BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-FRANCIS MICHON

Courbes de Shimura hyperelliptiques

Bulletin de la S. M. F., tome 109 (1981), p. 217-225

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1981__109__217_0>

Bull. Soc. math. France,
109, 1981, *p.* 217-225.

COURBES DE SHIMURA HYPERELLIPTIQUES

PAR

JEAN-FRANCIS MICHON (*)

M. Ogg a donné la liste des courbes modulaires hyperelliptiques [4]. Nous allons établir, par des moyens analogues, la liste des courbes de Shimura hyperelliptiques provenant d'algèbres de quaternions sur $\mathbb{Q}$.

Dans ce qui suit on désigne par :

H, une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$, à division, indéfinie (c'est-à-dire $H_{\mathbb{R}}=H\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{R}\simeq M_2(\mathbb{R})$);

$\mathfrak{h}$, le demi-plan de Poincaré;

$D=p_1\ldots p_{2m}$ le discriminant réduit de H (produit des places finies ramifiées de H) et sa décomposition en facteurs premiers;

n, la norme réduite de H;

$\mathcal{O}$, un ordre maximal fixé de H;

Γ, le groupe des inversibles de $\mathcal{O}$ de norme réduite positive;

$N(\mathcal{O})$, le groupe des x de H tels que $\mathcal{O}x=x\mathcal{O}$ et $n(x)>0$.

Rappelons que l'espace quotient $\mathfrak{h}/\Gamma$ est compact, un domaine fondamental pour Γ n'a donc pas de pointe parabolique. On peut alors construire une courbe algébrique complète, non singulière et définie sur $\mathbb{Q}$, notée V_Γ, et une application φ de $\mathfrak{h}$ sur V_Γ, holomorphe qui se factorise en un isomorphisme birégulier de $\mathfrak{h}/\Gamma$ sur V_Γ. Nous appelons V_Γ la courbe de Shimura associée à Γ. Ces résultats sont exposés dans [6].

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Les courbes* V_Γ *sont hyperelliptiques si et seulement si D vaut :* 26, 35, 38, 39, 51, 55, 57, 58, 62, 69, 74, 82, 86, 87, 93, 94, 95, 111, 119, 134, 146, 159, 194, 206.

Ce résultat a été obtenu indépendamment par Ogg.

(*) Texte reçu le 25 février 1980, révisé le 8 décembre 1980.
J.-F. MICHON, 62, rue du Ranelagh, 75016 Paris.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE - 0037-9484/1981/217/$ 5.00

1. Structure de $N(\mathcal{O})$

Tous les résultats sur les algèbres de quaternions dont nous avons besoin ici sont réunis dans [7]. Nous renvoyons à cet ouvrage pour une démonstration de la proposition suivante :

PROPOSITION 1. — *Il existe des éléments* π_i $(1 \leqq i \leqq 2m)$ *de* $\mathcal{O}$ *tels que* $n(\pi_i) = p_i$. *Les* π_i *sont alors dans* $N(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O}$ *et tout élément* x *de* $N(\mathcal{O})$ *s'écrit :*

$$x = \pi_1^{\varepsilon_1} \ldots \pi_{2m}^{\varepsilon_{2m}} \gamma . q,$$

où γ *appartient à* Γ, q *à* $\mathbb{Q}$ *et* ε_i *vaut* 0 *ou* 1. *L'application de* $N(\mathcal{O})/\Gamma\,\mathbb{Q}$ *sur* $(\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^{2m}$ *qui à* x *associe* $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2m})$ *est un isomorphisme.*

Sans restreindre nos hypothèses nous pouvons supposer H incluse dans $M_2(\mathbb{R})$, l'application qui à tout x de $N(\mathcal{O})$ associe $x/(n(x))^{1/2}$ envoie $N(\mathcal{O})$ sur un sous-groupe, que nous noterons G, de $SL_2(\mathbb{R})$. D'après la proposition 1, Γ est un sous-groupe normal de G, $G/\Gamma \simeq (\mathbb{Z}/2\,\mathbb{Z})^{2m}$, et tout élément g de G peut s'écrire $g = x/(n(x))^{1/2}$ avec x dans $N(\mathcal{O}) \cap \mathcal{O}$ et $n(x) \mid D$. Ainsi G est, comme Γ, un sous-groupe discret de $SL_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{h}/G$ est compact. On dispose maintenant d'un revêtement :

$$f : \quad \mathfrak{h}/\Gamma \to \mathfrak{h}/G,$$

les deux ensembles quotients étant munis de leur structure de surface de Riemann [5]. Le degré de ce revêtement est 2^{2m}. D'après [6] on peut associer une courbe algébrique V_G possédant les mêmes propriétés, relativement à G, que V_Γ. On dispose donc aussi d'un revêtement F de degré 2^{2m} :

$$F : \quad V_\Gamma \to V_G.$$

2. Genres et volumes

Les volumes de $\mathfrak{h}/\Gamma$ et de $\mathfrak{h}/G$ pour la mesure $-dx\,dy/2\pi y^2$ sont (*voir* [7]) :

$$\text{vol}\,(\mathfrak{h}/\Gamma) = -\frac{1}{6}(p_1 - 1)\ldots(p_{2m} - 1), \tag{2.1}$$

$$\text{vol}\,(\mathfrak{h}/G) = 2^{-2m}\,\text{vol}\,(\mathfrak{h}/\Gamma). \tag{2.2}$$

Le genre g_Γ de $\mathfrak{h}/\Gamma$ est donné par :

$$2 - 2g_\Gamma = \text{vol}\,(\mathfrak{h}/\Gamma) + \frac{1}{2}e_2(\Gamma) + \frac{2}{3}e_3(\Gamma), \tag{2.3}$$

où, en désignant par (a/b) le symbole de Legendre :

$$(2.4)\quad e_2(\Gamma)=\prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-4}{p}\right)\right) \quad \text{et} \quad e_3(\Gamma)=\prod_{p|D}\left(1-\left(\frac{-3}{p}\right)\right)$$

(p premier).

PROPROSITION 2. — *Le genre g_G de $\mathfrak{h}/G$ est donné par :*

$$(2.5)\quad 2-2g_G=\text{vol}\,(\mathfrak{h}/G)+\frac{1}{2}e_2(G)+\frac{2}{3}e_3(G)+\frac{3}{4}e_4(G)+\frac{5}{6}e_6(G).$$

En effet pour chaque z de $\mathfrak{h}$ notons G_z et Γ_z les fixateurs de z dans G et dans Γ. On sait que ces groupes sont finis et cycliques (groupes discrets contenus dans un conjugué du groupe compact des rotations) et Γ_z est inclus dans G_z. Vu la structure de G/Γ on a $(G_z:\Gamma_z)=1$ ou 2. Puisque Γ_z est d'ordre 2, 4 ou 6, l'ordre de G_z est 2, 4, 6, 8 ou 12. Un domaine fondamental pour G n'a donc que des points elliptiques d'ordre 2, 3, 4 ou 6 d'où la formule (2.5).

Nous allons maintenant calculer les entiers $e_k(G)$.

Considérons une extension quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, appelons R_d son unique ordre maximal, c'est-à-dire son anneau d'entiers, et dans le cas où $d\equiv 3 \pmod 4$, appelons R'_d l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{-d}]$. Supposons qu'il existe un plongement $u : \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \to H$, alors $u^{-1}(u(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \cap \mathcal{O})$ est un ordre contenu dans R_d. On dit que le plongement est R_d-optimal (resp. R'_d-optimal) si :

$$u^{-1}(u(\mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \cap \mathcal{O})=R_d(\text{resp. } R'_d)$$

et que le conducteur du plongement est 1 (resp. 2). Nous définirons la classe modulo G du plongement u comme l'ensemble des plongements $v : \mathbb{Q}(\sqrt{-d}) \to H$ tels que :

$$u=gvg^{-1} \qquad \text{avec} \quad g \quad \text{dans} \quad G.$$

Il est clair que le conducteur de tous les éléments d'une même classe est le même. On peut alors montrer qu'il existe une bijection entre ces classes et les points elliptiques d'un domaine fondamental pour G. Précisément appelons : n_d^1 le nombre de classes de plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ modulo G de conducteur 1 et n_d^2 le nombre correspondant au conducteur 2, on a alors :

PROPOSITION 3. — *Posons $\lambda(D)=1$ si D est pair et 0 sinon, $\mu(D)=1$ si $3 \mid D$ et 0 sinon, alors :*

$$e_2(G)=\sum_{d|D}(n_d^1+n_d^2)-\lambda(D)\,n_1^1-\mu(D)\,n_3^1,$$

$$e_3(G)=(1-\mu(D))\,n_3^1, \qquad e_4(G)=\lambda(D)\,n_1^1, \qquad e_6(G)=\mu(D)\,n_3^1.$$

PROPOSITION 4. — *Les nombres n_d^c (avec $c=1$ ou 2) sont donnés par :*

0 si au moins un p_i ($1 \leqq i \leqq 2m$) se décompose dans $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ou bien si $c=2$ et D pair, ou bien si $c=2$ et $d \not\equiv 3 \pmod 4$;

$$\frac{1}{r\rho} h(-d).c.\prod_{p|c}\left(1-\left(\frac{-d}{p}\right)\frac{1}{p}\right) \quad (p \text{ premier}) \text{ sinon,}$$

où ρ est l'indice du groupe des unités de R'_d dans le groupe des unités de R_d si $c=2$, et $\rho=1$ si $c=1$, $h(-d)$ est le nombre de classes du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, r est le nombre des classes du groupe des idéaux engendrés par les idéaux premiers de R_d ou R'_d (selon que $c=1$ ou 2) divisant les p_i ramifiés dans R_d ou R'_d.

Nous admettrons la proposition 4 dont on trouvera la démonstration dans [7] et nous allons prouver la proposition 3.

Calculons $e_2(G)$: Soit z un point elliptique de $\mathfrak{h}$ d'ordre 2, c'est-à-dire tel que $G_z \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Dans un premier cas $\Gamma_z = \{+1, -1\}$, soit g un générateur de G_z, on a $g^2=-1$; écrivons $g=x/(n(x))^{1/2}$ comme dans le paragraphe 1, on a alors $x^2=-n(x)$ et par suite $\mathbb{Q}(x)=\mathbb{Q}(\sqrt{-n(x)})$. De plus $\mathbb{Q}(x)\cap\mathcal{O}$ est un ordre contenant x, $\mathbb{Q}(x)$ est donc un plongement $R_{n(x)}$-optimal ou $R'_{n(x)}$-optimal. Si $n(x)=1$, g appartient à Γ et $G_z=\Gamma_z$ contrairement à l'hypothèse; si $n(x)=3$ et si le plongement est R_3-optimal, $\Gamma_z \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ contrairement à l'hypothèse. Dans le second cas $G_z=\Gamma_z$, $\mathbb{Q}(x)$ est donc un plongement R_1-optimal de $\mathbb{Q}(i)$, ceci impose que $2 \mid D$, en effet $1+x$ est de norme 2, donc si 2 divisait D on aurait $(1+x)/\sqrt{2}$ dans G_z qui serait au moins d'ordre 8, contrairement à l'hypothèse. On en déduit la formule relative à $e_2(G)$.

Calculons $e_3(G)$: Soit z dans $\mathfrak{h}$ tel que $G_z \simeq \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, alors $G_z=\Gamma_z$ puisque $(G_z:\Gamma_z)=1$ ou 2. Si g est un générateur de G_z on a $\mathbb{Q}(g)\simeq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et ce plongement est R_3-optimal. On ne peut avoir $3 \mid D$ car $1+g$ est de norme 3 et $(1+g)/\sqrt{3}$ engendrerait un sous-groupe d'ordre 12 dans G_z.

Calculons $e_4(G)$: $G_z \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ donc $\Gamma_z \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, soit g un générateur de G_z, $g^2=\gamma$ appartient à Γ_z et c'est un générateur de Γ_z qui vérifie $\gamma^2=-1$. Écrivons comme plus haut $g=x/(n(x))^{1/2}$, on a $\mathbb{Q}(x)\simeq\mathbb{Q}(\gamma)\simeq\mathbb{Q}(i)$ car $x^2=n(x)\,\gamma$ et x fixe z, de plus $x\,\mathbb{Q}(x)\cap\mathcal{O}=\mathbb{Q}(\gamma)\cap\mathcal{O}=\mathbb{Z}[\gamma]$. On peut écrire $x=a+b\gamma$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$, alors $x^2=a^2-b^2+2ab\gamma$ et $n(x)=a^2+b^2$ donc :

$$a^2-b^2+2ab\gamma=a^2+b^2,$$

d'où :

$$a=b \qquad \text{et} \qquad x=a(1+\gamma),$$

on peut choisir $a=1$, alors $x=1+\gamma$ et $n(x)=2$ donc $2 \mid D$.

On calcule e_6 (G) par la même méthode. Ici $G_z \simeq \mathbb{Z}/12\,\mathbb{Z}$ et $\Gamma_z \simeq \mathbb{Z}/6\,\mathbb{Z}$, $g^2=\gamma$ ou $\bar{\gamma}=1-\gamma$, $\mathbb{Q}(x)\simeq Q(\gamma)\simeq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ et $\mathbb{Q}(\gamma)\cap\mathcal{O}=\mathbb{Z}[\gamma]$. On pose $x=a+b\gamma$, avec a et b dans $\mathbb{Z}$ alors de :

$$x^2=n(x)\gamma \qquad \text{ou} \qquad n(x)\bar{\gamma},$$

on déduit :

$$a^2-b^2+(b^2+2ab)\,\gamma=(a^2+b^2+ab)\,\gamma \qquad \text{ou} \quad (a^2+b^2+ab)\,\bar{\gamma},$$

dans le premier cas $a=b$ et $x=a(1+\gamma)$, dans le second $a=-b$ et $x=a(2-\gamma)$. En choisissant $a=1$ on trouve $n(x)=3$ donc $3\,|\,D$.

3. Involutions de V_Γ et hyperellipticité

Chaque élément de G/Γ induit un automorphisme et même, d'après le paragraphe 1, une involution de V_Γ. Pour chaque entier d divisant D et différent de 1 nous noterons w_d l'involution induite par un élément de norme réduite d de G. Cet automorphisme possède un nombre fini de points fixes que nous pouvons maintenant déterminer.

PROPOSITION 5. — *L'involution w_d possède 2^{2m-1} $(n_d^1+n_d^2)$ points fixes dans V_Γ. Ce nombre est non nul si $d=D$.*

Si z désigne un point fixe de w_d et si g est un élément de G induisant w_d, tous les points de l'orbite de z par G sont des points fixes de w_d et il y a 2^{2m-1} points dans cette orbite puisque g^2 appartient à Γ. D'autre part il y a exactement $n_d^1+n_d^2$ orbites contenant un point fixe de w_d, elles correspondent aux différentes classes de plongements de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. La seconde assertion résulte du fait que $n_D^1\neq 0$.

Rappelons maintenant quelques propriétés des courbes hyperelliptiques.

Une courbe algébrique X définie sur un corps algébriquement clos, complète et non singulière, de genre $g_X \geqq 2$ est dite hyperelliptique si l'on peut définir sur X une fonction de degré 2. On peut encore dire que X est un revêtement de degré 2 de la droite projective ou encore qu'il existe une involution ω de X telle que X/ω soit une courbe de genre 0. L'involution ω est alors unique, elle possède $2g_X+2$ points fixes et elle appartient au centre du groupe de tous les automorphismes de X. La dernière assertion est une conséquence facile de l'unicité de ω. Réciproquement, si l'on peut définir une involution sur une courbe X possédant $2g_X+2$ points fixes, il est clair, par la formule de Riemann-Hurwitz, que X est hyperelliptique. On trouvera

dans OGG [4] quelques détails supplémentaires et la démonstration de la proposition très utile suivante :

PROPOSITION 6. — *Soit X une courbe hyperelliptique, ω l'involution « hyperelliptique », w une autre involution. Appelons u l'involution ωw, alors les ensembles des points fixes de u, w et ω sont disjoints. Si g_X est pair, u et w ont deux points fixes chacune. Si g_X est impair, u possède quatre points fixes et w aucun ou vice versa.*

Nous savons calculer (propositions 4 et 5) le nombre de points fixes des involutions induites par G. Le calcul devient très fastidieux si D possède plus de deux facteurs premiers. Heureusement cela ne peut se produire.

PROPOSITION 7. — *Si V_Γ est hyperelliptique D a exactement deux facteurs premiers.*

Supposons que D ait au moins quatre facteurs premiers, d'après la proposition 5, l'involution w_D possède au moins huit points fixes, donc si V_Γ est hyperelliptique, w_D est l'involution hyperelliptique d'après la proposition 6. Toujours en appliquant la proposition 5, les involutions w_D ont zéro ou au moins huit points fixes mais la proposition 6 impose la valeur zéro quel que soit $d \neq D$. Remarquons que :

$$w_d w_D = w_{D/d} \qquad \text{pour} \quad d \neq D,$$

nous sommes en contradiction avec la proposition 6.

4. Majoration de D

Ce paragraphe est entièrement consacré à la démonstration du théorème suivant.

THÉORÈME. — *Si V_Γ est hyperelliptique et si p est un nombre premier tel que $p \nmid D$, appelons h_p le nombre de classes de l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$, définie, de discriminant pD, alors :*

$$h_p \leqq 2(1+p^2). \tag{4.1}$$

Rappelons qu'une algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ est dite définie lorsqu'elle est ramifiée à l'infini, c'est-à-dire lorsque l'algèbre obtenue par extension des scalaires à $\mathbb{R}$ est isomorphe au corps $\mathbb{H}$ des quaternions classiques. Le discriminant Δ d'une telle algèbre possède un nombre impair de facteurs premiers et le nombre des classes des ordres maximaux, h, est donné par :

$$h = \frac{1}{12}\prod_{q|\Delta}(q-1) + \frac{1}{4}\prod_{q|\Delta}\left(1-\left(\frac{-4}{q}\right)\right) + \frac{1}{3}\prod_{q|\Delta}\left(1-\left(\frac{-3}{q}\right)\right).$$

A partir du théorème ci-dessus les meilleures majorations s'obtiennent en faisant $p=2$ ou 3. On obtient facilement :

COROLLAIRE. — *Soit $D=p_1 p_2$ la décomposition en facteurs premiers lorsque V_Γ est hyperelliptique, alors :*

$$(p_1-1)(p_2-1)\leqq 120.$$

Démontrons (4.1). Fixons p premier tel que $p\nmid D$, on peut considérer la réduction modulo p de V_Γ (*voir* [3]), nous noterons $\tilde{V}_\Gamma$ la courbe réduite, $\tilde{V}_\Gamma(\overline{\mathbb{F}}_p)$ (resp. $\tilde{V}_\Gamma(\mathbb{F}_{p^2})$) l'ensemble des points de V_Γ rationnels sur une clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$ (resp. sur $\mathbb{F}_{p^2}$). La courbe V_Γ est définie sur $\mathbb{Q}$ ainsi que l'involution hyperelliptique ω, on a donc :

$$\mathrm{Card}\,(\tilde{V}_\Gamma(\mathbb{F}_{p^2})\leqq 2(1+p^n).$$

D'après [1] et [2], il existe une partition de $\tilde{V}_\Gamma(\overline{\mathbb{F}}_p)$ en sous-ensembles globalement stables par le morphisme de Frobenius Frob : $\tilde{V}_\Gamma(\overline{\mathbb{F}}_p)\to\tilde{V}_\Gamma(\overline{\mathbb{F}}_p)$, c'est-à-dire l'élévation à la puissance p-ième des coordonnées. Ces sous-ensembles s'appellent les classes d'isogénies. Il existe une classe d'isogénie particulière, la classe supersingulière, dans laquelle nous allons chercher les points rationnels sur $\mathbb{F}_{p^2}$. Nous pouvons décrire cette classe ainsi que l'action de Frob sur ses éléments.

Appelons H' l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}$ de discriminant pD, $H'_f(\mathbb{A})^\times$ le groupe des idèles « finies » (sans composante à l'infini) de H', K_f le sous-groupe compact de $H'_f(\mathbb{A})^\times$ tel que, si $\mathcal{O}'$ désigne un ordre maximal de H' :

$$K_f=\prod_q K_q \quad (q \text{ premier})$$

où $K_q=(\mathcal{O}'\otimes\mathbb{Z}_q)^\times$. Alors la classe supersingulière est en bijection avec :

$$S=H'^\times\backslash H'_f(\mathbb{A})^\times/K_f.$$

Avec la notation du théorème, le nombre des éléments de cet ensemble est h_p, nombre des classes d'idéaux à gauche d'un ordre maximal quelconque de H' (*voir* [7]). De plus l'action de Frob sur un élément de S se traduit, sur $H'_f(\mathbb{A})^\times$, par la multiplication par π, l'uniformisante du corps $H'\otimes\mathbb{Q}_p$, de la p-ième composante. On sait d'autre part que π peut être choisi de manière à ce que $\pi^2=p$. L'action de Frob^2 revient alors, sur $H'(\mathbb{A})^\times_f/K_f$, à une multiplication de toutes les places par p. Donc Frob^2 agit trivialement sur S, tous les points de la classe supersingulière sont rationnels sur $\mathbb{F}_{p^2}$ et le théorème est démontré.

5. Les cas $D=133$, 142 et 177

Pour obtenir la liste des V_Γ-hyperelliptiques on examine tous les cas possibles déterminés au paragraphe précédent en leur appliquant la proposition 6. Il y a seulement trois cas où l'on ne peut conclure, c'est lorsque $D=7.19$, 2.71 *et* 3.59. Néanmoins, on peut montrer qu'aucune des courbes correspondantes n'est hyperelliptique et cela en utilisant seulement les arguments du paragraphe 3. Nous traitons d'abord les cas $D=133$ et 177.

Ces deux valeurs correspondent à des courbes V_Γ de genre 9. Supposons-les hyperelliptiques et appelons ω l'involution hyperelliptique. Comme ω appartient au centre du groupe de tous les automorphismes de V_Γ, ω induit une involution notée $\bar{\omega}$ sur V_G. L'involution ω possède 20 points fixes, donc $\bar{\omega}$ en possède 5. D'autre part V_G est de genre 2, donc est hyperelliptique et, d'après la proposition 6, $\bar{\omega}$ est son involution hyperelliptique. C'est impossible car $\bar{\omega}$ devrait alors posséder six points fixes.

Si $D=142$ la courbe V_Γ est de genre 5. Supposons la hyperelliptique et notons ω son involution hyperelliptique qui possède donc 12 points fixes. Notons V la courbe quotient $V_\Gamma/(w_{142})$; c'est une courbe de genre 2, donc hyperelliptique. L'involution ω induit une involution $\hat{\omega}$ sur V qui possède au moins 6 points fixes à savoir les images des points fixes de ω. Donc $\hat{\omega}$ possède exactement six points fixes. Choisissons maintenant un point P de V_Γ fixé par w_2 (cette involution possède quatre points fixes dans V_Γ). Alors $w_{142}(P)=\omega(P)$ et donc l'image $\hat{P}$ de P dans V est un point fixe de $\hat{\omega}$. Le point P devrait donc être un point fixe de ω, ce qui contredit la proposition 6.

6. Conclusion

Nous ne pouvons imposer au lecteur l'examen de tous les cas qui permet d'aboutir au théorème. On trouvera la liste des involutions hyperelliptiques dans [7]. Signalons que N. Ishii (An application of the Fricke formula for quaternion groups, *Math. Japon*, t. 20, 1975, Special Issue, p. 171-177) avait obtenu trois des valeurs de la liste; la table 3 de l'article de F. Hirzebruch (Modulflächen und Modulkurven zur symmetrischen hilbertschen Modulgruppe, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, 4e série, t. 11, 1978, p. 101-166) donne aussi quelques unes des valeurs.

On ne s'étonnera pas d'apprendre que ce problème ait été suggéré par B. Mazur à propos d'un résultat fameux de Jacquet-Langlands!

BIBLIOGRAPHIE

[1] CASSELMAN (W.). – The Hasse-Weil ζ-function of some moduli varieties of dimension greater than one, Proc., *Sympos. Pure Math.*, vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1979, p. 141-163.

[2] MILNE (J. S.). – Points on Shimura varieties mod *p*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, vol. 33, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1979, p. 165-184.

[3] MORITA (Y.). – Ihara's conjectures and moduli space of abelian varieties, *Master's Thesis*, Univ. Tokyo, 1970.

[4] OGG (A.). – Hyperelliptic modular curves, *Bull. Soc. Math. France*, 102, 1974, p. 449-462.

[5] SHIMURA (G.). – Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Tokyo and Princeton, Shoten, 1971.

[6] SHIMURA (G.). – Construction of classfields and zeta functions of algebraic curves, *Ann. of Math.*, (2), 85, 1967, p. 58-159.

[7] VIGNERAS (M.-F.). – Quaternions, *Lecture Notes in Math.*, n° 800, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.