BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI GAUDIER

Algèbres de groupe du groupe additif

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 2 (1989), p. 233-245

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_2_233_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 233–245.

ALGÈBRES DE GROUPE DU GROUPE ADDITIF

PAR

HENRI GAUDIER (*)

RÉSUMÉ. — Soit k un corps parfait de caractéristique positive, soient α le groupe additif et W l'anneau des vecteurs de Witt. Nous calculons l'algèbre de groupe et la W-algèbre de groupe de α au sens des k-schémas affines. Le résultat obtenu est ensuite étendu au cas sans caractéristique : nous obtenons alors une algèbre de puissances fractionnaires divisées sur l'anneau des gros vecteurs de Witt.

ABSTRACT. — Let k be a perfect field of positive characteristic, let α be the additive group and let W be the Witt vector ring. We compute the group algebra and the group W-algebra of α in the sense of affine schemes. The calculation is next extended to the caracteristic-free case. We so obtain a $\mathbf{W}$-algebra with fractional divided powers, where $\mathbf{W}$ denote the ring of the big Witt vectors.

Soit $\mathbf{k}$ un corps parfait de caractéristique p non nulle, $\mathbf{W}$ le schéma en anneaux des gros vecteurs de Witt, et W le schéma en anneaux des p-vecteurs de Witt. On sait ([G2]) que le foncteur oubli qui à un $\mathbf{k}$-schéma en anneaux A associe son monoïde multiplicatif $A^{\times}$, admet un adjoint à gauche qui à un $\mathbf{k}$-monoïde X associe son algèbre de monoïde LX. De plus la catégorie des représentations de X dans un groupe unipotent commutatif est équivalente à la catégorie des LX-modules.

Le but de cet article est de déterminer explicitement l'algèbre de groupe $L\alpha$ du groupe additif α. On obtiendra ainsi une équivalence entre représentations de α et $L\alpha$-modules. On détermine également la structure de l'anneau $W\alpha = L\alpha \otimes W$ (où le produit tensoriel est pris au sens des schémas en anneaux [G1]), ce qui donne une équivalence entre représentations W-linéaires de α et $W\alpha$-modules. L'anneau $W\alpha$ obtenu peut être considéré comme l'algèbre des puissances divisées en une variable sur W avec des puissances fractionnaires à dénominateurs les puissances de p.

(*) Texte reçu le 10 décembre 1987 , révisé le 15 mars 1988.
Henri GAUDIER, Université Louis Pasteur, IRMA, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.
Adresse actuelle : Département de mathématiques, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, Le Mont Houy, 59326 Valenciennes Cedex, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/1989/233/$ 5.00

Dans la première partie de l'article on définit les coefficients $*$-binômiaux : ce sont des éléments de $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$ qui ont un comportement analogue à celui des coefficients binômiaux et qui interviennent comme constantes de la multiplication dans $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans les parties 2 et 3, on détermine les multiplications respectives de $L\alpha$ et $W\alpha$. Dans la quatrième partie on construit, hors caractéristique, un anneau $\mathbf{W}\alpha$ qui étend l'anneau $W\alpha$ et qui peut être considéré comme la $\mathbf{W}$-algèbre des puissances divisées en une variable avec des puissances fractionnaires quelconques.

Notations. — Soit $\mathbf{k}$ l'anneau de base, qu'on commencera par supposer quelconque. On considère le triangle commutatif de $\mathbf{k}$-foncteurs en anneaux ([D.G. p. 639], [H p. 121]) :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{W} \arrow[r, "e"] \arrow[dr, "w"'] & \Lambda \arrow[d, "\partial"] \\ & \mathcal{O}_{\mathbf{k}}^{\mathbb{N}} \end{tikzcd}$$

où $\mathbf{W}$ est l'anneau des gros vecteurs de Witt, Λ est le λ-anneau universel, $\mathcal{O}_{\mathbf{k}}$ est le foncteur identité, e est l'isomorphisme d'anneaux défini par :

$$e(x_1, ..., x_n, ...) = \prod_{i \geq 1} \left(1 - x_i T^i\right)^{-1},$$

où w est donné par :

$$w_n(x_1, ..., x_n, ...) = \sum_{d|n} d\, x_d^{n/d},$$

et où $\partial_n(S)$ est le coefficient de T^{n-1} dans la série $\dfrac{d \log S}{dT}$. On sait que w et ∂ sont des isomorphismes si $\mathbf{k}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre, par conséquent $\mathbf{W}(R)$ est isomorphe à $R^{\mathbb{N}}$ pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R.

On notera V_l (resp. F_l) les morphismes de décalage (resp. de Frobenius) de $\mathbf{W}$ ou Λ, et σ le morphisme de Teichmuller $\mathcal{O}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{W}$ défini par $\sigma(x) = (x, 0, \ldots, 0, \ldots)$, on sait que $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$. Enfin si i et j sont des entiers on notera $(\!(i,j)\!)$ le coefficient binômial $\binom{i+j}{i}$.

1. Coefficients $*$-binômiaux et p-binômiaux

1.1. *Définition.* — Soient i et j deux entiers naturels, on appelle *coefficient $*$-binômial* $^*\!(\!(i,j)\!)$ l'unique élément de $\mathbf{W}(\mathbb{Q})$ tel qu'on ait pour tout n : $w_n(^*\!(\!(i,j)\!)\,) = (\!(ni,nj)\!)$. Si l est un entier non nul on posera également $^*\!(\!(i,j;l)\!) = {}^*\!(\!(i,j)\!)/l$.

Dans la première partie de ce travail nous allons étudier ces coefficients $*$-binômiaux et, en particulier, montrer qu'ils sont à composantes entières.

1.2. PROPOSITION. — *Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on a les identités suivantes :*

(a) *dans* $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X,Y])$

$$\sigma\big((X+Y)^k\big) = \sum_{l\geq 1} \sum_{\substack{i+j=lk\\(i,j,l)=1}} V_l\big(\,^*\!(\!(i,j;l)\!)\,\sigma(X^iY^j)\,\big); \tag{1.2.1}$$

(b) *dans* $\Lambda(\mathbb{Q}[X,Y])$

$$\big(1-(X+Y)^kT\big)^{-1} = \prod_{\substack{r\geq 1\\ l\geq 1}} \prod_{\substack{i+j=lk\\(i,j,l)=1}} \big(1-{}^*\!(\!(i,j;l)\!)_r\, X^{ri}Y^{rj}T^{rl}\big)^{-1}. \tag{1.2.2}$$

où les $^*\!(\!(i,j;l)\!)_r$ sont les composantes de $^*\!(\!(i,j;l)\!)$.

Puisque l'on est en caractéristique 0, il suffit de transformer les deux membres par w. Or si on désigne par D le membre de droite de (1.2.1), on a :

$$\begin{aligned} w_n(D) &= \sum_{l\in\mathbb{N}^*}\sum_{i,j} w_nV_l\big(l^{-1}\,{}^*\!(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big),\\ &= \sum_{l\mid n}\sum_{i,j} w_{n/l}\big(^*\!(\!(i,j)\!)\,\sigma(X^iY^j)\big),\end{aligned}$$

puisque w_nV_l est égal à $l\,w_{n/l}$, si l divise n, et est nul sinon,

$$\begin{aligned} &= \sum_{l\mid n}\sum_{i,j} w_{n/l}\big(^*\!(\!(i,j)\!)\big)w_{n/l}\big(\sigma(X^iY^j)\big),\\ &= \sum_{l\mid n}\sum_{i,j} (\!(ni/l,nj/l)\!)\,X^{ni/l}Y^{nj/l},\\ &= \sum_{ld=n}\sum_{\substack{i+j=lk\\(i,j,l)=1}} (\!(di,dj)\!)\,X^{di}Y^{dj},\\ &= \sum_{d\mid n}\sum_{\substack{di+dj=nk\\(di,dj,n)=d}} (\!(di,dj)\!)\,X^{di}Y^{dj},\\ &= (X+Y)^{nk} = w_n\big(\sigma(X+Y)^k\big).\end{aligned}$$

Ce qui démontre la relation (1.2.1). La relation (1.2.2) n'en est que la traduction par l'isomorphisme e.

1.3. COROLLAIRE. — *Si l divise $i+j$ et si l, i et j sont premiers entre eux, le coefficient* $^*(\!(i,j;l)\!)$ *appartient à* $\mathbf{W}(\mathbb{Z})$, *et la relation* (1.2.1) (*resp.* (1.2.2)) *est vraie dans* $\mathbf{W}(\mathbb{Z}[X,Y])$ (*resp.* $\Lambda(\mathbb{Z}[X,Y])$).

Il est facile de voir que pour tout entier n on a une décomposition

$$1-(X+Y)^kT=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j}(1-M_{i,j}T^i)\qquad(\mathrm{mod}\ T^{n+1}),$$

où les $M_{i,j}$ sont des monômes de degré total ki. Si l'on impose de plus que les monômes aient des degrés en X et Y distincts, alors une telle décomposition est unique dans $\mathbb{Q}$ comme dans $\mathbb{Z}$. Passant à la limite sur n, on constate alors que cette décomposition est donnée par la formule (1.2.2), et que les coefficients de cette dernière sont donc dans $\mathbb{Z}$.

1.4. **Coefficients $*$-multinômiaux.** — Il est clair que la définition (1.1) peut s'étendre aux coefficients multinômiaux : si $i_1,\dots,i_h$ sont des entiers et l un entier non nul, alors le coefficient $*$-multinômial $^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)$ est défini par :

$$w_n\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\big)=l^{-1}\,(\!(ni_1,\dots,ni_h)\!).$$

Comme pour les coefficients binômiaux on a les formules :

$$(1.4.1)\quad \sigma(X_1+\dots+X_h)^k=\sum_{\substack{i_1+\dots+i_h=lk\\(i_1,\dots,i_h,l)=1}}V_l\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\,\sigma(X_1^{i_1}\dots X_h^{i_h})\big),$$

dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_h])$, et

$$(1.4.2)\qquad \big(1-(X_1+\dots+X_h)^kT\big)^{-1}=\prod_{\substack{r\ge1\\ l\ge1}}\ \prod_{\substack{i_1+\dots+i_h=lk\\(i_1,\dots,i_h,l)=1}}\big(1-{}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)_r\,X_1^{ri_1}\dots X_h^{ri_h}T^{rl}\big)^{-1}.$$

dans $\Lambda(\mathbb{Q}[X_1,\dots,X_h])$.

Et par le même raisonnement on conclut que les coefficients $*$-multinômiaux sont à composantes entières si $(i_1,\dots,i_k,l)=1$ et si l divise $\sum_{\alpha=1}^{h}i_\alpha$.

On appellera enfin $*$-factorielle, et on désignera par $^*h\,!$ le coefficient $*$-multinômial dans lequel $i_1=\ldots=i_h=l=1$.

1.5. PROPOSITION. — *Les coefficients $*$-multinômiaux vérifient les relations suivantes :*

$$l\,{}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!) = {}^*(\!(i_1,\dots,i_h)\!), \tag{1.5.1}$$

$$F_k{}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!) = {}^*(\!(ki_1,\dots,ki_h;l)\!), \tag{1.5.2}$$

$${}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!) = \frac{1}{l}\,\frac{{}^*(i_1+\cdots+i_h)!}{{}^*i_1\,!\dots{}^*i_h\,!}, \tag{1.5.3}$$

$$F_k({}^*h\,!) = \frac{{}^*hk\,!}{({}^*k\,!)^h}, \tag{1.5.4}$$

où F_k est le morphisme de Frobenius.

La relation (1.5.1) découle immédiatement de la définition. Pour la relation (1.5.2) on a :

$$\begin{aligned} &w_m\circ F_k\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\big) = w_{mk}\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h;l)\!)\big)\\ &= l^{-1}\,(\!(mki_1,\dots,mki_h)\!) = w_m\big({}^*(\!(ki_1,\dots,ki_h;l)\!)\big).\end{aligned}$$

Pour la relation (1.5.3), puisque :

$$w_m({}^*i!\,) = \frac{(mi)!}{m!^i},$$

on a :

$$\begin{aligned} w_m\left(\frac{{}^*(i_1+\cdots+i_h)\,!}{{}^*i_1!\dots{}^*i_h\,!}\right) &= \frac{(mi_1+\cdots+mi_h)\,!}{m\,!^{i_1+\cdots+i_h}}\times\frac{m\,!^{i_1}\dots m\,!^{i_h}}{(mi_1)\,!\dots(mi_h)\,!}\\ &= w_m\big({}^*(\!(i_1,\dots,i_h)\!)\big).\end{aligned}$$

La relation (1.5.4) se déduit des précédentes.

1.6. COROLLAIRE. — *Pour tout $n\in N^*$ on a :*

$${}^*n\,! = \prod_{i=1}^{n}{}^*(\!(i-1,1)\!),$$

et ${}^*n\,!$ est divisible par $n!$.

La première relation est une conséquence immédiate de (1.5.3). Et puisque ${}^*(\!(i-1,1)\!) = i\,{}^*(\!(i-1,1;i)\!)$ on a :

$${}^*n\,! = n\,!\prod_{i=1}^{n}{}^*(\!(i-1,1;i)\!).$$

On remarquera que la première composante de ${}^*n\,!/n\,!$ est égale à 1.

1.7. **Coefficients p-binômiaux et p-multinômiaux.** — Soit maintenant p un nombre premier, W l'anneau des p-vecteurs de Witt et V (resp. F) le décalage (resp. le Frobenius) dans W. Le morphisme $\pi : \mathbf{W} \to W$ tel que :

$$\pi\big(w_1, \ldots, w_n, \ldots\big) = \big(w_1, w_p, \ldots, w_{p^n}, \ldots\big),$$

est un homomorphisme d'anneaux. Il transforme donc la formule (1.2.1) en :

$$\pi \circ \sigma(X+Y)^k = \sum{}' \pi \circ V_l\big({}^*(\!(i,j;l)\!)\, \sigma(X^iY^j)\big).$$

Posant alors $\tau = \pi \circ \sigma$ on obtient, puisque $\pi \circ V_l = V^s \circ \pi$ si $l = p^s$ et est nul sinon,

$$\tau(X+Y)^k = \sum{}^+ V^s\big(\pi\big[{}^*(\!(i,j;p^s)\!)\big]\, \tau(X^iY^j)\big),$$

où la somme $\sum^+$ est étendue à tous les indices i, j et s tels que $i+j = p^s k$ et $s = 0$ ou $(i,j,p) = 1$. On en déduit alors :

COROLLAIRE. — *Appelons coefficients p-binômiaux les p-vecteurs de Witt ${}^p(\!(i,j;s)\!) = \pi\big[{}^*(\!(i,j;p^s)\!)\big]$, et soit k un entier premier à p. Dans $W(\mathbb{Z}[X,Y])$, on a la relation :*

$$\tau(X+Y)^k = \sum{}'' V^s\big[{}^p(\!(i,j;s)\!)\, \tau(X^iY^j)\big], \tag{1.7.1}$$

où la somme $\sum$ est étendue à tous les indices i, j et s tels que $i+j = p^s k$ et $(i,j,p) = 1$.

Si l'on définit les p-factorielles par ${}^p i! = \pi({}^* i!)$, on vérifie sans difficulté que les résultats de (1.5) et (1.6) restent valables quand on remplace les coefficients $*$-binômiaux par les coefficients p-binômiaux et les $*$-factorielles par les p-factorielles. Si $s = 0$ on écrira également ${}^p(\!(i,j)\!)$ au lieu de ${}^p(\!(i,j;0)\!)$.

2. L'anneau de groupe du groupe additif

2.1. PROPOSITION. — *Il existe sur le groupe Λ une unique opération bilinéaire notée $\star$ telle que :*

$$\frac{1}{1-XT} \star \frac{1}{1-YT} = \frac{(1-XT)(1-YT)}{1-(X+Y)T}. \tag{2.1.1}$$

Cette opération est associative.

En effet le morphisme $\rho : \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \times \mathcal{O}_{\mathbf{k}} \to \Lambda$ défini par :

$$\rho(a,b) = \frac{(1-aT)(1-bT)}{1-(a+b)T}$$

vaut 1 si a ou b est nul; il se prolonge donc de façon unique en une opération bilinéaire sur Λ ([D.G. p. 631]).

En utilisant la formule (1.2.2) on obtient alors :

$$\begin{aligned}(2.1.2)\quad & \frac{1}{1-XT} \star \frac{1}{1-YT} \\ &= \prod_{r>0} \prod_{\substack{i,j>0 \\ (i,j,i+j)=1}} \frac{1}{1 - {}^{*}((i,j;i+j))_r\, X^{ri} Y^{rj} T^{r(i+j)}}.\end{aligned}$$

2.2. — Soit maintenant $\mathbb{P}$ l'anneau local de $\mathbb{Z}$ en l'idéal $p\mathbb{Z}$. Supposons que $\mathbf{k}$ est une $\mathbb{P}$-algèbre.

Le groupe Λ admet alors une décomposition $\Lambda = W^{\mathbb{N}_p}$ ([D.G. p. 641]) telle que l'image de $(1-XT)^{-1}$ est $\sum_{i\in\mathbb{N}_p} \tau(X^i)e_i$ ([G2]), où $\mathbb{N}_p$ désigne l'ensemble des entiers premiers à p, et (e_i) la base (topologique) canonique de $W^{\mathbb{N}_p}$. L'opération $\star$ de Λ se transporte en une opération notée également $\star$.

PROPOSITION. — *Soient i et j deux entiers dans $\mathbb{N}_p$, et w et w' dans W. Dans $W^{\mathbb{N}_p}$ on a :*

$$(2.2.1)\qquad we_i \star w'e_j = \sum_{k\in\mathbb{N}_p} \Big({\sum}' V^s \big[{}^{p}((ip^t, jp^u; s)) F^t(w) F^u(w')\big] \Big) e_k,$$

où la somme $\sum'$ est étendue aux entiers s, t et u tels que $ip^t + jp^u = kp^s$ et $\inf(s,t,u) = 0$.

Dans la décomposition $\Lambda = \mathbf{W}^{\mathbb{N}_p}$, la relation (2.1.1) s'écrit :

$$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}_p} \tau(X^i)e_i\Big) \star \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}_p} \tau(Y^j)e_j\Big) = \sum_{k\in\mathbb{N}_p} \tau(X+Y)^k e_k - \sum_{i\in\mathbb{N}_p} \tau(X^i)e_i - \sum_{j\in\mathbb{N}_p} \tau(Y^j)e_j.$$

En utilisant (1.7.1), cette relation devient :

$$\Big(\sum_{i\in\mathbb{N}_p}\tau(X^i)e_i\Big)\star\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}_p}\tau(Y^j)e_j\Big)=$$
$$\sum_{k\in\mathbb{N}_p}\Big(\sum_{\substack{i'+j'=kp^s\\(i',j',p)=1}} V^s\big[{}^p((i',j';s))\,\tau(X^{i'})\tau(Y^{j'})\big]\Big)e_k$$
$$-\sum_{i\in\mathbb{N}_p}\tau(X^i)e_i-\sum_{j\in\mathbb{N}_p}\tau(Y^j)e_j.$$

On vérifie facilement que les termes à retrancher sont ceux qui correspondent à i' ou j' nul. Compte tenu de l'unicité de l'opération $\star$ montrée en (2.1), il suffit de vérifier que, si l'on utilise la formule (2.2.1) pour calculer $\big(\sum_{i\in\mathbb{N}_p}\tau(X^i)e_i\big)\star\big(\sum_{j\in\mathbb{N}_p}\tau(Y^j)e_j\big)$, on obtient le même résultat que ci-dessus. Cette vérification est simple.

2.3. — Supposons maintenant que $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique p. On sait que le groupe unipotent libre engendré par la droite affine est $\mathbf{Z}_p\times\Lambda$ ([G2]), avec l'immersion canonique $x\mapsto\big(1,1/(1-xT)\big)$. Par conséquent il existe sur $\mathbf{Z}_p\times\Lambda$ une unique structure d'anneau qui en fait l'anneau de groupe du groupe additif, c'est à dire que l'on a :

$$\Big(1,\frac{1}{1-xT}\Big)\star\Big(1,\frac{1}{1-yT}\Big)=\Big(1,\frac{1}{1-(x+y)T}\Big)\cdot$$

L'élément unité est $e_0=(1,1)$, et en décomposant $\big(1,1/(1-xT)\big)$ en $e_0+\big(0,1/(1-xT)\big)$, on obtient :

$$\Big(0,\frac{1}{1-xT}\Big)\star\Big(0,\frac{1}{1-yT}\Big)=\Big(0,\frac{(1-xT)(1-yT)}{1-(x+y)T}\Big)\cdot$$

On a donc démontré :

COROLLAIRE. — *L'algèbre de groupe du groupe additif est le groupe* $L\alpha=\mathbf{Z}_p\times\prod_{i\in\mathbb{N}_p}W$ *muni de la multiplication définie par la formule* (2.2.1) *et par*

(2.3.1) $\qquad ne_0\star n'e_0=nn'e_0\quad$ et $\quad ne_0\star we_i=nwe_i.$

2.4. *Remarques.*

1) Dans la PROPOSITION (2.2) les conditions sur s, t et u entraînent que deux d'entre eux sont nuls. La formule (2.2.1) peut donc s'écrire :

$$(2.4.1)\qquad \begin{aligned} we_i \star w'e_j &= \sum_{t>0} {}^p\!(\!(ip^t, j)\!)\, F^t(w)w'\, e_{ip^t+j} \\ &\quad + \sum_{u>0} {}^p\!(\!(i, jp^u)\!)\, wF^u(w')\, e_{i+jp^u} + V^s[{}^p\!(\!(i,j;s)\!)ww']\, e_{(i+j)p^{-s}}, \end{aligned}$$

où s est la valuation p-adique de $i+j$.

2) Désignons par $c_{i,j,k}(w,w')$ le coefficient de e_k dans $we_i \star w'e_j$. En utilisant (1.5.1), on obtient :

$$(2.4.2)\qquad \begin{aligned} &F^s\big(c_{i,j,k}(w,w')\big) = {}^p\!(\!(ip^t, jp^u)\!)\, F^t(w)F^u(w'), \quad \text{si } kp^s = ip^t + jp^u \\ &c_{i,j,k}(w,w') = 0 \qquad \text{sinon.} \end{aligned}$$

3. La W-algèbre du groupe additif

On suppose toujours que $\mathbf{k}$ est un corps de caractéristique p. Si M est un groupe affine commutatif, on sait qu'il est équivalent de se donner une opération du groupe additif sur M ou de se donner une structure de $L\alpha$-module ([G2]). Si maintenant M est un W-module affine, il est équivalent de se donner une opération W-linéaire du groupe additif ou de se donner une structure de $L\alpha$-module compatible avec la structure de W-module et donc d'après ([G1]) une structure de $W\otimes L\alpha$-module. Le but de cette partie est de donner une expression simple de cette W-algèbre.

3.1. LEMME. — *Le morphisme de groupe $W \otimes L\alpha \to W^{\mathbb{N}[1/p]}$ défini par*

$$(3.1.1)\qquad \begin{aligned} &w \otimes \Big(ne_0 + \sum_{i\in\mathbb{N}_p} w_i e_i\Big) \\ &\qquad\longmapsto nwf_0 + \sum_{j\in\mathbb{N}[1/p]^*} F^{v(j)_-}(w) F^{v(j)_+}\big(w_{jp^{-v(j)}}\big) f_j \end{aligned}$$

est un isomorphisme. On note (f_j) la base canonique de $W^{\mathbb{N}[1/p]}$, si $j \in \mathbb{N}[1/p]^*$, $v(j)$ désigne sa valuation p-adique, et si $n \in \mathbb{Z}$ on pose $n_+ = \sup(n,0)$ et $n_- = \sup(-n,0)$.

En effet on a un isomorphisme $W \otimes W \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{Z}}$ par conséquent $W \otimes W^{\mathbb{N}_p} \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}_p}$. Et la bijection $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{N}[1/p]^*$ définie par

$(n,i) \mapsto ip^n$ donne un isomorphisme $W \otimes W^{\mathbb{N}_p} \xrightarrow{\sim} W^{\mathbb{N}[1/p]^*}$ dont on vérifie aisément qu'il est donné par (3.1.1).

3.2. THÉORÈME. — *Soit $W\alpha = W^{\mathbb{N}[1/p]}$ la W-algèbre de groupe du groupe additif. Si i et j sont dans $\mathbb{N}[1/p]$, posons $[i] = v_p(i)_-$, $[i,j] = \sup([i],[j])$ et $\delta(i,j) = [i,j] - [i+j]$. Alors la multiplication dans $W\alpha$ est donnée par :*

$$(3.2.1) \quad xf_i \star yf_j = V^{\delta(i,j)}\Big[{}^p\!\big(\!\big(ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i,j)\big)\!\big)F^{[i,j]-[i]}(x)F^{[i,j]-[j]}(y)\Big]f_{i+j}.$$

En raison de l'unicité de l'algèbre de groupe et du lemme (3.1), on sait qu'il existe une unique multiplication sur $W\alpha$ telle que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} W & \longrightarrow & W \otimes L\alpha & \longrightarrow & W\alpha \\ w & \longmapsto & w \otimes 1 & \longmapsto & wf_0 \end{array}$$

soit un morphisme d'anneau et que le morphisme composé

$$\begin{array}{ccccc} \alpha & \longrightarrow & W \otimes L\alpha & \longrightarrow & W\alpha \\ x & \longmapsto & 1 \otimes (e_0 + \sum_{i\in\mathbb{N}_p} \tau x^i e_i) & \longmapsto & \sum_{i\in\mathbb{N}[1/p]} \tau x^{ip^{[i]}} f_i \end{array}$$

transforme l'addition de α en la multiplication de $W\alpha$. Il suffit donc de vérifier que la multiplication donnée par (3.2.1) vérifie ces deux propriétés. Pour la première c'est évident. Pour la seconde on doit vérifier que :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}[1/p]} \tau(x+y)^{kp^{[k]}} f_k = \Big(\sum_{i\in\mathbb{N}[1/p]} \tau x^{ip^{[i]}} f_i\Big) \star \Big(\sum_{j\in\mathbb{N}[1/p]} \tau y^{jp^{[j]}} f_j\Big).$$

On doit donc avoir pour tout k :

$$\tau(x+y)^{kp^{[k]}} = \sum_{i+j=k} V^{\delta(i,j)}\Big[{}^p\!\big(\!\big(ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i,j)\big)\!\big)F^{[i,j]-[i]}(\tau x^{ip^{[i]}})F^{[i,j]-[j]}(\tau y^{jp^{[j]}})\Big]f_k.$$

Calculons alors la composante fantôme Φ_m :

$$\begin{aligned}(x+y)^{kp^{[k]+m}} &= \sum_{i+j=k} \Phi_m V^{\delta(i,j)}\Big[{}^p\!\big(\!\big(ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i,j)\big)\!\big)\, \tau x^{ip^{[i,j]}} \tau y^{jp^{[i,j]}}\Big] \\ &= \sum_{\substack{i+j=k \\ \delta(i,j)\le m}} \Phi_{m-\delta(i,j)}\Big[{}^p\!\big(\!\big(ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}\big)\!\big)\, \tau x^{ip^{[i,j]}} \tau y^{jp^{[i,j]}}\Big] \\ &= \sum_{\substack{i+j=k \\ \delta(i,j)\le m}} \big(\!\big(ip^{m+[k]}, jp^{m+[k]}\big)\!\big)\, x^{ip^{m+[k]}} y^{jp^{m+[k]}}.\end{aligned}$$

Il suffit alors de voir que l'on a simplement la formule du binôme pour achever la démonstration.

3.3. *Remarque.* — Il résulte du théorème que l'on a quelques soient i et j dans $\mathbb{N}[1/p]$:

$$(3.3.1)\quad F^{[i]}(x)f_i \star F^{[j]}(y)f_j = V^{\delta(i,j)}\Big[{}^{p}\!\big(\!\big(ip^{[i,j]}, jp^{[i,j]}; \delta(i,j)\big)\!\big)\Big] F^{[i+j]}(xy)\, f_{i+j}.$$

3.4. COROLLAIRE. — *La sous-algèbre $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} Wf_i$ de $W\alpha$ est isomorphe à l'algèbre des puissances divisées en une variable sur W.*

En effet si i et j sont entiers, on a en utilisant (3.2.1) et (1.5.3) :

$$({}^{p}i\,!\,f_i) \star ({}^{p}j\,!\,f_j) = {}^{p}\!\big(\!\big(i,j\big)\!\big)\,{}^{p}i\,!\,{}^{p}j\,!\,f_{i+j} = {}^{p}(i+j)\,!\,f_{i+j}.$$

Par conséquent si l'on pose $X = 1.f_1$, on obtient ${}^{p}i\,!\,f_i = X^{\star i}$. La sous-algèbre $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}$ est donc analogue à l'algèbre des puissances divisées. Mais les factorielles et les coefficients binômiaux ont été remplacés par les p-factorielles et les coefficients p-binômiaux. Mais on a remarqué (1.6) que la première composante de ${}^{*}n\,!/n\,!$ est égale à 1, il en est de même pour ${}^{p}n\,!/n\,!$ qui est donc inversible, puisque l'on est en caractéristique p.

4. Algèbre des puissances fractionnaires divisées

Dans ce paragraphe $\mathbf{k}$ est un anneau commutatif quelconque. La construction de $W\alpha$ peut s'étendre à l'anneau $\mathbf{W}$ des gros vecteurs de Witt.

Soit $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des rationnels positifs ou nuls. Si i et j sont dans $\mathbb{Q}_+$, on note $d(i)$ le dénominateur de i, $d(i,j)$ le p.p.c.m. de $d(i)$ et $d(j)$, et $\delta(i,j)$ le quotient $d(i,j)/d(i+j)$.

4.1. THÉORÈME. — *Soit $\mathbf{W}\alpha$ le groupe $\prod_{\mathbb{Q}_+}\mathbf{W}$ et (f_i) sa base canonique :*

1) *la multiplication*

$$(4.1.1)\quad xf_i \star yf_j = V_{\delta(i,j)}\big[{}^{*}\big(\!\big(id(i,j), jd(i,j); \delta(i,j)\big)\!\big) F_{d(i,j)/d(i)}(x)\, F_{d(i,j)/d(j)}(y)\big]\, f_{i+j}$$

fait de $\mathbf{W}\alpha$ un anneau commutatif;

2) *le morphisme*

$$x \longmapsto \sum_{i\in\mathbb{Q}_+} \sigma(x^{id(i)}) f_i$$

est un homomorphisme du groupe additif α dans le groupe multiplicatif de $\mathbf{W}\alpha$.

La vérification est facile.

4.2 *Remarques.*

1) Comme dans le cas des p-vecteurs de Witt (*cf.* 3.3) la formule (4.1.1) entraîne :

$$F_{d(i)}(x)f_i\star F_{d(j)}(y)f_j = V_{\delta(i,j)}\left[{}^*(\!(id(i,j),jd(i,j);\delta(i,j))\!)\right]F_{d(i+j)}(xy)\,f_{i+j}.$$

2) Il en résulte immédiatement que si i et j sont entiers on a :

$$x\,{}^*i\,!\,f_i\star y\,{}^*j\,!\,f_j = xy\,{}^*(i+j)\,!\,f_{i+j}.$$

Ce qui montre que le sous-anneau $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}\mathbf{W}f_i$ de $\mathbf{W}\alpha$ est analogue à l'algèbre des puissances divisées. De façon plus précise, on peut vérifier que l'idéal engendré par les $(f_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ muni des applications γ_n définies par :

$$\gamma_n(x\,f_i) = F_i({}^*n\,!/n\,!)\,x^n\,f_{ni},$$

est un idéal à puissances divisées au sens de [B].

4.3. — On peut également interpréter $\mathbf{W}\alpha$ tout entier en termes de puissances fractionnaires divisées. Soient i et $j\in\mathbb{Q}_+$, posons

$${}^*(\!(i,j)\!) = \frac{1}{d(i,j)}V_{d(i,j)}{}^*(\!(id(i,j),jd(i,j))\!).$$

Alors ${}^*(\!(i,j)\!)$ est dans $\mathbf{W}(\mathbb{Q})$, et il est facile de voir que la formule (1.5.2) reste valable. Supposons alors que $\mathbf{k}$ soit de caractéristique 0 et soit $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ le $\mathbf{W}$-module $\mathbf{W}^{\mathbb{Q}_+}$, de base $\overline{f}_i$, muni de la multiplication :

$$x\overline{f}_i\star y\overline{f}_j = {}^*(\!(i,j)\!)\,xy\overline{f}_{i+j}.$$

PROPOSITION. — $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ *est une* $\mathbf{W}$*-pseudo-algèbre* (i.e. *une algèbre sans unité*) *et le morphisme :*

$$\begin{aligned}\mathbf{W}\alpha &\longrightarrow \overline{\mathbf{W}}\alpha\\ x\,f_i &\longmapsto \frac{1}{d(i)}V_{d(i)}(x)\overline{f}_i\end{aligned}$$

est un homomorphisme injectif d'algèbres.

La vérification est aisée. On trouvera dans [G3] d'autres résultats concernant les algèbres $\mathbf{W}\alpha$, $\overline{\mathbf{W}}\alpha$ et les coefficients $*$-binômiaux.

BIBLIOGRAPHIE

[B] BERTHELOT (Pierre). — Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$. — Berlin, Springer-Verlag, 1974 (*Lecture notes in Math.*, **407**).

[D.G.] DEMAZURE (Michel) et GABRIEL (Pierre). — *Groupes algébriques.* — Paris, Masson et Amsterdam, North-Holland , 1970.

[G1] GAUDIER (Henri). — Sur le produit tensoriel des groupes affines, *Manuscr. Math.*, t. **17**, 1975, p. 21–54.

[G2] GAUDIER (Henri). — Groupes libres et algèbres de groupes en Géométrie algébrique, *Manuscr. Math.*, t. **25**, 1978, p. 79–86.

[G3] GAUDIER (Henri). — Relèvement des coefficients binômiaux dans les vecteurs de Witt. — (Actes $18^{\text{ième}}$ session Séminaire Lotharingien de Combinatoire, 1987), Publ. Math. IRMA Strasbourg, n° **358**/5–18, 1988, p. 93–108.

[H] HAZEWINKEL (Michiel). — *Formal groups and applications.* — New-York, Academic Press, 1978.