\,\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\big(\lambda+\frac{1}{2}\big)} \big(\cos^2 \tfrac{1}{2}s\big)^{\lambda-1} W_{\lambda-1/2}(f_*)\big(\mathrm{tg}\, \tfrac{1}{2}s\big),$$

avec $\quad f_*(y) = f\big(a_{2\,\mathrm{Artg}(y)}N\big)\,\dfrac{1}{(1+y^2)^{\lambda+1}} \quad$ *et* $\quad s \in [0, \pi]$.

Preuve. — En effectuant le changement de variable $t = 2T$ dans la formule (13), on obtient :

$$Rf(s) = \frac{2^{\lambda+1}}{\pi}\lambda \int_{s/2}^{\pi/2} f(a_{2t}) \sin 2t \cdot (\cos s - \cos 2t)^{\lambda-1} \, \mathrm{d}t.$$

En posant $t = \mathrm{Artg}\, y$, l'égalité ci-dessus devient

$$Rf(s) = \frac{2^{\lambda+2}\lambda}{\pi} \int_{\mathrm{tg}(s/2)}^{\infty} f\big(a_{2\,\mathrm{Arc\,tg}\,y}\big)\,\frac{y}{1+y^2}\Big(\cos s - \frac{1-y^2}{1+y^2}\Big)^{\lambda-1} \frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}.$$

Par suite :

$$
\begin{aligned}
Rf(s) &= \frac{2^{(\lambda+2)}\lambda}{\pi}\int_{\operatorname{tg}(s/2)}^{\infty} f\big(a_{2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y}\big)\big[\cos s\cdot(1+y^2)-(1-y)^2\big]^{\lambda-1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{\lambda+1}}\\
&= \frac{2^{(\lambda+2)}\lambda}{\pi}\int_{\operatorname{tg}(s/2)}^{\infty} f\big(a_{2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y}\big)\big[y^2(1+\cos s)+(\cos s-1)\big]^{\lambda-1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{\lambda+1}}\\
&= \frac{2^{(2\lambda+1)}\lambda}{\pi}\int_{\operatorname{tg}(s/2)}^{\infty} f\big(a_{2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y}\big)\big[y^2\cos^2\tfrac12 s-\sin^2\tfrac12 s\big]^{\lambda-1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{\lambda+1}}\\
&= \frac{2^{(2\lambda+1)}\lambda}{\pi}\big(\cos^2\tfrac12 s\big)^{\lambda-1}\int_{\operatorname{tg}(s/2)}^{\infty} f\big(a_{2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y}\big)\big[y^2-\operatorname{tg}^2\tfrac12 s\big]^{\lambda-1}\frac{y\,\mathrm{d}y}{(1+y^2)^{\lambda+1}}.
\end{aligned}
$$

Identifions $a_t\cdot N$ avec a_t. Modulo cette identification, $Rf(s)$ a pour expression :

$$
Rf(s)=\frac{2^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}}\,\lambda\,\frac{\Gamma(\lambda)}{\Gamma\big(\lambda+\frac12\big)}\big(\cos^2\tfrac12 s\big)^{\lambda-1}W_{\lambda-1/2}(f_*)\big(\operatorname{tg}\tfrac12 s\big).
$$

La fonction $y\mapsto f_*(y)$ est une fonction paire car :

$$
f\big(a_{-2\operatorname{Arc}\operatorname{tg}(y)}\cdot N\big)=f\big(a_{2\operatorname{Arc}\operatorname{tg} y}\cdot N\big)\qquad\text{(voir formule (20)).}
$$

La fonction $W_{\lambda-1/2}(f_*)$ est une fonction paire (voir [15, cor. 6.1, p. 85]) et par conséquent, la PROPOSITION (3.4) montre que : $s\mapsto Rf(s)$ est une fonction paire et 2π-périodique. On retrouve ainsi la parité et la périodicité de Rf (voir paragraphe 2).

De plus f est nulle au voisinage du pôle sud si et seulement si f_* est nulle au voisinage de l'infini.

Soit maintenant p la projection stéréographique par rapport à $-N$ (pôle sud) définie par

$$
p(x)=\big(1+x_{d+1}\big)^{-1}\big(x-x_{d+1}\cdot N\big),
$$

avec $x=(x_1,x_2,\dots,x_{d+1})$ éléments de S^d.

En posant $a_t\cdot N=(0,\dots,0,\sin t,\cos t)=p^{-1}(y)$ dans l'intégrale (13), on retrouve pour $Rf(s)$ l'expression de la PROPOSITION 3.4.

Dans ce qui suit, on va établir certaines formules d'inversion de la transformation de Radon basées sur l'inversion de la transformation de Weyl.

THÉORÈME 3.5. — *Soit f une fonction de $C^\infty(G\,||\,K))$, nulle au voisinage du pôle sud. Alors*

1) *Si d est pair,*

$$f(a_t\cdot N)=c_0\big(1+\operatorname{tg}^2\tfrac12 t\big)^{\lambda+1}\int_t^\pi \big[\operatorname{tg}^2\tfrac12 s-\operatorname{tg}^2\tfrac12 t\big]^{-1/2} \big[\operatorname{tg}\tfrac12 s\cdot\big(1+\operatorname{tg}^2\tfrac12 s\big)\big]^{-\lambda+1/2} \Big(\frac{\mathrm d}{\mathrm ds}\Big)^{\lambda+1/2}\frac{Rf(s)}{\big(\cos^2\frac12 s\big)^{\lambda-1}}\,\mathrm ds,$$

où $c_0=\dfrac{(-1)^{\lambda+1/2}\,\Gamma\big(\lambda-\frac12\big)}{2\lambda\,\Gamma(2\lambda-1)}$ *et* $t\in[0,\pi]$.

2) *Si d est impair,*

$$f(a_s\cdot N)=c_0'\Big[\frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2\frac12 s)\operatorname{tg}\frac12 s}\Big]^\lambda\Big(\frac{\mathrm d}{\mathrm ds}\Big)^\lambda\frac{Rf(s)}{\big(\cos^2\frac12 s\big)^{\lambda-1}},$$

avec $c_0'=\dfrac{(-1)^\lambda\sqrt\pi\,\Gamma(\lambda+\frac12)}{2\lambda(2\lambda-1)\,!}$ *et* $s\in[0,\pi]$.

Preuve. — Dans le théorème 5.2 et corollaire 6.1 de [15], donnons respectivement à la constante k les valeurs $\big(\lambda-\frac12\big)$ et $(\lambda-1)$ (qui correspond respectivement aux cas où d est pair et où d est impair, puisque k est un entier naturel). Les constantes c_1 et c_2 du même théorème deviennent :

$$c_1=\frac{2^{2\lambda}\sqrt\pi\,\Gamma\big(\lambda-\frac12\big)\Gamma(\lambda)}{\Gamma(2\lambda-1)\Gamma\big(\lambda+\frac12\big)\pi},\quad c_2=2^{(2\lambda-1)}\frac{(\lambda-1)\,!}{(2\lambda-1)\,!}.$$

Soit c la constante $\dfrac{\sqrt\pi}{2^{2\lambda}}\,\dfrac1\lambda\,\dfrac{\Gamma\big(\lambda+\frac12\big)}{\Gamma(\lambda)}$.

• Commençons par le cas où d est pair, c'est-à-dire $\big(\lambda-\frac12\big)$ entier positif. Par le corollaire 6.1 de [15], on a

$$f_*(y)=(-1)^{\lambda+1/2}c_1\int_y^\infty (z^2-y^2)^{-1/2}\Big(\frac{\mathrm d}{\mathrm dz^2}\Big)^{\lambda+1/2}W_{\lambda-1/2}(f_*)(z)z\,\mathrm dz.$$

Si on pose $z = \operatorname{tg} \frac{1}{2}s$ et $y = \operatorname{tg} \frac{1}{2}t$ et si on remplace $f_*(y)$ par sa valeur, l'égalité ci-dessus devient

$$
\begin{aligned}
f(a_t \cdot N) = (-1)^{\lambda+1/2}\tfrac{1}{2}c_1\big[1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big]^{\lambda+1} & \\
\int_t^{\pi} \big[\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big]^{-1/2} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s)}\right]^{\lambda+1/2} & \\
W_{\lambda-1/2}(f_*)(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s) \cdot \big(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s\big)\big(1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s\big)\,\mathrm{d}s. &
\end{aligned}
$$

Puisque $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\big(\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s\big)} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s \cdot \big(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s\big)} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}$, on aura

$$
\begin{aligned}
f(a_t \cdot N) = (-1)^{\lambda+1/2}\tfrac{1}{2}c_1\big(1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big)^{\lambda+1} & \\
\int_t^{\pi} \big[\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big]^{-1/2}\big[1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s\big]^{-\lambda+1/2} & \\
\big(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s\big)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda+1/2} W_{\lambda-1/2}(f_*)\big(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s\big)\,\mathrm{d}s. &
\end{aligned}
$$

En remplaçant $W_{\lambda-1}(f_*)\big(\operatorname{tg} \frac{1}{2}s\big)$ par sa valeur (voir PROPOSITION 3.4), l'égalité précédente devient

$$
\begin{aligned}
f(a_t \cdot N) = c_0\big(1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big)^{\lambda+1} \int_t^{\pi} \big[\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s - \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}t\big]^{-1/2} & \\
\big[\big(1+\operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2}s\big)\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s\big]^{-\lambda+1/2} & \\
\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda+1/2} \frac{Rf(s)}{\big(\cos^2 \frac{1}{2}s\big)^{\lambda-1}}\,\mathrm{d}s. &
\end{aligned}
$$

• Dans le cas où d est impair, on applique le corollaire 6.1 de [15] et on obtient

$$
f\big(a_{2\,\mathrm{Arc\,tg}(y)} \cdot N\big) = (-1)^{\lambda}c_2\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y^2}\Big)^{\lambda} W_{\lambda-1/2}(f_*)(y).
$$

En remplaçant y par $tg\frac{1}{2}s$ on trouve :

$$
\begin{aligned}
f(a_s \cdot N) &= (-1)^{\lambda}c_2 \frac{1}{(\operatorname{tg} \frac{1}{2}s)^{\lambda}} \frac{1}{\big(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s\big)^{\lambda}} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda} (W_{\lambda-1/2}f_*)\big(\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}s\big) \\
&= (-1)^{\lambda}c_2c\left[\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}s} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s}\right]^{\lambda} \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda} \frac{Rf(s)}{\big(\cos^2 \frac{1}{2}s\big)^{\lambda-1}} \\
&= \frac{(-1)^{\lambda}\sqrt{\pi}\,\Gamma\big(\lambda+\frac{1}{2}\big)}{2\lambda(2\lambda-1)\,!} \left[\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}s \cdot \big(1+\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}s\big)}\right]^{\lambda} \\
&\qquad \Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^{\lambda} \frac{Rf(s)}{\big(\cos^2 \frac{1}{2}s\big)^{\lambda-1}}.
\end{aligned}
$$

4. Formule de Plancherel relativement à la transformation de Radon

Montrons d'abord quelques résultats préparatoires.

PROPOSITION 4.1. — *($d \geq 3$ est supposé impair.) La transformation de Radon R est un homomorphisme de l'algèbre $C^\infty(G \,||\, K))$ dans l'algèbre $C_+^\infty(A)$ pour le produit de convolution, où $C_+^\infty(A)$ désigne l'algèbre de fonctions C^∞ sur A et paires.*

Preuve. — Il s'agit de montrer la formule

$$R(f \underset{G}{*} g) = Rf \underset{A}{*} Rg, \quad \text{lorsque} \quad f, g \in C^\infty(G \,||\, K). \tag{60}$$

La formule (60) résulte du fait que si F est paire de période 2π,

$$a_n(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t)\, \mathrm{e}^{-int}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(t) \cos nt \, \mathrm{d}t,$$

et que, pour deux fonctions F et G périodiques de période 2π,

$$a_n(F * G) = a_n(F) \cdot a_n(G).$$

Si maintenant f et g sont deux fonctions de $C^\infty(G \,||\, K)$, on sait (voir formule (30)) que Rf et Rg sont des fonctions périodiques de période 2π et paires, donc

$$a_n(Rf * Rg) = a_n(Rf) \cdot a_n(Rg).$$

La transformation de Fourier sphérique transformant le produit de convolution en produit ordinaire, on a

$$a_n(Rf) \cdot a_n(Rg) = a_n\big[R(f \underset{G}{*} g)\big].$$

Donc

$$a_n\big(R(f \underset{G}{*} g)\big) = a_n\big(Rf \underset{A}{*} Rg\big).$$

Par l'injectivité de la transformation de Fourier sphérique on obtient la formule (60). Dans le cas où $d = 2m$ (avec $m \in \mathbb{N}$), on a la :

PROPOSITION 4.2. — *($d \geq 2$ est supposé pair.) Soient f et g deux fonctions de $C(G \,||\, K)$. On a*

$$R(f \underset{G}{*} g) = Rf \underset{A}{*} R_m g, \tag{62}$$

avec

$$R_m g(s) = 2^{(m-1/2)} \frac{\big(m - \frac{1}{2}\big)\Gamma\big(m - \frac{1}{2}\big)}{\pi\, \Gamma(m)} \int_s^{\pi} g(t) \sin t (\cos s - \cos t)^{(m-1)}\, \mathrm{d}t.$$

Preuve. — Par la formule (59), il vient

$$\begin{aligned} Rf \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi &= \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}} \left[\frac{\Gamma\big(m-\frac{1}{2}\big) 2^{(m-1/2)} \big(m-\frac{1}{2}\big)}{\pi} \phi_m * f \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi \right] \\ &= \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}} R_m f \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi, \end{aligned}$$

avec

$$R_m f \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi = \frac{\Gamma\big(m-\frac{1}{2}\big) 2^{(m-1/2)} \big(m-\frac{1}{2}\big)}{\pi} \phi_m * f \circ \operatorname{Arc}\cos \circ \psi.$$

Donc

$$Rf = \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}} R_m f. \tag{63}$$

Mais par la PROPOSITION 4.1 (cas impair), on a

$$R_m(f * g) = R_m f * R_m g.$$

Par suite

$$\begin{aligned} R(f \underset{G}{*} g) &= \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}} \big(R_m(f * g)\big) = \frac{\mathrm{d}^{1/2}}{\mathrm{d}x^{1/2}} R_m f * R_m g \\ &= \phi_{1/2} * R_m f * R_m g = Rf \underset{A}{*} R_m g. \end{aligned} \tag{64}$$

PROPOSITION 4.3 (Formule de Plancherel relativement à la transformation de Radon dans le cas pair). — *Soient f une fonction de $C^\infty(G \,||\, K)$ et $d = 2m$. Alors*

$$\begin{aligned} \int_G |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{-\sin \pi\lambda}{2^\lambda} \int_0^\pi \mathrm{d}t \, &\frac{\sin t}{(1-\cos t)^{\lambda+1}} \\ &\times \int_0^t Rf(t-s) \overline{R_m f}(-s) \,\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{65}$$

Preuve. — Soient f, g deux fonctions de $C^\infty(G \,||\, K)$ et $F = g^* * f$ avec $g^*(x) = \overline{g(x^{-1})}$. Si nous appliquons la formule (56) à la fonction F, nous aurons

$$F(a_0) = \frac{-\sin \pi\lambda}{2^\lambda} \int_0^\pi (1-\cos t)^{-\lambda-1} RF(t) \sin t \,\mathrm{d}t.$$

D'après la formule (62), l'expression ci-dessus devient

$$F(a_0) = \frac{-\sin\pi\lambda}{2^\lambda}\int_0^\pi \mathrm{d}t\,\frac{\sin t}{(1-\cos t)^{\lambda+1}}\int_0^t Rf(t-s)R_m g^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

C'est-à-dire

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{-\sin\pi\lambda}{2^\lambda}\int_0^\pi \mathrm{d}t\,\frac{\sin t}{(1-\cos t)^{\lambda+1}}\int_0^t Rf(t-s)R_m g^*(s)\,\mathrm{d}s,$$

et pour $f = g$ on obtient la formule (65).

Dans le cas impair, on a

$$F(a_s) = \frac{1}{\lambda\,!}\,\frac{\pi}{2^\lambda}\Big(\frac{-1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^\lambda Rf(s).$$

Donc

$$(66)\qquad \int_0^\pi \left|f(a_s)\right|^2(\sin s)^{d-1}\,\mathrm{d}s = \Big(\frac{1}{\lambda\,!}\,\frac{\pi}{2^\lambda}\Big)^2\int_0^\pi \Big|\Big(\frac{-1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^\lambda Rf(s)\Big|^2(\sin s)^{d-1}\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant la formule (3) on a

$$(67)\qquad \int_G \left|f(x)\right|^2\mathrm{d}x = \frac{\pi^{3/2}}{\Gamma(\lambda+\frac12)\lambda\,!\,2^{2\lambda}}\int_0^\pi \Big|\Big(\frac{-1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\Big)^\lambda Rf(s)\Big|^2(\sin s)^{d-1}ds.$$

5. Transformation de Radon duale et théorème d'inversion duale

Rappelons que $C_+(A)$ désigne l'ensemble des fonctions continues sur A et paires et $C_+^\infty(A)$ l'ensemble des fonctions de $C_+(A)$ qui sont C^∞ sur A.

PROPOSITION et DÉFINITION 5.1. — *Soit f une fonction de $C_+(A)$. Alors la transformation de Radon duale est donnée par*

$$(68)\qquad R^*f(a_t) = \frac{2^\lambda\lambda}{\pi}\sin t\int_0^t f(a_s)(\cos s-\cos t)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}s,$$

avec $t\in[0,\pi]$.

Preuve. — Soit F une fonction $C^{+}(A)$ et soit

$$\begin{aligned}D &= \int_0^\pi Rf(s)F(a_s)\,\mathrm{d}s\\ &= \frac{2^\lambda\lambda}{\pi}\int_0^\pi\Big\{\int_s^\pi f(a_t)\sin t(\cos s-\cos t)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}t\Big\}F(a_s)\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^\pi f(a_t)\Big\{\frac{2^\lambda\lambda}{\pi}\int_s^\pi F(a_s)(\cos s-\cos t)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}s\Big\}\sin t\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

L'égalité ci-dessus est justifiée par une permutation d'intégrales. Posons

$$R^*F(a_t) = \frac{2^\lambda\lambda}{\pi}\sin t\int_0^t F(a_s)(\cos s-\cos t)^{\lambda-1}\,\mathrm{d}s. \tag{69}$$

Notons que l'analogue de la formule (69) est démontrée dans le cas des espaces hyperboliques réels par [4] (voir [4, p. 431]).

On peut prolonger R^*f sur G comme suit :

$$R^*F(g) = R^*F(k_1a_tk_2) = R^*F(a_t) \quad \text{où} \quad k_1,k_2\in K=\mathrm{SO}(d).$$

Il est à remarquer que R^*F est continue sur G. Il suffit d'utiliser pour cela le théorème de la convergence dominée ou l'inégalité

$$\mathrm{Sup}_{g\in G}\big|R^*F(g)\big| \le \frac{2^{(2\lambda-1)}\lambda}{\pi}\,\mathrm{Sup}_{s\in[0,\pi]}\big|F(a_s)\big|.$$

Aux pôles, on a $R^*F(a_0) = R^*F(a_\pi) = 0$ et $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)^nR^*F(a_0) = 0$ si $n\le[\lambda-1]$, où $[\lambda-1]$ désigne la partie entière de $(\lambda-1)$.

Proposition 5.2. — *Soit F une fonction de $C^\infty_{+}(A)$ nulle, ainsi que ses dérivées, au voisinage du pôle nord et du pôle sud. On a*

$$\begin{cases}\text{a)} & R^*F\in C^\infty(G),\\ \text{b)} & R^*F = \sin(\phi_\lambda * \widetilde{F})\circ\psi_*\circ\cos,\end{cases} \tag{70}$$

avec

$$\widetilde{F}(x) = \frac{\Gamma(\lambda)2^\lambda\lambda}{\pi}\,\frac{F(\operatorname{Arc}\cos(1-x))}{\sqrt{1-(1-x)^2}},$$

où $x\in[0,2]$ et $\psi_*(T) = 1-T$.

Preuve. — En faisant le changement de variable $\xi = \cos s$ dans la formule (69), on a

$$R^*F(a_t) = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \sin t \int_{\cos t}^{1} \frac{F(\operatorname{Arc}\cos(\xi))}{\sqrt{1-\xi^2}} (\xi - \cos t)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}\xi.$$

En effectuant aussi le changement de variable $T = 1 - \xi$, on obtient

$$R^*F(a_t) = \frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \sin t \int_{0}^{1-\cos t} \frac{F(\operatorname{Arc}\cos(1-T))}{\sqrt{1-(1-T)^2}} (1 - T - \cos t)^{\lambda-1} \,\mathrm{d}T.$$

Soit

$$R^*F = \sin(\phi_\lambda^* \widetilde{F}) \circ \psi_* \circ \cos, \tag{71}$$

avec

$$\widetilde{F}(x) = \frac{\Gamma(\lambda)\, 2^\lambda \lambda}{\pi} \frac{F(\operatorname{Arc}\cos(1-x))}{\sqrt{1-(1-x)^2}}, \qquad x \in [0,2].$$

Puisque x appartient à $[0,2]$, x est de la forme $(1-\cos t)$ avec $t \in [0,\pi]$. Par suite

$$\widetilde{F}(1-\cos t) = \frac{\Gamma(\lambda) 2^\lambda \lambda}{\pi} \frac{F(t)}{\sin t}.$$

L'hypothèse faite sur F, montre que l'application $t \mapsto F(t)/\sin t$ est C^∞ en 0 et en π, donc d'après la formule (71), R^*F est C^∞ sur G.

Donnons maintenant certaines formules d'inversion pour l'opérateur R^*. Commençons par le cas où d est impair.

Proposition 5.3. — *(d est supposé impair.) Soit F une fonction de $C_+(A)$. Alors pour tout $t \in [0,\pi]$, on a*

$$F(a_t) = \frac{1}{\lambda!} \frac{\pi}{2^\lambda} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Big(\frac{1}{\sin t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(\lambda-1)} \frac{R^*F(a_t)}{\sin t}. \tag{72}$$

Preuve. — Par la formule (69) on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = (\lambda-1)\frac{2^\lambda \lambda}{\pi} \sin t \int_0^t F(a_s)(\cos s - \cos t)^{\lambda-2} \,\mathrm{d}s.$$

Donc :

$$\Big(\frac{1}{\sin t} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = \lambda(\lambda-1)\frac{2^\lambda}{\pi} \int_0^t F(a_s)(\cos s - \cos t)^{\lambda-2} \,\mathrm{d}s.$$

En utilisant les mêmes techniques de calcul on obtient

$$\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^2\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = \frac{2^\lambda}{\pi}\,\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\int_0^t F(a_s)(\cos s-\cos t)^{\lambda-3}\,\mathrm{d}s.$$

Par itération il vient

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{n_0}&\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big)\\ &= \frac{2^\lambda}{\pi}\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-n_0)\int_0^t F(a_s)(\cos s-\cos t)^{\lambda-n_0-1}\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Ce qui implique

$$\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(\lambda-1)}\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = \frac{2^\lambda}{\pi}\,\lambda\,!\int_0^t F(a_s)\,\mathrm{d}s,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(\lambda-1)}\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = \frac{2^\lambda}{\pi}\,\lambda\,!\;F(a_t).$$

Étudions maintenant le cas où d est pair.

PROPOSITION 5.4. — *(d est supposé pair.) Soit F une fonction de $C_+(A)$, nulle au voisinage de* 0. *Pour tout $t\in[0,\pi]$, on a*

$$F(a_t) = \frac{1}{(\lambda)_m}\,\frac{1}{2^\lambda\lambda}\sin t\int_0^t \frac{\big(\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big)^m\big(R^*F(a_s)/\sin s\big)}{(\cos s-\cos t)^{1/2}}\sin s\,\mathrm{d}s. \tag{73}$$

Preuve. — Supposons que $d=2m$. Alors λ est dans ce cas égal à $\big(m-\frac{1}{2}\big)$ avec m un entier naturel. Donc

$$\frac{\pi}{2^\lambda\lambda}\,\frac{1}{(\lambda)_m}\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(m-1)}\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big) = \int_0^t F(a_s)(\cos s-\cos t)^{1/2}\,\mathrm{d}s.$$

Posons :

$$\varphi(t) = \frac{\pi}{2^\lambda\lambda}\,\frac{1}{(\lambda)_m}\Big(\frac{1}{\sin t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(m-1)}\Big(\frac{R^*F(a_t)}{\sin t}\Big).$$

Le problème se ramène à résoudre l'équation intégrale

$$\varphi(t) = \int_0^t F(a_s)(\cos s-\cos t)^{1/2}\,\mathrm{d}s.$$

Par les mêmes techniques de calcul que la PROPOSITION (3.2), on obtient

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})F(a_x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\int_0^x \frac{g'(\xi)}{(x-\xi)^{1/2}}\,\mathrm{d}\xi,$$

avec $g(\xi) = \varphi(\operatorname{Arc}\cos(1-\xi))$. En posant $\xi = 1-\cos s$ et $x = 1-\cos t$, on obtient aussi

$$F(a_t) = \frac{1}{(\lambda)_m}\,\frac{1}{2^\lambda\lambda}\sin t\int_0^t \frac{\left(\frac{1}{\sin s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^m (R^*F(a_s)/\sin s)}{(\cos s-\cos t)^{1/2}}\sin s\,\mathrm{d}s.$$

En utilisant la formule (70) pour une fonction F supposée nulle ainsi que ses dérivées au voisinage du pôle nord et du pôle sud, nous obtenons une autre formule d'inversion. En effet, la formule (70) entraîne :

$$\frac{R^*F\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi_*}{\sin\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi_*} = \phi_\lambda * \widetilde{F}.$$

Donc $\quad \widetilde{F} = \phi_{-\lambda} * \dfrac{R^*F\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi_*}{\sin\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi_*},\quad$ c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}\widetilde{F}(1-\cos t) &= \int_0^{1-\cos t}\phi_{-\lambda}(1-\cos -T)\,\frac{R^*F\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi(T)}{\sin\circ\operatorname{Arc}\cos\circ\psi(T)}\,\mathrm{d}T\\ &= \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\int_0^t(\cos s-\cos t)^{-\lambda-1}\frac{R^*F(s)}{\sin s}\sin s\,\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Par suite

$$\begin{aligned}F(t) &= \frac{1}{\Gamma(-\lambda)}\,\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\,\frac{\pi}{2^\lambda\lambda}\sin t\int_0^t(\cos s-\cos t)^{-\lambda-1}R^*F(s)\,\mathrm{d}s\\ &= -\frac{\sin\pi\lambda}{2^\lambda}\sin t\int_0^t(\cos s-\cos t)^{-\lambda-1}R^*F(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

$$F(t) = -\frac{\sin\pi\lambda}{2^\lambda}\sin t\int_0^t(\cos s-\cos t)^{-\lambda-1}R^*F(s)\,\mathrm{d}s. \tag{74}$$

Énonçons maintenant un théorème d'inversion pour l'opérateur R^*R

THÉORÈME 5.5 (Formule d'inversion pour l'opérateur R^*R.). — *Soit f une fonction de $C^\infty(G\,||\,K)$, supposée nulle ainsi que ses dérivées au voisinage du pôle nord et du pôle sud. On a*

a) *si d est impair,*

$$f(g) = \Big(\frac{1}{\lambda!}\frac{\pi}{2^\lambda}\Big)^2\Big(-\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\frac{1}{\sin t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big)^{(\lambda-1)}\frac{R^*Rf(a_t)}{\sin t}, \tag{75}$$

où $g = k_1 a_t k_2$ *avec* $k_1, k_2 \in K = \mathrm{SO}(d)$;

b) *si d est pair,*

$$f(g) = \Big(\frac{\sin \pi\lambda}{2^\lambda}\Big)^2 \int_s^\pi\int_0^t \big[(\cos s - \cos t)(\cos \ell - \cos t)\big]^{-(\lambda+1)} R^*Rf(a_\ell)\sin^2 t\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\ell, \tag{76}$$

avec $0 \le s \le t \le \pi$, $g = k_1 a_s k_2$ *et* $k_1, k_2 \in \mathrm{SO}(d)$.

Preuve. — La formule (75) résulte de la PROPOSITION 5.2 et les formules (39), (72) ainsi que la composition des opérateurs R et R^*.

Le même raisonnement que dans le cas impair appliqué aux formules (56) et (74) nous donne la formule (76).

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEERENDS (R.). — *On the Abel Transform and its Inversion*, Ph. D. Thesis, Leiden University, 1987.

[2] ERDELYI (A.), MAGNUS (W.), OBERHETTINGER (F.) and TRICOMI (F.G.). — *Tables of Integral Transforms, vol. 3.* — Mc Graw-Hill, New-York, 1954.

[3] FARAUT (J.). — *Analyse harmonique et fonctions spéciales*, École d'été d'analyse harmonique de Tunis, 1984.

[4] FARAUT (J.). — *Analyse harmonique.* — C.I.M.P.A, 1982.

[5] GUELFAND (I.M.), GRAEV (I.M.) and Vilenkin (N.J.). — *Géométrie intégrale et théorie des représentations.* — Monographies Universitaires de Mathématiques, vol. 5, Dunod, 1962.

[6] GUELFAND (I.M.) and CHILOV (G.E.). — *Les distributions.* — Collection Universitaire de Mathématiques, Dunod, 1962.

[7] HELGASON (S.). — *Groups and geometric analysis.* — Academic Press, 1984.

[8] HELGASON (S.). — *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advan. Math., t. **5**, 1970, p. 1–154.

[9] HELGASON (S.). — *The Radon transform on Euclidean spaces, Compact two-point Homogeneous Spaces and Grassmann Manifolds*, Acta. Math., t. **113**, 1965, p. 153–180.

[10] KOORNWINDER (T.H.). — *A New Proof a Paley-Wiener Theorem for the Jacobi-transform*, Arkiv for Math., t. **13**, 1975.

[11] KOORNWINDER (T.H.). — Jacobi Functions and Analysis on Non Compact Semi-simple Lie Groups, in *Special Functions*.—R.A. Askey et al., Reidel Pub. Comp., 1984, p. 1–85.

[12] SHERMAN (T.).—*Fourier Analysis on the Sphere*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **209**, 1975, p. 1–31.

[13] STRICHARTZ (R.S.). — *L^P-Estimates for Radon Transforms in Euclidean and non Euclidean Spaces*, Duke Math. J., t. **48**, 1981, p. 699–727.

[14] TITCHMARSH (E.C.). — *The Theory of Functions,* 2nd ed. — Oxford Univ. Press, London and New-York, 1939.

[15] TRIMECHE (K.). — *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley-Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur* $(0, \infty)$, J. Math. Pures et Appl., t. **60**, 1981, p. 51–98.