BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER
CONSTANTIN BĂNICĂ

# Fibrés vectoriels topologiques de rang élevé sur une hypersurface

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 121, nº 2 (1993), p. 271-297
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_271_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Bull. Soc. math. France,*
121, 1993, p. 271–297.

# FIBRÉS VECTORIELS TOPOLOGIQUES DE RANG ÉLEVÉ SUR UNE HYPERSURFACE

PAR

JOSEPH LE POTIER (*) et CONSTANTIN BĂNICĂ (**)

RÉSUMÉ. — Cet article contient deux résultats : a) le calcul de l'algèbre de Grothendieck des fibrés vectoriels topologiques sur une hypersurface $X$ de degré $d$ et de dimension $n$ de l'espace projectif complexe ; b) la description des classes de cohomologie entières $(c_i) \in \mathrm{H}^{2i}(X)$ qui sont les classes de Chern d'un fibré vectoriel topologique de rang $r \geq n$. L'énoncé obtenu généralise le résultat classique de Schwarzenberger et Thomas sur l'espace projectif.

ABSTRACT. — Let $X$ an hypersurface of degree $d$ and dimension $n$ in the complex projective space. This article contains two results : a) the computation of the Grothendieck algebra for topological vector bundles on $X$ ; b) the description of entire cohomology classes $(c_i) \in \mathrm{H}^{2i}(X)$ which are the Chern classes of a topological vector bundle of rank $r \geq n$. The result generalizes the classical result of Schwarzenberger and Thomas on the complex projective space.

## 0. Introduction

On connaît, d'après SCHWARZENBERGER et THOMAS [10], la classification topologique des fibrés vectoriels complexes de rang $r \geq n$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$ : ceux-ci sont décrits par leurs classes de Chern $c_i \in \mathrm{H}^{2i}(\mathbb{P}_n(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ ; ces nombres ne sont pas arbitraires, mais doivent satisfaire à certaines conditions d'intégralité $S_k$ (pour $k = 3, \dots, n$) connues sous le nom de *conditions de Schwarzenberger* (cf. § 4). Dans ce travail, nous généralisons ce résultat aux hypersurfaces lisses $X$ de dimension $n$ et de degré $d$ de l'espace projectif complexe : nous décrivons l'algèbre de Grothendieck topologique $\mathrm{K}(X)$ et nous donnons la classification des fibrés vectoriels topologiques de rang $r \geq n$ en termes de

(*) Texte reçu le 20 janvier 1992, révisé le 26 mai 1992.
J. LE POTIER, UFR de Mathématiques et URA 212, Université Paris VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
(**) C. BĂNICĂ, décédé le 25.12.91. Institut de Mathématique, Bd. Păçii 220, Bucarest.
Classification AMS : 14F05.


© Société mathématique de France

conditions d'intégralité portant sur les classes de Chern. Cette classification est obtenue au § 4 en suivant une idée de BĂNICĂ et PUTINAR [2] et de LE POTIER [8], en utilisant le théorème de Riemann-Roch topologique, dit aussi théorème de l'indice, appliqué aux sous-variétés de l'hypersurface $X$.

Nous commençons par quelques rappels bien connus concernant les rapports entre l'algèbre de Grothendieck et l'algèbre de cohomologie d'un CW-complexe fini, quand on fait l'hypothèse que la cohomologie n'a pas de torsion : sous cette hypothèse, la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch dégénère, et l'algèbre graduée associée $\mathrm{gr}(\mathrm{K}(X))$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie paire. Nous donnons ensuite la description de l'algèbre de Grothendieck dans le cas des quadriques lisses : l'algèbre de Grothendieck diffère déjà dans ce cas particulier de l'algèbre de cohomologie et cette étude donne une bonne intuition de ce qui ce passe en degré quelconque. Cependant, dans le cas des quadriques les générateurs de $\mathrm{K}(X)$ sont algébriques et ont une bonne interprétation géométrique. Ce n'est plus le cas en degré quelconque; nous avons mis en évidence un système de générateurs de l'algèbre de $\mathrm{K}(X)$ sur lequel la structure multiplicative s'exprime simplement, mais nous n'avons obtenu une interprétation géométrique de ces générateurs que pour les hypersurfaces de Fermat de dimension impaire. Ces générateurs sont obtenus essentiellement en relevant les générateurs de l'algèbre de cohomologie paire. Tout le travail consiste à déterminer quelles sont les relations entre ces générateurs dans l'algèbre $\mathrm{K}(X)$.

## 1. Le caractère de Chern

Soit $X$ un espace topologique compact et $\emptyset \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset X$ une suite croissante de sous-espaces fermés. On pose :

$$F^p\,\mathrm{K}(X) = \ker \mathrm{K}(X) \to \mathrm{K}(X_{p-1}).$$

Ceci définit une filtration décroissante et finie de l'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(X)$. De même, si $A$ est un anneau commutatif et unitaire, on a une filtration décroissante et finie de la cohomologie de $X$ à valeurs dans $A$ en posant :

$$F^p\,\mathrm{H}(X,A)) = \ker \mathrm{H}(X,A) \to \mathrm{H}(X_{p-1},A).$$

Cette filtration est celle que l'on obtient comme aboutissement de la suite spectrale $E_r(A)$ associée à la suite $X_p$ ci-dessus et dont le terme $E_1$ est donné par :

$$E_1^{p,q} = \mathrm{H}^{p+q}\big(X_p, X_{p-1}; A\big).$$

Ceci s'applique en particulier au cas où $X$ est un CW-complexe fini de dimension $n$, muni de la filtration définie en prenant pour $X_p$ le $p$-squelette de $X$. On a dans ce cas $E_2^{p,q} = 0$ si $q \neq 0$. Il en résulte que la filtration obtenue sur $\mathrm{H}(X, A)$ est indépendante de $X_p$ : elle peut aussi être définie par

$$F^p \,\mathrm{H}(X, A) = \bigoplus_{i \geq p} \mathrm{H}^i(X, A)$$

et l'algèbre graduée associée est encore $\mathrm{H}(X, A)$. L'algèbre $\mathrm{K}(X)$ étant munie de la filtration associée au squelette de $X$, considérons le morphisme d'algèbres défini par le caractère de Chern :

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Q}).$$

PROPOSITION 1.1. — *Soit $X$ un CW-complexe fini et connexe dont la cohomologie entière est sans torsion. Alors :*

(i) *Le groupe* $\mathrm{K}(X)$ *est sans torsion.*

(ii) *Le caractère de Chern* $\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}^{pair}(X, \mathbb{Q})$ *est un morphisme injectif d'algèbres filtrées et ce morphisme est strict.*

*Démonstration.* — Ceci résulte essentiellement de la dégénérescence de la suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch. Nous ne ferons qu'une esquisse de démonstration; pour plus de détails, on peut par exemple consulter [1] ou [5].

Précisons d'abord les notations : comme $X$ est connexe, le rang d'un élément de $\mathrm{K}(X)$ a un sens; on désigne par $\mathrm{K}^0(X)$ l'idéal de l'algèbre de Grothendieck des éléments de rang nul et on pose $\mathrm{K}^1(X) = \mathrm{K}^0(S(X))$ : c'est le groupe de Grothendieck réduit de la suspension de $X$. Le théorème de périodicité de Bott permet d'obtenir sur $\mathrm{K}^*(X) = \mathrm{K}(X) \oplus \mathrm{K}^1(X)$ une structure d'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée. Enfin, pour toute paire $Y \subset X$, avec $Y$ non vide, on désigne par $\mathrm{K}^*(X, Y)$ l'idéal $\mathbb{Z}_2$-gradué de $\mathrm{K}^*(C)$ associé au cône $C$ de l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ et défini par les éléments de rang nul.

On considère la suite spectrale $\mathbb{Z}_2$-graduée $E'_r$ d'Atiyah-Hirzebruch, associée à la filtration de $X$ par le squelette : elle est donnée au niveau 1 par

$$E'^{\,p}_1 = \mathrm{K}^*\big(X_p, X_{p-1}\big)$$

et a pour aboutissement l'algèbre $\mathbb{Z}_2$-graduée $\mathrm{K}^*(X)$. Le caractère de Chern induit un morphisme de suites spectrales $E'_r \to E_r(\mathbb{Q})$.

- Au niveau $E'^{\,p}_1$, ce morphisme est le morphisme induit par le caractère de Chern sur un bouquet de sphères de dimension $p$ : ainsi, le caractère de Chern identifie $E'_1$ avec le sous-module $E_1(\mathbb{Z}) \subset E_1(\mathbb{Q})$.

• Au niveau $E'_2$, on obtient encore un plongement $E'^{p}_2 \hookrightarrow \mathrm{H}^p(X,\mathbb{Q})$ dont l'image est exactement $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z})$.

Il en résulte que la suite spectrale $E'_r$ dégénère à partir du niveau $E'_2$, puisque c'est le cas de la suite spectrale $E_r(\mathbb{Q})$. Ainsi, on a une filtration décroissante finie de $\mathrm{K}^*(X)$ dont le gradué $\mathrm{gr}^p\,\mathrm{K}^*(X)$ est isomorphe à $\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z})$. L'assertion (i) en résulte immédiatement.

Pour (ii), on remarque que le caractère de Chern définit un morphisme

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}^*(X) \longrightarrow \mathrm{H}(X,\mathbb{Q})$$

compatible avec les filtrations définies ci-dessus. En degré $p$ le morphisme induit sur les gradués n'est autre, d'après ce qu'on vient de voir, que l'inclusion canonique :

$$\mathrm{H}^p(X,\mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathrm{H}^p(X,\mathbb{Q}).$$

Ceci montre que le morphisme ch est strict. Il reste à se limiter au sous-module des termes de degré pair de $\mathrm{K}^*(X)$ pour obtenir l'énoncé. □

Corollaire 1.2. — *Sous les hypothèses ci-dessus, la filtration de* $\mathrm{K}(X)$ *est indépendante du choix de la suite* $X_p$ *et elle est compatible avec la structure multiplicative.*

Ceci résulte du fait que ch est un morphisme d'algèbres. Une autre description de la filtration de $\mathrm{K}(X)$ est obtenue par l'annulation du rang $r$ et des classes de Chern :

$$F^{2p}\,\mathrm{K}(X) = \big\{\xi \in \mathrm{K}^0(X)\,;\; c_1(\xi) = \cdots = c_{p-1}(\xi) = 0\big\}.$$

En particulier, un élément $\xi \in \mathrm{K}(X)$ est nul si et seulement si il est de rang nul et de classes de Chern nulles.

Corollaire 1.3. — *Si la cohomologie entière de* $X$ *est sans torsion, la partie impaire* $\mathrm{gr}^{\mathrm{impair}}\,\mathrm{K}(X)$ *est nulle, et le caractère de Chern induit un isomorphisme d'algèbres graduées :*

$$\mathrm{gr}\big(\mathrm{K}(X)\big) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X,\mathbb{Z}). \tag{*}$$

On notera par la suite :

$$F_p\big(\mathrm{K}(X)\big) = F^{2p}\big(\mathrm{K}(X)\big).$$

On utilisera la surjectivité de (*) sous la forme suivante : pour tout entier $p \geq 1$ et tout $a \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Z})$, il existe $\xi \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que

$$\mathrm{ch}\,\xi = a + \textit{termes de degré supérieur.}$$

De même on utilisera implicitement (*) sous la forme suivante : si les $a_\alpha$ sont des éléments homogènes qui constituent une base de $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$, et $\xi_\alpha$ des éléments de $\mathrm{K}(X)$ tels que $\mathrm{ch}(\xi_\alpha) = a_\alpha +$ *termes de degré supérieur*, alors les $\xi_\alpha$ constituent une base de $\mathrm{K}(X)$ sur $\mathbb{Z}$. De plus, les éléments de $F_p(\mathrm{K}(X))$ sont les combinaisons linéaires

$$\sum_{\alpha,\,\deg(a_\alpha)\geq 2p} u_\alpha \xi_\alpha\,.$$

## 2. Quadriques

L'algèbre de cohomologie entière des hypersurfaces lisses $X$ de $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ est bien connue (voir par exemple DELIGNE [3]) et obtenue généralement à partir du théorème de Lefchetz sur les sections hyperplanes et de la dualité de Poincaré, compte tenu des résultats généraux sur la cohomologie des variétés affines. Dans le cas des hypersurfaces de Fermat, il est en fait facile d'étudier le type d'homotopie du complémentaire ce qui fournit la cohomologie de $X$ en déroulant la suite exacte de Gysin. Dans le cas des quadriques, la situation est particulièrement simple; nous obtenons ainsi des générateurs pour l'algèbre de cohomologie, générateurs que nous relevons à $\mathrm{K}(X)$ pour décrire l'algèbre de Grothendieck.

**2.1. Le complémentaire d'une quadrique.** — On considère dans l'espace projectif $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ la quadrique $X$ d'équation homogène :

$$z_0^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0.$$

LEMME 2.1. — *Le complémentaire de $X$ a le type d'homotopie de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$.*

*Démonstration.* — Soit $U = \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C}) - X$. On a bien sûr un plongement :

$$\varphi : \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow U.$$

Considérons la rétraction $r : U \to \mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie de la manière suivante : la sphère complexe $S_{n+1}(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n+2}$, définie par l'équation

$$z_0^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1,$$

est un revêtement de degré 2 de $U$. On a une rétraction sur la sphère réelle $\rho : S_{n+1}(\mathbb{C}) \to S_{n+1}$ qui associe à tout vecteur $z = x + iy \in S_{n+1}(\mathbb{C})$ (où $x$ et $y \in \mathbb{R}^{n+2}$) le vecteur de norme 1 :

$$x'(x,y) = \frac{x}{\sqrt{1 + \|y\|^2}}\cdot$$

Cette rétraction est homotope à l'identité : la sphère complexe est difféomorphe au fibré tangent à la sphère réelle, par le difféomorphisme

$$S_{n+1}(\mathbb{C}) \to TS_{n+1}$$

défini par $z \mapsto (x'(x,y),y)$ ; par ce difféomorphisme, la rétraction devient la projection canonique. De plus, ce difféomorphisme est équivariant pour l'action naturelle du groupe $\mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ; par suite, il en est de même de l'homotopie. Par passage au quotient, on obtient que l'inclusion $\varphi$ est une équivalence d'homotopie. □

**2.2. L'espace projectif réel.** — Rappelons maintenant la description de l'algèbre de cohomologie entière de l'espace projectif réel $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$ de dimension $k$. On doit distinguer suivant la parité de la dimension $k$ : cette variété n'est orientable que si $k$ est impair. Considérons le plongement

$$\mathbb{P}_k(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathbb{P}_k(\mathbb{C})$$

et désignons par $\xi$ la classe de Chern du fibré induit par le fibré tautologique $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k(\mathbb{C})}(1)$, dual du fibré de Hopf. Soit d'autre part, dans le cas où $k$ est impair, $\eta$ la classe fondamentale de $\mathbb{P}_k(\mathbb{R})$.

Proposition 2.2.

(i) *Si $k=2m$, l'algèbre de cohomologie* $\mathrm{H}(\mathbb{P}_k(\mathbb{R}))$ *est engendrée par $\xi$, avec pour seules relations $\xi^{m+1}=0$, $2\xi=0$*

(ii) *Si $k=2m+1$, l'algèbre de cohomologie* $\mathrm{H}(\mathbb{P}_k(\mathbb{R}))$ *est engendrée par $\xi$ et $\eta$ avec pour seules relations $2\xi=0$, $\xi^{m+1}=0$, $\xi\eta=0$, $\eta^2=0$.*

La description des groupes de cohomologie entière $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}_k(\mathbb{R}))$ est un exercice classique : il suffit de dérouler la suite exacte de cohomologie du cône d'une application continue, et de faire une récurrence sur la dimension $k$. L'énoncé ci-dessus est plus précis : il donne la description de la structure multiplicative. On peut l'obtenir par exemple comme conséquence de la description bien connue de l'algèbre de cohomologie $\mathrm{H}(\mathbb{P}_n(\mathbb{R}),\mathbb{Z}_2)$ comme algèbre tronquée de polynômes en la classe de Stiefel-Whitney $w_1$ du fibré vectoriel de Hopf sur l'espace projectif réel, et des relations entre classes de Stiefel-Whitney des fibrés vectoriels réels et classes de Chern des fibrés vectoriels complexes (cf. Spanier [7, chap. 5] ; Husemoller [12, th. 11.4]).

**2.3. Quadriques de dimension impaire.**

La suite exacte de Gysin

$$\cdots \to \mathrm{H}^{q-1}(U) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^{q-2}(X) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^q\big(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})\big) \to \mathrm{H}^q(U) \to \cdots$$

dans laquelle Res désigne le morphisme résidu et $i_*$ le morphisme image directe, fournit la cohomologie de la quadrique $X$.

On suppose $n = 2m + 1$. D'après la description donnée ci-dessus de la cohomologie de l'espace projectif réel de dimension paire, le morphisme de restriction $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^q(U)$ est surjectif et on a des suites exactes courtes :

$$0 \to \mathrm{H}^{q-2}(X) \to \mathrm{H}^q\big(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})\big) \to \mathrm{H}^q\big(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})\big) \to 0.$$

Il en résulte l'on a $\mathrm{H}^q(X) = 0$ pour tout $q$ impair, et que $\mathrm{H}^q(X) = \mathbb{Z}$ pour $q$ pair. Soient $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})}(1))$ la classe de Chern de la restriction du fibré tautologique à la quadrique $X$ et $k$ le générateur de $\mathrm{H}^{2m+2}(X)$ défini par $i_*(k) = 2h^{m+2}$ : c'est la classe fondamentale d'un sous-espace totalement isotrope $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ maximal. Les générateurs des groupes $\mathrm{H}^{2i}(X)$ sont donnés pour $0 \leq i \leq n$ par

$$\big(1, h, \ldots, h^m, k, \ldots, kh^m\big).$$

On a donc la description suivante de l'algèbre de cohomologie de $X$ :

PROPOSITION 2.3. — *Soit $X$ une quadrique lisse dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ de dimension $n = 2m + 1$. Son algèbre de cohomologie est donnée par*

$$\mathrm{H}(X) = \mathbb{Z}[h, k]$$

*où les générateurs $h$ et $k$, de degrés $2$ et $2m + 2$ respectivement, sont soumis aux seules relations $h^{m+1} = 2k$, $k^2 = 0$.*

Venons-en à l'algèbre de Grothendieck topologique. Rappelons d'abord que si $Y$ est un sous-schéma d'une variété algébrique lisse $X$, le faisceau structural $\mathcal{O}_Y$ définit une classe dans l'algèbre de Grothendieck des faisceaux algébriques cohérents de $X$. La variété $X$ étant lisse, cette algèbre coïncide avec celle qui est associée aux faisceaux localement libres.

En particulier, ce sous-schéma définit une classe $\gamma(Y)$ dans l'algèbre de Grothendieck topologique $\mathrm{K}(X)$. Si $S$ est une variété algébrique connexe, et $Y$ un sous-schéma de $S \times X$ plat sur $S$, la classe $\gamma(Y(s))$ du sous-schéma $Y(s)$ de $X$ défini par le point $s \in S$ ne dépend pas de $s$. Ceci permet le calcul du produit de certains éléments $c$ et $c'$ dans $\mathrm{K}(X)$ ; quand on peut représenter ces classes par des sous-schémas $c = \gamma(Y)$, $c' = \gamma(Y')$ tels que $\mathrm{Tor}_i(\mathcal{O}_Y, \mathcal{O}_{Y'}) = 0$ pour $i > 0$, on a en effet $\gamma(Y \cap Y') = c \cdot c'$.

Remarquons que cette condition est satisfaite si $Y$ et $Y'$ sont de Cohen-Macaulay et se coupent suivant la bonne dimension, c'est-à-dire si $\operatorname{codim}(Y \cap Y') = \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Y'$. Si cette condition n'est pas satisfaite, on peut parfois l'obtenir par déplacement, comme dans le « moving lemma » de Chow. Ces conditions sont en particulier satisfaites pour deux sous-variétés lisses $Y$ et $Y'$ qui se coupent suivant la bonne dimension.

THÉORÈME 2.4. — *Soit $X$ une quadrique lisse de dimension $n = 2m+1$ dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$. L'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\kappa, \eta]$ où les générateurs $\kappa \in F_1 \mathrm{K}(X)$ et $\eta \in F_{m+1} \mathrm{K}(X)$ sont soumis aux seules relations $\kappa^{m+1} = (2-\kappa)\eta$, $\eta^2 = 0$.*

*Démonstration.* — La suite spectrale d'Atiyah-Hirzebruch dégénère puisque la cohomologie est sans torsion. Soient $\kappa$ la classe, dans $\mathrm{K}(X)$, du faisceau structural d'une section hyperplane et $\eta$ la classe d'un sous-espace totalement isotrope de dimension $m$. Considérons l'algèbre des polynômes $\mathbb{Z}[x, y]$ où $x$ et $y$ sont de degrés respectifs 2 et $2m+2$, filtrée par le degré. On a un homorphisme $\mathbb{Z}[x, y] \to \mathrm{K}(X)$ défini par $x \mapsto \kappa$, $y \mapsto \eta$, qui se quotiente par l'idéal $I = (x^{m+1} - y(2-x), y^2)$ en un morphisme :

$$u : \mathrm{A} := \mathbb{Z}[x, y]/I \longrightarrow \mathrm{K}(X).$$

En effet, si $X$ a pour équation homogène $z_0^2 + \ldots + z_{2m+2}^2 = 0$ la classe $\kappa^{m+1}$ définie par le faisceau structural de l'intersection $Y$ de $X$ avec le sous-espace linéaire $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$ d'équations :

$$z_0 + iz_1 = 0, \ldots, z_{2m} + iz_{2m+1} = 0.$$

Cette intersection n'est pas réduite : elle est définie dans ce sous-espace linéaire par l'équation $z_{2m+2}^2 = 0$ : il s'agit donc d'un hyperplan double, de sorte que l'on a la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{Y_{\mathrm{red}}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_{\mathrm{red}}} \to 0.$$

Le sous-schéma $Y_{\mathrm{red}}$ est le sous-espace totalement isotrope de dimension $m$ d'équations

$$z_0 + iz_1 = 0, \ldots, z_{2m} + iz_{2m+1} = 0, z_{2m+2} = 0,$$

de sorte que sa classe est $\eta$. Ainsi, cette suite exacte fournit la relation $\kappa^{m+1} = \eta(2-\kappa)$. En observant que $F_{2m+2} \mathrm{K}(X) = 0$, on obtient la relation $\eta^2 = 0$; plus géométriquement, cette relation peut aussi s'obtenir en observant que la grassmannienne des sous-espaces totalement isotropes de dimension $m$ est rationnelle (donc connexe) : on peut aussi représenter cette classe $\eta$ par le sous-espace totalement isotrope d'équation

$$z_0 - iz_1 = 0, \ldots, z_{2m} - iz_{2m+1} = 0, z_{2m+2} = 0$$

qui ne rencontre pas le précédent. Le morphisme $u$ est compatible avec les filtrations canoniques, et par conséquent induit un morphisme sur les gradués. Le gradué $\mathrm{gr}(\mathrm{A})$ est le quotient $\mathbb{Z}[x, y]/J$ par l'idéal

$$J = (x^{m+1} - 2y, y^2)$$

et on a un morphisme $v : \mathbb{Z}[x,y]/J \to \mathrm{H}(X)$ défini par $x \mapsto h$, $y \mapsto k$. Dans le diagramme commutatif d'algèbres

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[x,y]/J \arrow[r, "\mathrm{gr}\,(u)"] \arrow[dr, "v"'] & \mathrm{gr}\big(\mathrm{K}(X)\big) \arrow[d, "\alpha"'] \\ & \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X), \end{tikzcd}$$

la flèche verticale $\alpha$ est l'isomorphisme d'Atiyah-Hirzebruch induit par le caractère de Chern. D'après la Proposition 2.3, le morphisme $v$ est un isomorphisme. Il en résulte que $\mathrm{gr}(u)$ est aussi un isomorphisme ; par suite $u$ est un isomorphisme. D'où l'énoncé. $\square$

**2.4. Quadriques de dimension paire.** — On suppose $n = 2m$. Dans ce cas, la flèche $\mathrm{H}^q(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})) \to \mathrm{H}^q(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R}))$ est surjective sauf si $q = n+1$. On a alors la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{H}^{n+1}\big(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{R})\big) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^n(X) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^{n+2}\big(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})\big) \to 0.$$

Il en résulte $\mathrm{H}^q(X)$ est nul en degré impair, et isomorphe à $\mathbb{Z}$ en degré pair, sauf si $q = n$ auquel cas c'est un groupe abélien libre à deux générateurs. Désignons par $h$ la classe, de degré 2, de la section hyperplane, et désignons par $a$ et $b$ les classes respectives d'un représentant de chacune des deux familles de sous-espaces totalement isotropes $\mathbb{P}_m(\mathbb{C})$ de dimension maximale. On a alors $a+b = h^m$ et, suivant la parité de $m$ :

$$\begin{cases} a^2 = 0, \quad b^2 = 0, \quad ab = 1 \quad \text{si } m \equiv 1 \pmod 2, \\ a^2 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ab = 0 \quad \text{si } m \equiv 0 \pmod 2, \end{cases}$$

ce qui prouve que $(a,b)$ constitue une base de $\mathrm{H}^n(X)$. Il en résulte, en utilisant la dualité de Poincaré, que $i_*(a) = i_*(b) = h^{m+1}$ et que $ha = hb$ est un générateur de $\mathrm{H}^{n+2}(X)$, puisque son image directe est $i_*(a)h$. On obtient :

Proposition 2.5. — *Soit $X$ une quadrique de dimension paire $n = 2m$. Son algèbre de cohomologie est donnée par*

$$\mathrm{H}(X) = \mathbb{Z}[h,a,b]$$

*où les générateurs, de degré 2 pour $h$ et $n$ pour $a$ et $b$, sont liés par les seules relations $a+b=h^m$, $h(a-b)=0$ et, suivant la parité de $m$ :*

$$\begin{cases} abh=0, \quad a^2=0, \quad b^2=0 & \text{si } m\equiv 1 \pmod 2,\\ ha^2=0, \quad ab=0 & \text{si } m\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

THÉORÈME 2.6. — *Soit $X$ une quadrique lisse de dimension $n=2m$ paire. L'algèbre de Grothendieck $\mathrm{K}(X)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[\kappa,\xi,\eta]$, où les générateurs $\kappa$, $\xi$, $\eta$, classes des faisceaux structuraux de la section hyperplane et d'un représentant de chacune des deux familles de sous-espaces totalement isotropes maximaux, sont liés par les seules relations*

$$\xi+\eta=\kappa^m+\kappa\xi, \quad \kappa(\xi-\eta)=0,$$

*relations auxquelles on doit ajouter, suivant la parité de $m$ :*

$$\begin{cases} \xi^2=0, \quad \eta^2=0, \quad \xi\eta\kappa=0 & \text{si } m\equiv 1 \pmod 2,\\ \xi\eta=0, \quad \kappa\xi^2=0 & \text{si } m\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

*Démonstration.* — Les classes de cohomologie $h, a, b$ sont les classes fondamentales des sous-schémas de $X$ définis respectivement par la section hyperplane, et un élément de chacune des deux familles de sous-espaces totalement isotropes maximaux; dans $\mathrm{K}(X)$, les classes $\kappa,\xi,\eta$ des faisceaux structuraux associés satisfont alors aux relations

$$\xi+\eta=\kappa^m+\kappa\xi, \quad \kappa(\xi-\eta)=0$$

et, suivant la parité de $m$ :

$$\begin{cases} \xi^2=0, \quad \eta^2=0, \quad \xi\eta\kappa=0 & \text{si } m\equiv 1 \pmod 2,\\ \xi\eta=0, \quad \kappa\xi^2=0 & \text{si } m\equiv 0 \pmod 2.\end{cases}$$

Il en résulte que l'on peut recopier la démonstration de la PROPOSITION 2.3. □

REMARQUE 2.7. — Lorsque la cohomologie de $X$ est sans torsion, on a vu au paragraphe 1 que le caractère de Chern induisait un isomorphisme d'algèbres graduées $\mathrm{gr}(\mathrm{K}(X)) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$. Par contre, il n'y a aucune raison pour que les algèbres filtrées $\mathrm{K}(X)$ et $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ soient isomorphes.

En effet, considérons par exemple le cas où est $X$ est une quadrique de dimension $n=2m+1$. S'il existait un tel isomorphisme, on pourrait trouver un élément $c \in F_2(\mathrm{K}(X))$ tel que $(\kappa + c)^{m+1}$ soit divisible par 2 dans $\mathrm{K}(X)$. En développant, on trouve que $\kappa^{m+1}+(m+1)c\kappa^m+\cdots$ devrait être divisible par 2, c'est-à-dire, en vertu de la relation $\kappa^{m+1} = (2-\kappa)\eta$, l'élément $-\kappa\eta+(m+1)c\kappa^m$ devrait être divisible par 2. Dans le cas où $m$ est impair, $\kappa\eta$ devrait lui-même être divisible par 2 : c'est absurde, car la classe de $\kappa\eta$ dans $\mathrm{gr}_{m+2}(\mathrm{K}(X))$ est un des deux générateurs de ce groupe.

Il arrive parfois que l'isomorphisme $\mathrm{gr}(\mathrm{K}(X)) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ provienne d'un isomorphisme d'algèbres filtrées $\mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$, mais il semble que ceci n'arrive que dans des situations très particulières :

1) C'est bien sûr vrai si $X$ est une courbe car alors le morphisme $\mathrm{ch} : \mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ a un sens et est un isomorphisme.

2) C'est vrai sur l'espace projectif $X = \mathbb{P}_n(\mathbb{C})$; en effet, par le théorème de périodicité de Bott, on a $\mathrm{K}(X) = \mathbb{Z}[t]/(t^{n+1})$ et on peut prendre comme générateur la classe $\kappa$ du faisceau structural d'une section hyperplane. La classe de Chern $h = c_1(\kappa)$ satisfait aux mêmes relations : on a alors un isomorphisme d'algèbres $\mathrm{K}(X) \to \mathrm{H}(X)$ qui envoie $\kappa$ sur $h$.

3) Sur une surface complexe compacte et connexe dont le groupe de cohomologie $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ est sans torsion, c'est encore vrai, parce que l'on peut relever une base $a_i$ de $\mathrm{H}^2(X,\mathbb{Z})$ en des éléments $\xi_i$ de $F_1(\mathrm{K}(X))$ qui satisfont à la relation

$$\mathrm{ch}(\xi_i\xi_j) = \langle a_i, a_j\rangle$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la forme d'intersection; par suite, les relations entre les $\xi_i$ sont les mêmes qu'entre les $a_i$. Il en résulte que l'on a bien un isomorphisme $\mathrm{K}(X) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ qui envoie $\xi_i$ sur $a_i$ et qui coïncide avec ch sur le sous-groupe $F_2(\mathrm{K}(X))$. Ce morphisme d'algèbres, qui dépend du choix des éléments $\xi_i$ induit bien sûr l'isomorphisme canonique $\mathrm{gr}(\mathrm{K}(X)) \simeq \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$. On s'inspirera de ce raisonnement au paragraphe 3.4.

## 3. Hypersurfaces de degré élevé

On considère l'hypersurface $X$ de Fermat de dimension $n$ dans $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$, d'équation homogène :

$$z_0^d + \ldots + z_{n+1}^d = 0.$$

Dans ce cas, la topologie de l'ouvert complémentaire $U$ est plus compliquée. Soit $\Sigma$ l'hypersurface de $\mathbb{C}^{n+2}$ d'équation $z_0^d + \ldots + z_{n+1}^d = 1$. Le morphisme canonique $\Sigma \to U$ est un revêtement cyclique de degré $d$.

Soit $\mu_d$ le groupe des racines $d$-ièmes de l'unité. D'après MILNOR [9, § 9], la variété $\Sigma$ a même type d'homotopie que le joint

$$J = \underbrace{\mu_d * \cdots * \mu_d}_{n+2}$$

qui est un bouquet de $(d-1)^{n+2}$ sphères de dimension $n+1$. Le groupe $\mu_d$ opère par l'action diagonale sur ce bouquet et par suite sur sa cohomologie. La cohomologie de $U$ est alors donnée par l'aboutisement de la suite spectrale :

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p\big(\mu_d, \mathrm{H}^q(\Sigma)\big) \Longrightarrow \mathrm{H}^{p+q}(U).$$

**3.1. Calcul des nombres de Betti.** — Bien sûr, il est plus facile de calculer la caractéristique d'Euler-Poincaré. Elle peut se calculer en utilisant la formule de Riemann-Roch comme dans [9] ou comme nombre de Chern de degré maximum du fibré tangent. Mais la méthode la plus géométrique est de considérer le revêtement $\Sigma \to U$ de degré $d$ ci-dessus. Puisque $\Sigma$ est un bouquet de $(d-1)^{n+2}$ sphères de dimension $n+1$, on a : $\chi(\Sigma) = 1 - (-1)^n(d-1)^{n+2}$ et $\chi(U) = \chi(\Sigma)/d$. Par suite :

$$\chi(U) = \frac{1-(1-d)^{n+2}}{d}.$$

D'autre part, d'après la suite exacte de Gysin, $\chi(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})) = \chi(X)+\chi(U)$. Il en résulte :

$$\chi(X) = n+2+\frac{(1-d)^{n+2}-1}{d}.$$

PROPOSITION 3.1. — *Le nombre de Betti $b_n$ de $X$ est donné, suivant la parité de $n$, par la formule :*

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{(d-1)^{n+2}-1}{d} + 2 & \text{si } n \equiv 0 \pmod 2, \\[2ex] \dfrac{1-(1-d)^{n+2}}{d} - 1 & \text{si } n \equiv 1 \pmod 2. \end{cases}$$

En effet, la cohomologie de la variété affine $U$ est nulle en degrés $> n+1$ et la suite exacte de Gysin montre que le morphisme image directe $i_* : \mathrm{H}_q(X) \to \mathrm{H}_q(\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C}))$ est un isomorphisme en degrés $q > n$. Compte tenu de la dualité de Poincaré, on obtient les nombres de Betti $b_q$ d'indice $q \neq n$ :

$$b_q = \begin{cases} 1 & \text{si } q \text{ est pair et } q \leq 2n, \\ 0 & \text{si } q \text{ est impair.} \end{cases}$$

**3.2. Hypersurfaces de dimension impaire.**

On suppose $n = 2m+1$. Dans ce cas, la suite spectrale fournit, pour $q \leq n$, un isomorphisme $\mathrm{H}^q(\mu_d, \mathbb{Z}) \simeq \mathrm{H}^q(U)$ et pour $q = n+1$ une suite exacte

$$(*) \qquad 0 \to \mathrm{H}^{2m+2}(\mu_d, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}(U) \longrightarrow \big(\mathrm{H}^{2m+2}(\Sigma)\big)^{\mu_d} \to 0.$$

De plus, puisque $U$ est une variété affine de dimension $n+1$, on a :

$$\mathrm{H}^q(U) = 0 \quad \text{pour} \quad q > n+1.$$

Ceci conduit aux annulations $\mathrm{H}^{2i}(\mu_d, \mathrm{H}^{2m+2}(\Sigma)) = 0$ et aux isomorphismes :

$$d_{2m+3} : \mathrm{H}^{2i+1}\big(\mu_d, \mathrm{H}^{2m+2}(\Sigma)\big) \simeq \mathrm{H}^{2i+2m+4}(\mu_d, \mathbb{Z}).$$

On désigne dans la suite par $h$ la classe fondamentale d'une section hyperplane dans $\mathrm{H}^2(X)$ et par $k$ la classe fondamentale d'un sous-espace linéaire de dimension $m$ contenu dans $X$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit $X$ une hypersurface de Fermat de dimension impaire $n = 2m+1$.*

(i) *L'algèbre $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ est engendrée par les éléments $h$ et $k$. Ces éléments, homogènes de degré $2$ et $2m+2$ respectivement, sont liés par les seules relations $h^{m+1} = dk$, $k^2 = 0$*

(ii) *Le module $\mathrm{H}^{\mathrm{impair}}(X)$, concentré en degré $n$, est isomorphe au module des invariants $(\mathrm{H}^{2m+2}(\Sigma))^{\mu_d}$.*

*Démonstration.* — Soit $t$ la classe de Chern du fibré tautologique sur l'espace projectif. L'énoncé résulte de la suite exacte de Gysin, et du fait que le groupe abélien $\mathrm{H}^{2i}(\mu_d, \mathbb{Z})$ a pour générateur l'image de $t^i$ par l'isomorphisme $\mathrm{H}^{2i}(U) \simeq \mathrm{H}^{2i}(\mu_d, \mathbb{Z})$ ci-dessus : c'est seulement la fonctorialité du morphisme $\mu_d$-équivariant $\Sigma \to \{\cdot\}$. Pour $q = 2m+2$, on a la suite exacte :

$$\mathrm{H}^{2m+2}\big(\mathbb{P}_n(\mathbb{C})\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}(U) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+1}(X) \to 0.$$

En comparant avec la suite exacte (*), on voit que le conoyau de la première flèche s'identifie au module des invariants. $\square$

Soit $\omega$ une racine $d$-ième de $(-1)^{d-1}$. On considère maintenant, dans $\mathrm{K}(X)$, la classe $\kappa$ du faisceau structural la section hyperplane, et la classe $\eta$ du faisceau structural du sous-espace $P$ défini par les équations linéaires :

$$z_0 + \omega z_1 = 0,\ z_2 + \omega z_3 = 0, \dots,\ z_{2m} + \omega z_{2m+1} = 0,\ z_{2m+2} = 0.$$

THÉORÈME 3.3. — *Soit $R(x)$ est le polynôme de degré $(d-1)$ défini par l'identité*

$$d - R(x) = \frac{1}{x}\big(1 - (1-x)^d\big) = \sum_{j=0}^{d-1} (-1)^j C_d^{j+1} x^j.$$

*L'algèbre de Grothendieck* $\mathrm{K}(X)$ *est isomorphe à* $\mathbb{Z}[\kappa, \eta]$ *où les générateurs* $\kappa$ *et* $\eta$ *sont soumis aux seules relations* $\kappa^{m+1} = (d - R(\kappa))\eta$, $\eta^2 = 0$.

*Démonstration.* — Le sous-schéma $Z$ défini par l'intersection avec $X$ du sous-espace linéaire défini par les $(m+1)$-premières équations n'est pas réduit : dans le sous-espace projectif $\mathbb{P}_{m+1}(\mathbb{C})$ défini par les équations

$$z_0 + \omega z_1 = 0,\ z_2 + \omega z_3 = 0, \dots,\ z_{2m} + \omega z_{2m+1} = 0,$$

ce sous-schéma $Z$ a pour équation $z_{2m+2}^d = 0$. Les puissances de l'idéal nilpotent définissent une filtration décroissante $\mathrm{Filt}^i(\mathcal{O}_Z)_{i \geq 0}$ dont le gradué associé est donné par :

$$\mathrm{gr}^i(\mathcal{O}_Z) = \begin{cases} \mathcal{O}_P(-i) & \text{si } \ 0 \leq i \leq d-1, \\ 0 & \text{si } \ i \geq d. \end{cases}$$

Il en résulte que l'on a, dans $\mathrm{K}(X)$, la relation :

$$\kappa^{m+1} = \sum_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_P(-i) = \sum_{i=0}^{d-1} (1-\kappa)^i \eta = \big(d - R(\kappa)\big)\eta.$$

Pour une raison de codimension, le « moving lemma » de Chow montre l'on a encore la relation $\eta^2 = 0$, relation qu'on peut aussi obtenir en utilisant la compatibilité de la filtration avec la structure multiplicative et en observant que $\eta^2 \in F_{2m+2}\,\mathrm{K}(X) = 0$. Maintenant les classes fondamentales des sous-schémas considérés sont exactement les générateurs de $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ dans la description de la PROPOSITION 3.2. La fin de la proposition est strictement identique à celle qu'on a donnée pour les quadriques. $\square$

### 3.3. Cohomologie des hypersurfaces de dimension paire.

Dans le cas où $X$ est une hypersurface de dimension paire $n = 2m$, on a

$$\begin{cases} \mathrm{H}^i(U) = \mathrm{H}^i(\mu_d, \mathbb{Z}) & \text{pour } \ 1 \leq i \leq 2m, \\[1ex] \mathrm{H}^j\big(\mu_d, \mathrm{H}^{2m+1}(\Sigma)\big) \simeq \mathrm{H}^{j+2m+2}(\mu_d, \mathbb{Z}) & \text{pour } j \geq 1, \end{cases}$$

et la suite exacte

$$0 \to \mathrm{H}^{2m+1}(U) \longrightarrow \left(\mathrm{H}^{2m+2}(\Sigma)\right)^{\mu_d} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}^{2m+2}(\mu_d, \mathbb{Z}) \to 0$$

dans laquelle le morphisme $\varphi$ est la différentielle $d_{2m+2}^{0,2m+1}$. Il résulte de la suite exacte de Gysin que $\mathrm{H}^{\mathrm{impair}}(X) = 0$ et que $\mathrm{H}^{2k}(X) = \mathbb{Z}$ pour $k \neq m$ et $0 \leq k \leq n$. Par ailleurs, au niveau $2m$ la suite exacte de Gysin s'écrit :

$$0 \to \mathrm{H}^{2m+1}(U) \xrightarrow{\mathrm{Res}} \mathrm{H}^{2m}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m+2}\left(\mathbb{P}_{2m+1}(\mathbb{C})\right) \to 0.$$

Soient $h = c_1(\mathcal{O}(1)$ la classe, de degré 2, d'une section hyperplane et $k$ la classe fondamentale, de degré $2m+2$, d'un sous-espace linéaire $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{C})$.

PROPOSITION 3.4. — *Soit $X$ une hypersurface de dimension $n = 2m$.*

(i) *On a* $\mathrm{H}^{\mathrm{impair}}(X) = 0$.

(ii) *La cohomologie paire est engendrée par $h$, $k$ et* $\mathrm{H}^{2m}(X)$ ; *et l'algèbre de cohomologie est déterminée par la forme quadratique d'intersection $\langle\ ,\ \rangle$ sur* $\mathrm{H}^{2m}(X)$ *et les relations, pour $a$ et $b \in$* $\mathrm{H}^{2m}(X)$ :

$$\begin{cases} h^{m+1} = dk, \quad kh^m = 0, \quad k^2 = 0, \\ ha = \langle h^m, a\rangle k, \quad ab = \langle a, b\rangle kh^{m-1}. \end{cases}$$

**3.4. L'algèbre de Grothendieck des hypersurfaces de dimension paire.** — Pour construire les générateurs de l'algèbre $\mathrm{K}(X)$, nous devons disposer d'une bonne base pour le groupe abélien $\mathrm{H}^{2m}(X)$. C'est possible, en raison du lemme suivant :

LEMME 3.5. — *Dans le groupe de cohomologie* $\mathrm{H}^{2m}(X)$, *l'élément $h^m$ n'est pas divisible.*

*Démonstration.* — Soit $Y \hookrightarrow X$ une section hyperplane de $X$. On a la suite exacte

$$\mathrm{H}^{2m-2}(Y) \xrightarrow{i_*} \mathrm{H}^{2m}(X) \to \mathrm{H}^{2m}(X - Y)$$

où $i : Y \to X$ est le morphisme d'inclusion. Puisque $Y$ est de dimension $2m-1$, l'élément $h^{m-1}$ engendre $\mathrm{H}^{2m-2}(Y)$, et on a évidemment $i_*(h^{m-1}) = h^m$. D'autre part, le complémentaire $X - Y$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $2m$ d'après MILNOR [9], donc sa cohomologie est sans torsion. Par suite, le quotient $\mathrm{H}^{2m}(X)/\mathbb{Z}h^m$ est un groupe abélien libre. □

Soit $X$ une hypersurface de Fermat de dimension paire. Choisissons une base de $\mathrm{H}^{2m}(X)$ de la forme $h^m, a_1, \ldots, a_N$, où $N = b_n - 1$. Soit $R$ le polynôme défini dans le THÉORÈME 3.3.

THÉORÈME 3.6. — *Soient $\kappa$ la classe dans* $\mathrm{K}(X)$ *du faisceau structural d'une section hyperplane et $\eta$ la classe du faisceau structural d'un sous-espace linéaire* $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{C})$. *Alors l'algèbre* $\mathrm{K}(X)$ *est engendrée par $\kappa$, $\eta$ et des éléments $\xi_1,\dots,\xi_N \in F_m\,\mathrm{K}(X)$ satisfaisant aux seules relations :*

$$\begin{cases} \kappa^{m+1} = \big(d - R(\kappa)\big)\eta, \quad \eta^2 = 0, \quad \eta\kappa^m = 0, \quad \xi_i\eta = 0, \\ \kappa\xi_i = \langle h^m, a_i\rangle\eta, \quad \xi_i\xi_j = \langle a_i, a_j\rangle\eta\kappa^{m-1}. \end{cases}$$

*Démonstration.* — On prend pour $\eta$ la classe dans $\mathrm{K}(X)$ du faisceau structural du sous-espace linéaire $\mathbb{P}_{m-1}(\mathbb{C})$ défini par les équations :

$$z_0 + \omega z_1 = 0, \dots, z_{2m-2} + \omega z_{2m-1} = 0, z_{2m-1} = z_{2m} = 0.$$

Les $m+1$ premières équations définisent un sous-schéma non réduit de l'hypersurface $X$, dont on peut filtrer le faisceau structural comme dans le THÉORÈME 3.3. Ceci fournit la relation $\kappa^{m+1} = (d - R(\kappa))\eta$. Les relations $\eta^2 = 0$, $\eta\kappa^m = 0$ s'obtiennent en remarquant que les éléments $\eta^2$ et $\eta\kappa^m$ appartiennent à $F_{n+1}\,\mathrm{K}(X)$. Considérons des éléments $\xi_i' \in \mathrm{K}(X)$ tels que :

$$\mathrm{ch}(\xi_i') = a_i + \textit{termes de degré supérieur.}$$

Alors les éléments $1, \kappa, \dots, \kappa^m, \xi_1', \dots, \xi_N', \eta, \eta\kappa, \dots, \eta\kappa^{m-1}$ forment une base du groupe abélien $\mathrm{K}(X)$. En prenant le caractère de Chern, on obtient évidemment la relation $\xi_i\eta = 0$ ; compte tenu des relations dans $\mathrm{H}(X)$ et du fait que $\eta\kappa^{m-1}$ est le seul élément de $\mathrm{K}(X)$ dont le caractère de Chern est $kh^{m-1}$ on obtient aussi la relation $\xi_i'\xi_j' = \langle a_i, a_j\rangle\eta\kappa^{m-1}$. Considérons maintenant l'élément $k\xi_i' - \langle h, a_i\rangle\eta$. En prenant le caractère de Chern, on voit que cet élément appartient à $F_{m+2}\,\mathrm{K}(X)$. On peut donc écrire :

$$\kappa\xi_i' - \langle h, a_i\rangle\eta = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{i,j}\eta\kappa^j.$$

Considérons l'élément :

$$\xi_i = \xi_i' - \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_{i,j}\eta\kappa^{j-1}.$$

Puisque $\xi_i - \xi_i' \in F_{m+1}\,\mathrm{K}(X)$, on a encore $\mathrm{ch}(\xi_i) = a_i +$ *termes de degré supérieurs.* Les relations ci-dessus sont encore satisfaites pour $\xi_i$ et on a en outre $\kappa\xi_i = \langle h, a_i\rangle\eta$. □

Toute hypersurface lisse de l'espace projectif est difféomorphe à une hypersurface de Fermat, et on peut imposer que le difféomorphisme conserve la classe de la section hyperplane. La description ci-dessus de l'algèbre $\mathrm{K}(X)$ s'étend par difféomorphisme à toute hypersurface de dimension paire; bien entendu le générateur $\eta$ n'a plus d'interprétation géométrique comme classe d'une sous-variété algébrique. Ainsi, l'algèbre de Grothendieck est connue à isomorphisme près si l'on connaît la forme quadratique d'intersection. On sait que cette forme quadratique est unimodulaire; au moins dans le cas où elle est indéfinie, elle est connue à isomorphisme près dès que l'on sait calculer la signature (ou ce qui revient au même l'indice) et la parité [11].

**3.5. Calcul de l'indice.** — On suppose que $n = 2m$. D'après le théorème de Hodge (cf. [6, th. 15.8.2]) et la formule de Riemann-Roch, l'indice de la forme quadratique d'intersection est donné par :

$$\begin{aligned}\mathrm{Ind}(X) &= \sum_i \chi\big(\wedge^i T^*(X)\big)\\ &= \sum_{i=0}^{n} \int_X \mathrm{ch}(\wedge^i T^*)\,\mathrm{td}(X).\end{aligned}$$

Pour tout fibré vectoriel $F$ de rang $r$ la classe de cohomologie rationnelle

$$\sum_{i=0}^{n} \mathrm{ch}(\wedge^i F^*)\,\mathrm{td}(F)$$

est multiplicative, et lorsque $F$ est de rang un et de classe de Chern $c_1 = a$, elle vaut :

$$a\frac{1+\mathrm{e}^{-a}}{1-\mathrm{e}^{-a}} = \frac{a}{\tanh\frac{1}{2}a}.$$

De la suite exacte

$$0 \to T(X) \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+2}{}_{|X} \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \to 0,$$

on tire le résultat suivant :

PROPOSITION 3.7. — *Soit $h$ la classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_X(1)$. L'indice de la forme quadratique d'intersection est donnée par* :

$$\mathrm{Ind}(X) = \frac{1}{d}\int_X \frac{(\tanh\frac{1}{2}dh)}{(\tanh\frac{1}{2}h)^{n+2}}\,h^{n+1}.$$

**3.6. Parité de la forme d'intersection.** — Soit $X$ une hypersurface de dimension $n = 2m$ de degré $d$. Il est évident que si le degré $d$ est impair, la forme d'intersection est impaire, puisque l'élément $h^m$ a $d$ pour cup-carré. Si $d$ est pair, on peut encore obtenir ce résultat si $m$ est pair. Par contre, si $m = 1$ et $d$ pair, la forme d'intersection est paire.

PROPOSITION 3.8. — *Si $n \equiv 0$ (mod 4), la forme d'intersection est impaire.*

*Démonstration.* — On peut se placer dans le cas de l'hypersurface de Fermat. Soit $a$ la classe fondamentale d'un des sous-espaces linéaires $Y$ de dimension maximale $m$. Vérifions que $a^2 \equiv 1 \pmod 2$. Si on on désigne par $j : Y \to X$ est le morphisme d'inclusion, et par $N_{Y/X}$ le fibré normal de $Y$ dans $X$ on a $j^*(a) = c_m(N_{Y/X})$, et par suite la formule classique de self-intersection :

$$a^2 = \int_X j_* j^*(a) = \int_Y c_m(N_{Y/X}).$$

De la suite exacte

$$0 \to N_{Y/X} \longrightarrow N_{Y/\mathbb{P}_{n+1}} \longrightarrow N_{X/\mathbb{P}_{n+1}|Y} \to 0,$$

il découle la formule

$$c_m(N_{Y/X}) = \frac{(1+h)^{m+1}}{1+dh}$$

où $h$ est la classe de la section hyperplane dans $Y$. Ainsi, dans $\mathrm{H}^{2m}(Y)$, on a

$$c_m(N_{Y/X}) = \sum_{i+j=m} (-1)^i d^i C^j_{m+1} h^m = (m+1)h^m$$

et alors $a^2 \equiv 1 \pmod 2$.

PROPOSITION 3.9. — *La forme d'intersection sur une surface $X$ de $\mathbb{P}_3$ de degré pair, est elle-même paire.*

*Démonstration.* — Soit $a \in \mathrm{H}^2(X)$ une classe de cohomogie entière quelconque. C'est la classe de Chern d'un fibré topologique de rang un $L$ et d'après le théorème de Riemann-Roch topologique,

$$\chi(L) = \chi(\mathcal{O}_X) + \tfrac{1}{2}(a^2 + K_X a)$$

est un entier. Par suite, $a^2 \equiv (4-d)h \cdot a \pmod 2$. Ainsi, si $d$ est pair, $a^2$ est pair pour tout $a$, ce qui achève la démonstration. □

QUESTION. — Soit $X$ une hypersurface de degré pair, de dimension $n \equiv 2 \pmod 4$. La forme d'intersection est-elle paire ?

## 4. Classes de Chern des fibrés de rang élevé

Soit $\mathrm{Vect}^r(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels complexes de rang $r$ sur l'espace topologique $X$ ; on désigne par $\mathbb{C}_X^\ell$ le fibré trivial de rang $\ell$ sur $X$. On sait que si $X$ est un CW-complexe fini de dimension $\leq 2n$, les applications naturelles

$$\mathrm{Vect}^n(X) \longrightarrow \mathrm{Vect}^{n+\ell}(X),$$

associant à la classe d'isomorphisme du fibré $F$ la classe d'isomorphisme du fibré $F \oplus \mathbb{C}_X^\ell$, sont bijectives. Il en résulte que l'application naturelle

$$\mathrm{Vect}^n(X) \longrightarrow \mathrm{K}^0(X)$$

définie par $F \mapsto F - \mathbb{C}_X^n$ est bijective. Si la cohomologie de $X$ est sans torsion, l'application

$$\mathrm{Vect}^n(X) \longrightarrow 1 + \bigoplus_{i \geq 1} \mathrm{H}^{2i}(X)$$

qui associe à $F$ la classe totale de Chern $c(F) = 1 + \sum_{i=1}^n c_i$ à coefficients dans $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$ est injective : ceci résulte du fait que le caractère de Chern

$$\mathrm{ch} : \mathrm{K}^0(X) \to \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X, \mathbb{Q})$$

est — comme on l'a déjà vu — injectif et s'écrit

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{i \geq 1} \frac{1}{i\,!} s_i(x),$$

où $s_i(x) = s_i(c_1, \ldots, c_n)$ est un polynôme universel (polynôme de Newton exprimant la somme des puissances $i$-èmes des racines d'un polynôme en fonction des coefficients) en les classes de Chern $c_1, \ldots, c_n$ de $x \in \mathrm{K}(X)$ :

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1, \\ s_2 &= c_1^2 - 2c_2, \\ s_3 &= c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Donner la classification topologique des fibrés de rang élevé sur un tel complexe revient donc à trouver quelles sont les classes de Chern de ces fibrés, ou — ce qui revient au même — l'image de l'homomorphisme ch : $\mathrm{K}^0(X) \to \mathrm{H}(X,\mathbb{Q})$. En effet, cet homomorphisme de groupes se factorise suivant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}^0(X) \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "\mathrm{ch}"'] & 1+\bigoplus_{i\geq 1}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathrm{ch}"] \\ & \bigoplus_{i\geq 1}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q}) \end{tikzcd}$$

dans lequel la flèche horizontale $c$ est l'homomorphisme « classe totale de Chern » et la flèche verticale, notée encore ch, est un homomorphisme de groupes; ici $1+\bigoplus_{i\geq 1}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z})$ désigne le groupe multiplicatif des éléments inversibles de l'algèbre de cohomologie. Le morphisme vertical ch s'étend en un isomorphisme :

$$1+\bigoplus_{i\geq 1}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q}) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\geq 1}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q}).$$

Exemple. — Soit $h$ la classe de la section hyperplane sur l'espace projectif $\mathbb{P}_n(\mathbb{C})$. Les classes de cohomologie rationnelles $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i h^i$ (où $\alpha_i \in \mathbb{Q}$) qui sont caractères de Chern d'un fibré vectoriel de rang $r \geq n$ sont celles qui satisfont aux conditions :

$$\int_{\mathbb{P}_n} \alpha \mathrm{e}^{kh}\,\mathrm{td}(\mathbb{P}_n) \in \mathbb{Z} \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n.$$

Ces conditions sont équivalentes aux conditions suivantes, notées $S_k$ : pour $1 \leq k \leq n$, les intégrales

$$\int_{\mathbb{P}_k} \alpha_{|\mathbb{P}_k}\,\mathrm{td}(\mathbb{P}_k)$$

sont entières. C'est une traduction des conditions habituelles de Schwarzenberger [9]; ceci résulte d'ailleurs de l'énoncé suivant, qui sera la clé de ce qui suit :

Lemme 4.1. — *Soit $X$ une variété analytique complexe compacte de dimension $n$, dont la cohomologie entière $\mathrm{H}(X,\mathbb{Z})$ est sans torsion. Supposons qu'il existe une famille $Y_j$ de sous-variétés analytiques fermées, lisses et connexes, telle que l'homomorphisme de restriction*

$$\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{j,\,\dim Y_j = p} \mathrm{H}^{2p}(Y_j,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

*soit injectif. Soit* $\alpha \in \bigoplus_{p>0} \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Q})$ *une classe de cohomologie rationnelle paire. Alors* $\alpha$ *est le caractère de Chern d'un élément de* $\mathrm{K}^0(X)$ *si et seulement si l'une des deux conditions équivalentes suivantes est satisfaite :*

(i) *Pour tout* $j$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_{Y_j} \alpha_{|Y_j}\,\mathrm{td}(Y_j)$ *est entière.*

(ii) *Pour tout* $j$, *l'intégrale* $\displaystyle\int_X \alpha\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{Y_j})\,\mathrm{td}(X)$ *est entière.*

*Démonstration.* — Soit $Y$ une sous-variété fermée lisse de $X$. D'après le théorème de Riemann-Roch-Grothendieck, $i$ désignant l'inclusion $Y \hookrightarrow X$, on a $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_Y)\,\mathrm{td}(X) = i_*(\mathrm{td}(Y))$. Il en résulte :

$$\int_X \alpha\,\mathrm{ch}(\mathcal{O}_Y)\,\mathrm{td}(X) = \int_Y \alpha_{|Y}\,\mathrm{td}(Y).$$

On a donc équivalence entre les conditions (i) et (ii) de l'énoncé. La nécessité des conditions résulte du théorème de l'indice.

Montrons la réciproque. Supposons que la condition (i) soit satisfaite. On va construire, par récurrence sur $p$, une suite $x_p \in \mathrm{K}^0(X)$ telle que $\alpha - \mathrm{ch}\,x_p$ s'écrive comme somme de termes de degré $> 2p$. On prend $x_0 = 0$. Supposons $p \geq 1$, et $x_{p-1}$ déjà construit. Par linéarité, l'élément $\alpha - \mathrm{ch}\,x_{p-1}$ satisfait encore à la condition (i); sa restriction à toute sous-variété $Y_j$ de dimension $p$ est alors une classe de cohomologie homogène de degré $2p$ et entière. L'hypothèse implique qu'elle s'écrit elle-même

$$\alpha - \mathrm{ch}\,x_{p-1} = \beta_p + \sum_{i>p} \beta_i$$

avec $\beta_p \in \mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Z})$ et $\beta_i \in \mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q})$ pour $i > p$. Il existe donc un élément $y_p \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que

$$\mathrm{ch}\,y_p = \beta_p + \sum_{i>p} \gamma_i,$$

avec $\gamma_i \in \mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Q})$. Il suffit alors de choisir $x_p = x_{p-1} + y_p$. □

### 4.1. Hypersurfaces de dimension impaire.

THÉORÈME 4.2. — *Soient* $X$ *une hypersurface lisse de degré* $d$ *et de dimension* $n = 2m+1$ *dans l'espace projectif* $\mathbb{P}_{n+1}(\mathbb{C})$ *et*

$$\alpha = \sum_{i=1}^{2m+1} \alpha_i \in \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X,\mathbb{Q})$$

*une classe de cohomologie rationnelle. Alors* $\alpha$ *est le caractère de Chern* *d'un élément de* $\mathrm{K}^0(X)$ *si et seulement si :*

(i) *la classe de cohomologie satisfait à la condition* $S_k$ *de Schwarzenberger pour* $k = 1, \ldots, m$ ;

(ii) *les intégrales*

$$\frac{1}{d}\int_X \alpha \frac{h^{n+1}(1-\mathrm{e}^{-dh})}{(1-\mathrm{e}^{-h})^{n+2-k}}$$

*sont entières pour* $0 \leq k \leq m$.

*Démonstration.* — Remarquons d'abord que les conditions de Schwarzenberger ont un sens puisque la classe $\alpha$ est un polynôme en $h$ à coefficients rationnels, compte tenu de la description de l'algèbre de cohomologie de $X$. Comme au paragraphe 3.5, la classe de Todd de $X$ se calcule à partir de la suite exacte

$$0 \to T(X) \longrightarrow \mathcal{O}(1)^{n+2}{}_{|X} \longrightarrow \mathcal{O}_X(d) \to 0$$

et on obtient :

$$\mathrm{td}(X) = \frac{1}{d}\,\frac{h^{n+1}(1-\mathrm{e}^{-dh})}{(1-\mathrm{e}^{-h})^{n+2}}.$$

Soit $X^{(k)}$ l'intersection de $X$ avec un sous-espace linéaire de codimension $k$ en position générale. Le faisceau structural de $\mathcal{O}_{X^{(k)}}$ a alors pour caractère de Chern :

$$\mathrm{ch}(\mathcal{O}_{X^{(k)}}) = (1-\mathrm{e}^{-h})^k.$$

L'hypersurface $X$ est difféomorphe, par un difféomorphisme qui conserve la classe fondamentale $h$ de la section hyperplane, à l'hypersurface de Fermat. L'énoncé s'obtient alors en appliquant alors le Lemme 4.1 à la famille de sous-variétés de l'hypersurface de Fermat

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_m, X^{(m)}, \ldots, X^{(0)} = X,$$

constituée pour pour les $m$ premières par les sous-espaces linéaires, et pour les suivantes par les intersections complètes ci-dessus.

Corollaire 4.3. — *Soient* $X$ *une hypersurface de dimension impaire* $n = 2m+1$ *et* $c = (c_i)_{i=1,\ldots,n}$ *des classes de cohomologie entières sur* $X$. *On pose :*

$$\mathrm{ch}(c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(c_1, \ldots, c_n)}{i\,!}.$$

*Alors les classes $c_i$ sont les classes de Chern d'un élément d'un fibré vectoriel de rang $r \geq n$ sur $X$ si et seulement si* $\mathrm{ch}(c)$ *satisfait aux conditions* (i) *et* (ii) *du théorème* 4.2.

REMARQUE 4.4. — Les conditions $S_1$ et $S_2$ sont bien sûr automatiques, puisqu'elles portent sur la restriction de classes de cohomologie $c_1$ et $c_2$ à des courbes et des surfaces et que ces classes peuvent toujours être réalisées comme classes de Chern de fibrés vectoriels de rang $\geq 2$ d'après le théorème de Wu [13].

REMARQUE 4.5. — Si $d$ et $(m-1)!$ sont premiers entre eux, on peut remplacer dans le corollaire ci-dessus les conditions (i) et (ii) par les conditions

$$\frac{1}{d}\int_X \mathrm{ch}(c)\frac{h^{n+1}(1-\mathrm{e}^{-dh})}{(1-\mathrm{e}^{-h})^{n+2-k}} \in \mathbb{Z} \quad \text{pour } \ 0 \leq k \leq 2m-2.$$

En effet, il suffit d'appliquer à la famille de sous-variétés $X^{(k)}$, lorsque $k = 0, \ldots, 2m-3$, la variante suivante du LEMME 4.1 :

LEMME 4.6. — *Soit $X$ une variété analytique complexe compacte de dimension $n$, dont la cohomologie entière $\mathrm{H}(X,\mathbb{Z})$ est sans torsion. Supposons qu'il existe une famille $Y_j$ de sous-variétés fermées, lisses et connexes, telle que l'homomorphisme de restriction*

$$\mathrm{H}^{2p}(X,\mathbb{Z}_{(p-1)!}) \longrightarrow \prod_{j,\,\dim Y_j = p} \mathrm{H}^{2p}(Y_j,\mathbb{Z}_{(p-1)!})$$

*soit injectif. Soient $c \in 1 + \bigoplus_{i>0}\mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z})$ une classe de cohomologie entière paire et*

$$\mathrm{ch}(c) = \sum_i \frac{s_i(c_1,\ldots,c_n)}{i!}\cdot$$

*Alors $c$ est la classe de Chern d'un élément de $\mathrm{K}^0(X)$ si et seulement si pour tout $j$, l'intégrale*

$$\int_{Y_j} \mathrm{ch}(c)_{|Y_j}\,\mathrm{td}(Y_j)$$

*est entière.*

*Démonstration.* — On reprend la démonstration du LEMME 4.1, avec $\alpha = \mathrm{ch}(c)$. On peut écrire cette fois :

$$\alpha - \mathrm{ch}\, x_{p-1} = \mathrm{ch}\,\frac{c}{c(x_{p-1})}\cdot$$

Il en résulte que $\dfrac{c}{c(x_{p-1})} \in 1 + \bigoplus_{i\geq p} \mathrm{H}^{2i}(X,\mathbb{Z})$, et par suite

$$\alpha - \operatorname{ch} x_{p-1} = \frac{\zeta_p}{(p-1)\,!} + \textit{termes de degré supérieur,}$$

où $\zeta_p$ est une classe de cohomologie entière de degré $2p$. L'hypothèse sur $c$ signifie que la restriction de $\zeta_p$ aux sous-variétés $Y_j$ de dimension $p$ est divisible par $(p-1)\,!$. L'hypothèse portant sur les sous-variétés $Y_j$ implique que $\zeta_p$ est lui-même divisible par $(p-1)\,!$, ce qui permet d'achever la démonstration comme dans le LEMME 4.1. $\square$

**4.2. Hypersurfaces de dimension paire.** — Dans le cas des hypersurfaces de Fermat de dimension paire, la famille considérée ci-dessus n'est plus suffisante pour obtenir une caractérisation des classes de cohomologies rationnelles qui sont caractères de Chern d'un élément de $\mathrm{K}(X)$, car l'hypothèse du LEMME clé 4.1 n'est plus satisfaite. Ceci complique un peu l'énoncé :

THÉORÈME 4.7. — *Soient $X$ une hypersurface de dimension $n = 2m$ et $\alpha = \sum_{i\geq 1} \alpha_i \in \mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X,\mathbb{Q})$ une classe de cohomologie paire rationnelle. Alors $\alpha$ est le caractère de Chern d'un élément de $\mathrm{K}^0(X)$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *La classe de $\alpha$ dans le quotient $\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X,\mathbb{Q})/\,\mathrm{H}^{2m}(X,\mathbb{Z})$ peut se représenter par un polynôme en $h$ à coefficients rationnels satisfaisant aux conditions de Schwarzenberger $S_i$ pour $i = 1,\dots,m$.*

(ii) *Les intégrales*

$$\frac{1}{d}\int_X \alpha \frac{h^{n+1}(1-\mathrm{e}^{-dh})}{(1-\mathrm{e}^{-h})^{n+2-k}}$$

*sont entières pour $0 \leq k \leq m-1$.*

*Démonstration.* — On peut encore supposer que $X$ est l'hypersurface de Fermat. Montrons que les conditions sont nécessaires : supposons qu'il existe un élément $x \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que $\operatorname{ch} x = \alpha$. Considérons une section hyperplane générale $Y$ ; d'après MILNOR [9, § 9], l'ouvert $U = X - Y$ a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères de dimension $2m$. Alors $\operatorname{ch} x_{|U}$ est une classe de cohomologie entière de degré $2m$ de résidu nul dans $\mathrm{H}^{2m-1}(Y)$ ; dans la suite exacte en cohomologie entière

$$0 \to \mathrm{H}^{2m-2}(Y) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m}(X) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m}(U) \xrightarrow{\ \mathrm{Res}\ } \mathrm{H}^{2m-1}(Y) \to 0,$$

le sous-groupe image de $\mathrm{H}^{2m-2}(Y)$ est le sous-groupe engendré par $h^m$. Ainsi, $\alpha_m = \rho h^m + \beta$ avec $\beta \in \mathrm{H}^{2m}(X,\mathbb{Z})$. Il existe alors $y \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que $\operatorname{ch} y = \beta +$ termes de degré supérieur. Alors $\alpha - \operatorname{ch} y$ est un polynôme en $h$ qui est le caractère de Chern d'un élément de $\mathrm{K}^0(X)$. Si on restreint cette classe de cohomologie aux sous-espaces linéaires $\mathbb{P}_k$, avec $1 \leq k \leq m$, on obtient pour cette classe les conditions de Schwarzenberger $S_k$ et donc aussi pour la classe $\alpha - \beta$ puisque ces classes coïncident jusqu'en degré $2m$. Ceci fournit la condition (i). La condition (ii) résulte directement du théorème de l'indice appliqué aux intersections $X^{(k)}$.

Montrons la réciproque. Comme dans la démonstration du LEMME 4.1 on construit par récurrence une suite $x_p \in \mathrm{K}^0(X)$ telle que

$$\alpha - \operatorname{ch} x_p \in F_{p+1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)$$

en utilisant les conditions (i) et (ii) et la famille de sous-variétés $Y_j$ définie par :

$$\mathbb{P}_1, \ldots, \mathbb{P}_m, X^{(m-1)}, \ldots, X^{(0)} = X.$$

Le morphisme de restriction

$$\mathrm{H}^{2p}(X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{j,\, \dim Y_j = p} \mathrm{H}^{2p}(Y_j, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est encore injectif, sauf pour $p = m$. Ainsi, on doit montrer que les hypothèses rendent possible la construction de $x_m$ à partir de $x_{m-1}$. Par linéarité, $\alpha - \operatorname{ch} x_{m-1}$ satisfait bien sûr aux conditions (i) et (ii). On peut donc écrire

$$\alpha - \operatorname{ch} x_{m-1} = \rho h^m + \beta_m + \sum_{i>m} \beta_i$$

où $\rho \in \mathbb{Q}$ , $\beta_m \in \mathrm{H}^{2m}(X, \mathbb{Z})$, $\beta_i \in \mathrm{H}^{2i}(X, \mathbb{Q})$ et où le polynôme en $h$ défini par $\rho h^m + \sum_{i>m} \beta_i$ satisfait à la condition $S_m$ : cette condition montre que $\rho$ doit être entier. Par suite, il existe $y_m \in \mathrm{K}^0(X)$ tel que :

$$\operatorname{ch} y_m = \rho h^m + \beta_m \pmod{F_{m+1}\,\mathrm{H}^{\mathrm{pair}}(X)}.$$

L'élément $x_m := x_{m-1} + y_m$ convient. Bien sûr, les conditions (ii) permettent comme dans la preuve du LEMME 4.1 de poursuivre la construction de la suite $x_p$. $\square$

COROLLAIRE 4.8. — *Soient $X$ une hypersurface de dimension $n = 2m$ et $c = (c_i)_{i=1,\ldots,n}$ des classes de cohomologie entières sur $X$. On pose :*

$$\operatorname{ch}(c) = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i(c_1, \ldots, c_n)}{i!}.$$

*Alors les classes $c_i$ sont les classes de Chern d'un fibré vectoriel de rang $r \geq n$ sur $X$ si et seulement si* $\mathrm{ch}(c)$ *satisfait aux conditions* (i) *et* (ii) *de la proposition* 4.7.

REMARQUE 4.9. — La condition (i) dans le corollaire ci-dessus signifie que dans $\mathrm{H}^{2m}(X, \mathbb{Z})$ on a une décomposition $c_m = c'_m + c''_m$, où $c'_m$ et $c''_m$ satisfont aux propriétés suivantes : $c'_m$ est un multiple de $h^m$ ; $c''_m$ est divisible par $(m-1)\,!$; le polynôme $\mathrm{ch}\, c' \in \mathbb{Q}[h]$ associé à la classe de cohomologie entière $c' := 1 + \sum_{1 \leq i < m} c_i + c'_m$ satisfait aux conditions de Schwarzenberger $S_i$ pour $2 < i \leq m$.

REMARQUE 4.10. — Si $d$ et $(m-1)\,!$ sont premiers entre eux, on peut remplacer dans le corollaire ci-dessus les conditions (i) et (ii) par les conditions suivantes :

(i)$'$ La classe $c_m$ est somme d'un multiple de $h^m$ et d'une classe de cohomologie divisible par $(m-1)\,!$.

$$\text{(ii)}' \quad \frac{1}{d} \int_X \mathrm{ch}(c) \frac{h^{n+1}(1 - \mathrm{e}^{-dh})}{(1 - \mathrm{e}^{-h})^{n+2-k}} \in \mathbb{Z} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq 2m-2.$$

Ces conditions sont nécessaires : pour la condition (i)$'$, c'est le théorème de l'indice (cf. [9, th. 24.5.2]) appliqué aux sphères $S_{2m}$ figurant dans le bouquet qui est rétracte de $X - Y$ ; pour la condition (ii)$'$, c'est le théorème de l'indice appliqué aux sous-variétés complexes $X^{(k)}$ intersection de $X$ avec un sous-espace linéaire général de codimension $k$. Pour la réciproque, il suffit d'appliquer à la famille de sous-variétés $X^{(k)}, k = 0, \ldots, 2m-1$, auquel on ajoute la sous-variété ouverte $U = X - Y$, la variante 4.6 du LEMME 4.1 : comme dans la PROPOSITION 4.7 la seule difficulté dans la construction de la suite $x_p$ se situe au niveau $p = m$. Reprenons à ce niveau la démonstration de la variante 4.6 du LEMME clé 4.1 : on pose $\alpha = \mathrm{ch}\, c$; on a encore :

$$\alpha - \mathrm{ch}\, x_{m-1} = \mathrm{ch}\, \frac{c}{c(x_{m-1})}$$

et par suite $\dfrac{c}{c(x_{m-1})} \in 1 + \bigoplus_{i \geq m} \mathrm{H}^{2i}(X, \mathbb{Z})$ ; il en résulte

$$\alpha - \mathrm{ch}\, x_{m-1} = \frac{\zeta_m}{(m-1)\,!} + \textit{termes de degré supérieur},$$

où $\zeta_m$ est une classe de cohomologie entière de degré $2p$. L'hypothèse (ii)$'$ sur $c$ implique que la restriction de $\zeta_m$ aux intersections génériques $X^{(m)}$ est divisible par $(m-1)\,!$. Il en est de même de la restriction à l'ouvert

$U = X - Y$ d'après l'hypothèse (i)'. Maintenant, vu l'hypothèse sur $d$, le morphisme canonique

$$\mathrm{H}^{2m}\big(X, \mathbb{Z}_{(m-1)\,!}\big) \longrightarrow \mathrm{H}^{2m}\big(X^{(m)}, \mathbb{Z}_{(m-1)\,!}\big) \oplus \mathrm{H}^{2m}\big(U, \mathbb{Z}_{(m-1)\,!}\big)$$

est injectif. Il en résulte que la classe $\zeta_m$ est elle-même divisible par $(m-1)\,!$, ce qui permet d'achever la construction de $x_m$ comme dans le LEMME 4.6.

## BIBLIOGRAPHIE


[1] ATIYAH (M.-F.) and HIRZEBRUCH (F.). — *Vector bundles and homogeneous spaces*, Symp. Math. AMS, 1961, p. 7–38.

[2] BANICA (C.) and PUTINAR (M.). — *On the classification of complex vector bundles of stable rank*, Preprint, 1991.

[3] DELIGNE (P.) et KATZ (N.). — *Groupes de monodromie en géométrie algébrique*, SGA 7, Lect. Notes in Math., **340**, Springer, 1973.

[4] DEMAZURE (M.). — *Désingularisation des variétés de Schubert généralisées*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **7**, 1974, p. 53–88.

[5] GRIFFITHS (P.) and ADAMS (J.). — *Topics in algebraic and analytic geometry.* — Princeton University Press, 1974.

[6] HIRZEBRUCH (F.). — *Topological methods in Algebraic Geometry.* — Springer-Verlag, 1966.

[7] HUSEMOLLER (D.). — *Fibre bundles.* — Springer-Verlag, 1974.

[8] LE POTIER (J.). — *Séminaire de géométrie algébrique*, Jussieu, Exposé du 18 novembre 1988.

[9] MILNOR (J.). — *Singular Points of complex hypersurfaces*, Annals of Mathematical Studies, Princeton University Press, 1968.

[10] SCHWARZENBERGER (R.L.E.). — *Topological methods in algebraic geometry, Appendice One.* — Springer-Verlag, New York, 1966.

[11] SERRE (J.-P.). — *Cours d'arithmétique.* — PUF, 1970.

[12] SPANIER (E.H.). — *Algebraic topology*, McGraw–Hill series in higher mathematics, 1966.

[13] WU WEN-TSÜN. — *Sur les espaces fibrés.* — Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, t. **11**, 1952.