BULLETIN DE LA S. M. F.

PATRICE TAUVEL

Sur les quotients premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble

Bulletin de la S. M. F., tome 106 (1978), p. 177-205

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1978__106__177_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France
106, 1978, p. 177-205.

SUR LES QUOTIENTS PREMIERS DE L'ALGÈBRE ENVELOPPANTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE RÉSOLUBLE

PAR

PATRICE TAUVEL

[Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris]

RÉSUMÉ. — Ce travail est en trois parties. Dans la première, on détermine, au moyen des dimensions de Krull et de Gelfand-Kirillov, les invariants entiers des algèbres introduites par J. C. MCCONNEL dans l'étude des représentations des algèbres de Lie résolubles. La seconde généralise, pour le cas résoluble, certains résultats de R. RENTSCHLER et M. VERGNE sur le semi-centre de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie. La troisième partie est consacrée au calcul de certains entiers attachés à un quotient premier de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie résoluble; elle utilise les résultats des deux premières parties.

Le texte ne comporte pas d'introduction générale, chaque partie étant précédée d'une introduction, et éventuellement de notations qui lui sont propres.

L'auteur remercie W. BORHO, J. DIXMIER, F. GUIMIER et R. RENTSCHLER pour leurs conseils et pour les conversations qu'il a eues avec eux à propos de ce travail.

I. — Les algèbres $\mathscr{A}(V, \delta, G)$

1. Introduction et rappels de résultats

Dans cette première partie, k désigne un corps commutatif de caractéristique 0 et tous les espaces vectoriels considérés sont définis sur k. Le mot « *algèbre* » signifie « *algèbre associative à élément unité* », et tous les modules sur une algèbre sont supposés unitaires.

1.1. Soient V un espace vectoriel de dimension finie, δ une forme bilinéaire alternée sur V, G un sous-groupe libre de type fini de V^*. Rappelons la construction et les propriétés de l'algèbre $\mathscr{A}(V, \delta, G)$ introduite par J. C. MCCONNELL dans [11].

On note $U_\delta(V)$ l'algèbre engendrée par V avec les seules relations $v.w-w.v = \delta(v, w)$ pour v, $w \in V$. Si $\lambda \in V^*$, on lui associe un automorphisme θ_λ de $U_\delta(V)$ défini par $\theta_\lambda(v) = v+\lambda(v)$ pour $v \in V$. Notant encore G l'image par $\theta : \lambda \to \theta_\lambda$ du groupe G dans $\mathrm{Aut}(U_\delta(V))$, l'algèbre $\mathscr{A}_k(V, \delta, G)$ (ou $\mathscr{A}(V, \delta, G)$) est le produit croisé de $U_\delta(V)$ par G défini par θ.

On désigne par $k\,G$ l'algèbre du groupe G ($\mathscr{A}(V, \delta, G)$ sera alors aussi notée $U_\delta(V) \# k\,G$), par V^δ le noyau de δ, V^G l'orthogonal de G dans V, $V^{G\delta}$ le noyau de $\delta \mid V^G$. Les résultats suivants sont démontrés dans [11]. L'algèbre $A = \mathscr{A}(V, \delta, G)$ est simple si, et seulement si, $V^G \cap V^\delta = \{0\}$. Nous supposerons dans la suite, sauf mention du contraire, cette condition réalisée. Les entiers $\dim V$, $\dim V^G$, $\dim V^{G\delta}$ et $\mathrm{rang}(G)$ ne dépendent que de A et non de sa présentation sous la forme $\mathscr{A}(V, \delta, G)$. L'ensemble C des éléments de A qui commutent à G est $U_\delta(V^G) \otimes k\,G$; le centre de C est $D = U(V^{G\delta}) \otimes k\,G$; l'ensemble L des éléments a de A, tels que $[a, g] \in k.g$ pour tout $g \in G$, est $U_\delta(V^G) \otimes k\,G+V$.

On se propose, dans cette première partie, de déterminer les dimensions de Krull et de Gel'fand-Kirillov d'algèbres liées à $\mathscr{A}(V, \delta, G)$. Nous obtenons ainsi de nouvelles caractérisations des entiers précédemment introduits, et nous montrons qu'il existe deux autres invariants de l'algèbre $\mathscr{A}(V, \delta, G)$, dont $\dim V^\delta$.

1.2. Si A est une algèbre, on note $\mathrm{Dim}\,A$ sa dimension de Gel'fand-Kirillov (*cf.* [2]) et $\mathrm{Kdim}\,A$ sa dimension de Krull (*cf.* [21]).

Si D est une dérivation de A, et X une indéterminée, $A_D[X]$ désigne l'algèbre engendrée par A et X soumise aux seules relations $Xa-aX=D(a)$, $a \in A$. On dit que A est filtrée s'il existe des sous-espaces F_n, $n \in \mathbf{Z}$, de A tels que $A = \bigcup_n F_n$, $F_n \subset F_{n+1}$, $F_n.F_m \subset F_{n+m}$. On définit alors l'algèbre graduée associée à A par $\mathrm{gr}(A) = \bigoplus_n (F_n/F_{n-1})$. On note gr_n la surjection canonique $F_n \to (F_n/F_{n-1})$ et, si V est un sous-espace de A, on pose $\mathrm{gr}(V) = \bigoplus_n \mathrm{gr}_n(V \cap F_n)$.

2. Dimension de Gel'fand-Kirillov

PROPOSITION. — *Soient $A = \mathscr{A}(V, \delta, G)$ comme dans l'introduction, $k\,G$ la sous-algèbre de A engendrée par les unités de A, C le centralisateur de $k\,G$ dans A, D le centre de C. On a :*

(i) $\mathrm{Dim}\,k\,G = \mathrm{rang}(G)$;

(ii) $\mathrm{Dim}\,A = \dim V+\mathrm{rang}(G)$;

(iii) Dim C = dim V^G+rang (G);

(iv) Dim D = dim $V^{G\delta}$+rang (G).

Démonstration. — Soit $\{g_1, \ldots, g_m\}$ une base du groupe abélien libre G. L'algèbre $k\,G = k[g_1, g_1^{-1}, \ldots, g_m, g_m^{-1}]$ est noethérienne commutative, et on a deg tr_k (Fract ($k\,G$)) = m. D'après [2], on a donc Dim $k\,G = m$ = rang (G). Soit $\{v_1, \ldots, v_s\}$ une base de V; notons $W = k.v_2 + \ldots + k.v_s$, et soit $B = U_\delta(W) \# k\,G$. On a $[B, v_1] \subset B$ et $A = B_\Delta[v_1]$ avec $\Delta = \mathrm{ad}_A\, v_1 \mid B$. D'après [2] (Satz 3.1), il vient donc Dim A = 1+Dim B. De proche en proche, on obtient Dim A = dim V+rang (G). Les autres égalités s'obtiennent de manière analogue.

3. Dimension de Krull. Résultats préliminaires

3.1. Soit A une algèbre filtrée par des sous-espaces F_n, $n \in \mathbf{Z}$. Nous dirons que A est de type ($\mathscr{C}$) si $F_n = 0$ pour $n < 0$, $1 \in F_0$, et si gr (A) est une algèbre commutative de type fini; en particulier, une algèbre de type ($\mathscr{C}$) est noethérienne.

Rappelons le résultat suivant ([7], lemme 3.9.2) qui généralise le lemme de Quillen ([3], lemme 2.6.4).

LEMME. — *Soient A une algèbre filtrée de type ($\mathscr{C}$), et M un A-module non nul de longueur finie. Alors, tout élément de* $\mathrm{Hom}_A(M, M)$ *est algébrique sur k.*

3.2. LEMME. — *Soient A une algèbre noethérienne, D une dérivation de A, X une indéterminée, $B = A_D[X]$ et $C = A \otimes k[X, X^{-1}]$. On a*

$$\mathrm{Kdim}\, A \leqslant \mathrm{Kdim}\, B \leqslant 1 + \mathrm{Kdim}\, A \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Kdim}\, C = 1 + \mathrm{Kdim}\, A.$$

Pour la démonstration, *voir* [17] (théorème 4, page 148).

3.3. PROPOSITION. — *Soient A une algèbre noethérienne, D une dérivation de A, X une indéterminée, et $B = A_D[X]$. On suppose que si M est un B-module non nul, M n'est pas de longueur finie sur A. On a alors,* Kdim B = Kdim A.

Démonstration. — On suit pas-à-pas une démonstration de [21], page 714. Filtrons B par les $B_p = \sum_{i \leqslant p} A.X^i$. On a alors gr $(B) = A[x]$, où x est une indéterminée qui commute à A. Nous allons montrer que si I et J sont des idéaux à gauche de B tels que $J \subset I$, $J \neq I$, on a dev [gr (J), gr (I)] $\geqslant 1$ dans l'ensemble des idéaux à gauche de gr (B).

Cas 1 : il existe une infinité d'indices $p_1 < p_2 < \ldots$ tels que $\mathrm{gr}_{p_i}(J) \neq \mathrm{gr}_{p_i}(I)$. La suite

$$F_n = \mathrm{gr}_0(J) \oplus \ldots \oplus \mathrm{gr}_{p_n}(J) \oplus \mathrm{gr}_{p_n+1}(I) \oplus \mathrm{gr}_{p_n+2}(I) \oplus \ldots$$

est strictement décroissante et vérifie $\mathrm{gr}(J) \subset F_n \subset \mathrm{gr}(I)$. Il en résulte

$$\operatorname{dev}[\mathrm{gr}(J), \mathrm{gr}(I)] \geqslant 1.$$

Cas 2 : l'ensemble E des indices tels que $\mathrm{gr}_i(J) \neq \mathrm{gr}_i(I)$ est fini. Si pour tout $i \in E$, $\mathrm{gr}_i(I)/\mathrm{gr}_i(J)$ était de longueur finie sur A, I/J le serait. Il existe donc un indice i et une suite infinie strictement décroissante de sous-modules M_p avec $\mathrm{gr}_i(I) \supset M_1 \supset M_2 \supset \ldots \supset \mathrm{gr}_i(J)$. La suite

$$F_n = \mathrm{gr}_0(J) \oplus \ldots \oplus \mathrm{gr}_{i-1}(J) \oplus M_n \oplus \mathrm{gr}_{i+1}(I) \oplus \ldots$$

est strictement décroissante, d'où $\operatorname{dev}[\mathrm{gr}(J), \mathrm{gr}(I)] \geqslant 1$.

D'après [21] ((*a*), page 712) et le lemme 3.2, il vient donc

$$\operatorname{Kdim} A \leqslant \operatorname{Kdim} B \leqslant \operatorname{Kdim} A[x] - 1 = \operatorname{Kdim} A.$$

D'où le résultat.

3.4. COROLLAIRE :

(i) *soient A une algèbre filtrée de type $(\mathscr{C})$, D une dérivation de A, X une indéterminée, et $B = A_D[X]$. On suppose qu'il existe un élément a central dans A tel que $D(a) = 1$. On a alors,*

$$\operatorname{Kdim} B = \operatorname{Kdim} A;$$

(ii) *soient A une algèbre filtrée de type $(\mathscr{C})$, X et Y deux indéterminées, D une dérivation de $A \otimes k[X]$ telle que $D(X) = 1$. Alors,*

$$\operatorname{Kdim}((A \otimes k[X])_D[Y]) = 1 + \operatorname{Kdim} A.$$

Démonstration :

(i) soient M un B-module non nul et ρ la représentation de B correspondante. D'après 3.1, si M était de longueur finie sur A, il existerait des scalaires $r_{n-1}, \ldots, r_0$ tels que

$$\rho(a)^n + r_{n-1}\rho(a)^{n-1} + \ldots + r_0 = 0.$$

Comme $(\operatorname{ad}\rho(X))^n.(\rho(a)^n + \ldots + r_0) = n!$, cette éventualité est absurde. On en déduit le résultat d'après la proposition 3.3;

(ii) compte tenu de (i) et de [3], lemme 3.5.6, il suffit de montrer que $B = A \otimes k[X]$ est de type $(\mathscr{C})$. Or, si A est filtrée par les $(F_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on a immédiatement le résultat en filtrant B par les $(F_n \otimes k[X])_{n \in \mathbf{N}}$

3.5. COROLLAIRE :

(i) *soient A une algèbre filtrée de type ($\mathscr{C}$), D une dérivation de A, X une indéterminée, et $B = A_D[X]$. On suppose qu'il existe $\alpha \in k-\{0\}$, et a central inversible dans A tels que $D(a) = \alpha.a$. Alors,*

$$\operatorname{Kdim} B = \operatorname{Kdim} A;$$

(ii) *soient A une algèbre filtrée de type ($\mathscr{C}$), X et Y deux indéterminées. $\alpha \in k-\{0\}$, et D une dérivation de $A \otimes k[X, X^{-1}]$ tels que $D(X) = \alpha.X$, Alors,*

$$\operatorname{Kdim}((A \otimes k[X, X^{-1}])_D[Y]) = 1+\operatorname{Kdim} A.$$

La démonstration est analogue à celle de 3.4.

4. Dimension de Krull des algèbres $\mathscr{A}(V, \delta, G)$

Conservons les notations de l'introduction, et supposons $\mathscr{A}(V, \delta, G)$ non simple. Soit $\{v_1, \ldots, v_p\}$ une base de $V^G \cap V^\delta$. On a alors, avec des notations évidentes,

$$\mathscr{A}(V, \delta, G) = k[v_1, \ldots, v_p] \otimes \mathscr{A}(V', \delta', G)$$

et $V'^{\delta'} \cap V'^G = \{0\}$. Compte tenu de [3], lemme 3.5.6, il vient

$$\operatorname{Kdim} \mathscr{A}(V, \delta, G) = p+\operatorname{Kdim} \mathscr{A}(V', \delta', G).$$

Nous pouvons donc nous limiter au cas où $V^G \cap V^\delta = \{0\}$, c'est-à-dire où $\mathscr{A}(V, \delta, G)$ est simple.

4.1. PROPOSITION. — *Soient $\mathscr{A}$ (V, δ, G) supposée simple, $k G$, C, D comme dans la proposition 2. On a :*

(i) $\operatorname{Kdim}(kG) = \operatorname{rang}(G)$;

(ii) $\operatorname{Kdim} A = (1/2)(\dim V^G+\dim V^{G\delta})+\operatorname{rang}(G)$;

(iii) $\operatorname{Kdim} C = \operatorname{Kdim} A$:

(iv) $\operatorname{Kdim} D = \dim V^{G\delta}+\operatorname{rang}(G)$.

Démonstration. — L'égalité $\operatorname{Kdim}(kG) = \operatorname{rang}(G)$ est claire et, compte tenu de [3], lemme 3.5.6, il vient $\operatorname{Kdim} D = \dim V^{G\delta}+\operatorname{rang}(G)$.

Soit $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_l\}$ une base de V. On suppose que $\{z_1, \ldots, z_l\}$ est une base de V^δ, que $\{y_1, \ldots, y_p, \ldots, x_1, \ldots, x_p, \ldots, x_r\}$ ($p \leqslant r \leqslant s$) est une base de V^G, que $\{x_{p+1}, \ldots, x_r\}$ est une base de $V^{G\delta}$, et que $[x_i, y_j] = \delta_{i,j}$, $[x_i, x_j] = [y_i, y_j] = 0$.

Soit B_q la sous-algèbre de A engendrée par G, V^δ, et les x_i et les y_i tels que $i \geqslant q$. Si $q \leqslant r$, on a

$$B_{q-1} = (B_q \otimes k[x_{q-1}])_\Delta [y_{q-1}],$$

où Δ est une dérivation telle que $\Delta(x_{q-1}) = -1$.

Désignons par $B_q^{(m)}$ le sous-espace de B_q engendré par les monômes (à coefficients dans $k\,G$) de degré $\leqslant m$ en les $x_q, \ldots, x_s, y_q, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_l$. Filtrée par les $B_q^{(m)}$, il est facile de voir que B_q est une algèbre de type ($\mathscr{C}$) et, d'après le corollaire 3.4, il vient $\operatorname{Kdim} B_{q-1} = 1 + \operatorname{Kdim} B_q$. Notant B la sous-algèbre B_{r+1}, on obtient

$$\operatorname{Kdim} A = r + \operatorname{Kdim} B = (1/2)(\dim V^G + \dim V^{G\delta}) + \operatorname{Kdim} B.$$

Posons $W = V^\delta + k.x_{r+1} + k.y_{r+1} + \ldots + k.x_s + k.y_s$. Par construction de l'algèbre B, on a $B = U_\delta(W) \# k\,G$ et $W \cap V^G = \{0\}$, d'où il résulte que $G \mid W$ engendre W^*. Soit $\{g_1, \ldots, g_m\}$ une base du groupe libre G; on peut supposer que $\{g_1 \mid W, \ldots, g_q \mid W\}$ est une base de W^*, et soit $\{v_1, \ldots, v_q\}$ la base duale dans W. Notons E l'algèbre engendrée par $g_2, g_2^{-1}, \ldots, g_m, g_m^{-1}, v_2, \ldots, v_q$. On a alors $B = (E \otimes k[g_1, g_1^{-1}])_{D_1}[v_1]$, où D_1 est une dérivation telle que $D(g_1) = -g_1$. D'après le corollaire 3.5, il vient $\operatorname{Kdim} B = 1 + \operatorname{Kdim} E$ et, de proche en proche, on obtient

$$\operatorname{Kdim} B = \dim W + \operatorname{Kdim} k[g_{q+1}, g_{q+1}^{-1}, \ldots, g_m, g_m^{-1}].$$

On a donc finalement

$$\operatorname{Kdim} A = (1/2)(\dim V^G + \dim V^{G\delta}) + \operatorname{rang}(G).$$

L'égalité $\operatorname{Kdim} C = \operatorname{Kdim} A$ s'obtient de manière analogue.

4.2. L'algèbre $A = \mathscr{A}(V, \delta, G)$ est noethérienne et intègre; elle possède donc un corps de fractions F ([3], théorème 3.6.12). Notons K le corps des fractions de $k\,G$ (qui s'identifie donc à un sous-corps de F) et $B = \mathscr{B}(V, \delta, G)$ la sous-algèbre de F engendrée par K et A. Si $\{x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_l\}$ est une base de V comme dans la démonstration précédente, on a alors

$$B = (((\ldots(\mathrm{K})_{D_1}[x_1])\ldots)_{D'_1}[y_1])\ldots)_{D''_l}[z_l],$$

où $D_1, \ldots, D'_1, \ldots, D''_l$ sont des dérivations de B ayant une signification évidente.

4.3. Proposition. — *Avec les notations précédentes, on a*

$$\operatorname{Kdim} \mathscr{B}(V, \delta, G) = (1/2)(\dim V + \dim V^\delta).$$

Démonstration. – Si Q est un anneau, et M un Q-module à gauche, nous noterons $\mathrm{Kdim}_Q M$ la dimension de Krull du Q-module M.

Soit S la sous-algèbre de B engendrée par $K = k(g_1, \ldots, g_m)$ et les y_i. Alors, B est un S-module à gauche libre, une base de B étant formée des monômes en les x_i et les z_j.

Rappelons le résultat suivant ([9], lemma 5.3).

LEMME. – *Soient Q un anneau, Q_0 un sous-anneau de Q. On suppose qu'il existe des éléments $v_1, \ldots, v_t$ de Q tels que :*

(i) $[v_i, v_j] = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant t)$;

(ii) *l'anneau Q est un Q_0-module à gauche libre de base les monômes en les v_i. Soit I_i $(0 \leqslant i \leqslant t)$ l'idéal à gauche de Q engendrée par $v_1, \ldots, v_i$ avec $I_0 = 0$. Alors*

$$\mathrm{Kdim}_Q(Q/I_{i-1}) \geqslant 1 + \mathrm{Kdim}_Q(Q/I_i).$$

– On prend ici $\{v_1, \ldots, v_t\} = \{x_1, \ldots, x_s, z_1, \ldots, z_l\}$, $Q = B$ et $Q_0 = S$. On va montrer $\mathrm{Kdim}_B(B/I_{i-1}) = 1 + \mathrm{Kdim}_B(B/I_i)$.

Posons $R^{(i)} = B/I_i$; comme groupe additif, $R^{(i-1)}$ s'identifie au groupe additif de l'algèbre engendrée par S, $v_i, \ldots, v_t$. Avec cette identification, tout élément r de $R^{(i-1)}$ s'écrit de manière unique sous la forme $v_i^p . a_p(r) + v_i^{p-1} . a_{p-1}(r) + \ldots + a_0(r)$, où les $a_n(r)$ sont des éléments de l'algèbre engendrée par S, $v_{i+1}, \ldots, v_t$. Notons

$$R_p^{(i-1)} = \{r \in R^{(i-1)};\ 0 = a_{p+1}(r) = a_{p+2}(r) = \ldots\}.$$

Si M est un sous-B-module de $R^{(i-1)}$, on note $f_p(M)$ l'ensemble des images dans $R^{(i)}$ des $a_p(r)$ pour $r \in M \cap R_p^{(i-1)}$, et on pose $f(M) = (f_0(M), f_1(M), \ldots)$. L'application $M \to f(M)$ est strictement croissante (il suffit pour le voir de recopier la démonstration de [3], lemme 3.5.6). D'après [3], lemme 3.5.4, on a $\mathrm{Kdim}_B(B/I_{i-1}) = 1 + \mathrm{Kdim}_B(B/I)$, d'où on déduit

$$\mathrm{Kdim}\, B = (1/2)(\dim V + \dim V^\delta) + \mathrm{Kdim}_B(B/I_t).$$

Nous aurons donc prouvé le résultat de la proposition si on montre que $\mathrm{Kdim}_B(B/I_t) = 0$ et pour cela, nous allons montrer que $R^{(t)}$ est un B-module à gauche simple.

– Pour $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbf{N}^s$, posons $|n| = n_1 + \ldots + n_s$, et notons $J_r = \{n \in \mathbf{N}^s;\ |n| = r\}$. Il existe un ordre unique sur $\mathbf{N}_s$ tel que :

1° $J_0 < J_1 < J_2 < \ldots$

2° Sur chaque J_r, l'ordre induit est l'ordre lexicographique.

Si $a \in R^{(t)}$, a s'écrit $\Sigma\, a_{j_1, \ldots, j_s} y_1^{j_1} \ldots y_1^{j_s}$ avec $a_{j_1, \ldots, j_s} \in K$, et nous noterons $d(a) = \sup\{(j_1, \ldots, j_s);\ a_{j_1, \ldots, j_s} \neq 0\}$ (pour l'ordre défini ci-dessus). Soit $a \in R^{(t)}$ tel que $d(a) = (m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$. On va montrer qu'il existe $a' \in B.a$ tel que $a' \neq 0$ et $d(a') < d(a)$, ce qui prouvera que $R^{(t)}$ est un B-module simple.

On peut supposer que a est de la forme

$$a = y_1^{m_1} \ldots y_s^{m_s} + \sum_{(j_1, \ldots, j_s) < d(a)} a_{j_1, \ldots, j_s} y_1^{j_1} \ldots y_s^{j_s}$$

et, pour simplifier les calculs, nous supposerons par exemple $m_1 \neq 0$. Il vient alors

$$x_1 . a = m_1 . y_1^{m_1 - 1} y_2^{m_2} \ldots y_s^{m_s} + \sum ([x_1, a_{j_1, \ldots, j_s}]) y_1^{j_1} \ldots y_s^{j_s}$$
$$+ \sum j_1 . a_{j_1, \ldots, j_s} . y_1^{j_1 - 1} y_2^{j_2} \ldots y_s^{j_s} \qquad (\text{mod } I_t)$$

Il est clair que si $x_1 . a \neq 0$, on a $d(x_1 . a) < d(a)$. Si $x_1 . a = 0$, il est facile de voir que l'on a nécessairement

$$m_1 + [x_1, a_{j_1, \ldots, j_s}] = 0 \qquad \text{pour} \quad (j_1, \ldots, j_s) = (m_1 - 1, m_2, \ldots, m_s).$$

Tout revient donc, pour montrer que l'hypothèse $x_1 . a = 0$ est absurde, à prouver que $[x, \xi] \neq 1$ si $x \in V$, $\xi \in K$.

Soit $\{g_1, \ldots, g_m\}$ une base du $\mathbf{Z}$-module libre G. Écrivons $\xi = P/Q$ avec P, $Q \in k[g_1, \ldots, g_m]$ premiers entre eux et

(1) $$[x, P/Q] = 1.$$

L'égalité (1) s'écrit $[x, P]\ Q^{-1} - PQ^{-1} [x, Q]\ Q^{-1} = 1$. Comme $[x, k\,G] \subset k\,G$ et que G est commutatif, on en déduit

$$Q([x, P] - Q) = P([x, Q]).$$

Pour $g \in G$, notons λ_g la forme linéaire définie sur V par g c'est-à-dire $[g, v] = \lambda_g(v)\, g$ pour $v \in V$. Comme $d^0([x, Q]) \leqq d^0(Q)$ et puisque P et Q sont premiers entre eux, il vient donc :

(2) $$[x, Q] = \lambda . Q; \qquad \lambda \in k,$$

(3) $$[x, P] - Q = \lambda . P.$$

Posons

$$P = \sum \alpha_i . h_i, \qquad Q = \sum \beta_i . h_i \qquad \text{avec} \quad \alpha_i, \ \beta_i \in k, \quad h_i \in G.$$

On a

$$[x, P] = -\sum \alpha_i . \lambda_{h_i}(x)\, h_i, \ [x, Q] = -\sum \beta_i . \lambda_{h_i}(x)\, h_i.$$

On en déduit :

– si $\alpha_i \neq 0$ et $\beta_i = 0$, alors, d'après (3), $\lambda = -\lambda_{h_i}(x)$;

– si $\alpha_i \neq 0$ et $\beta_i \neq 0$, alors, d'après (2), $\lambda = -\lambda_{h_i}(x)$.

On a donc $[x, P] = \lambda . P$ et, d'après (3), $Q = 0$, ce qui est absurde. La démonstration de la proposition est donc achevée.

4.4. COROLLAIRE. — *Soit* $A = \mathscr{A}(V, \delta, G)$. *Les entiers* $\dim V$, $\dim V^{G\delta}$, $\dim V^{\delta}$, rang (G) *ne dépendent que de l'algèbre* A *et non de sa présentation sous la forme* $\mathscr{A}(V, \delta, G)$.

Cela résulte de [11], lemma 5.1 et des propositions précédentes.

4.5. *Remarques :*

1° la dimension homologique de $\mathscr{A}(V, \delta, G)$ est

$$(1/2)(\dim V^{G\delta} + \dim V^{G}) + \operatorname{rang}(G) \quad ([14]);$$

2° soit S le bicommutant de $k + V^{G\delta}$ dans $A = \mathscr{A}(V, \delta, G)$. Un calcul facile montre que $S = U(V^{G\delta}) \otimes k\,G'$, où G' est un sous-groupe libre de type fini de G. On a alors,

$$\operatorname{Kdim} S = \operatorname{Dim} S = \dim V^{G\delta} + \operatorname{rang}(G').$$

D'après [11], lemma 5.1, (iv), l'entier rang (G') ne dépend que de A et non de sa présentation sous la forme $\mathscr{A}(V, \delta, G)$; d'où un nouvel invariant attaché à $\mathscr{A}(V, \delta, G)$;

3° soit Δ (resp. Δ_0) l'ensemble des dérivations (resp. dérivations intérieures) de $\mathscr{A}(V, \delta, G)$. Il est montré dans [6] que $\dim(\Delta/\Delta_0) < +\infty$ si, et seulement si, $\mathscr{A}(V, \delta, G)$ est simple et, dans ce cas, $\dim(\Delta/\Delta_0) = \operatorname{rang}(G)$.

II. — Sur le semi-centre d'un quotient premier de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de lie résoluble

1. Introduction et notations

Dans toute la suite, k désigne un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0. Toutes les algèbres de Lie considérées sont de dimension finie sur k et résolubles. On renvoie à [1], [3], [18] pour les concepts généraux utilisés.

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble, et Γ son groupe adjoint algébrique. On désigne par Spec $U(\mathfrak{g})$ l'ensemble des idéaux premiers de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ et par $(\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ l'ensemble des idéaux premiers ad $\mathfrak{g}$-stables de l'algèbre symétrique $S(\mathfrak{g})$.

Si $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ (resp. $Q \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$), on pose

$$A(\mathfrak{g};\, P) = U(\mathfrak{g})/P, \qquad K(\mathfrak{g};\, P) = \operatorname{Fract}(A(\mathfrak{g};\, P))$$

(resp. $B(\mathfrak{g};\, Q) = S(\mathfrak{g})/Q$, $L(\mathfrak{g};\, Q) = \operatorname{Fract}(B(\mathfrak{g};\, Q))$. Si aucune confusion n'est à craindre, on écrira par exemple $A(P)$ pour $A(\mathfrak{g};\, P)$. La représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $K(P)$ (resp. $L(Q)$) est notée ε_P ou ε (resp. η_Q ou η). Si V est un sous-espace de $K(P)$ ou de $L(Q)$ et si $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, V_λ désigne l'ensemble des éléments de poids λ de V. De même, si χ est un caractère rationnel de Γ, on pose $V^\chi = \{a \in V;\ \gamma . a = \chi(\gamma)\, a;\ \gamma \in \Gamma\}$. Le centre de $A(P)$ est noté $Z(P)$; celui de $K(P)$ est noté $C(P)$. De même, l'ensemble des invariants (pour la représentation η_Q) de $B(Q)$ est noté $Y(Q)$, et le sous-corps des invariants de $L(Q)$ est noté $D(Q)$.

Le semi-centre $SZ(P)$ (resp. $SC(P)$) de $A(P)$ (resp. $K(P)$) est l'algèbre (resp. le corps) engendré par les semi-invariants de $A(P)$ (resp. $K(P)$). De même, l'algèbre engendrée par les semi-invariants de $B(Q)$ est notée $SY(Q)$, et le corps engendré par les semi-invariants de $L(Q)$ est noté $SD(Q)$.

On a donc les diagrammes d'inclusions suivants :

$$\begin{array}{ccccc} Z(P) & \subset & SZ(P) & \subset & A(P) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ C(P) & \subset & SC(P) & \subset & K(P) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} Y(Q) & \subset & SY(Q) & \subset & B(Q) \\ \cap & & \cap & & \cap \\ D(Q) & \subset & SD(Q) & \subset & L(Q) \end{array}$$

On désigne par $\beta(\mathfrak{g})$ ou β la bijection canonique $\operatorname{Spec} U(\mathfrak{g}) \to (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ et par $\beta_P(\mathfrak{g})$ ou β_P l'isomorphisme canonique $C(\mathfrak{g};\, P) \to D(\mathfrak{g};\, \beta(\mathfrak{g})(P))$ (*cf.* [18]).

Nous montrons dans cette partie que l'isomorphisme β_P se prolonge en un isomorphisme de $SC(P)$ sur $SD(\beta(P))$. Les méthodes utilisées sont pour la plupart très semblables à celles de [4] et [22].

Il serait intéressant de généraliser ce résultat au cas où $\mathfrak{g}$ n'est pas résoluble. Rappelons à ce propos qu'il existe, pour $\mathfrak{g}$ quelconque, un isomorphisme du semi-centre de $\operatorname{Fract}(U(\mathfrak{g}))$ sur le corps engendré par les semi-invariants de $\operatorname{Fract}(S(\mathfrak{g}))$.

2. Lemmes sur les idéaux $J(f)$

2.1. Soient $f \in \mathfrak{g}^*$, $P(f;\, \mathfrak{g})$ l'ensemble des polarisations de $\mathfrak{g}$ en f, $\mathfrak{h} \in P(f;\, \mathfrak{g})$ et $\mathfrak{h}^\perp$ l'orthogonal de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{g}^*$. On désigne par $m_f(\mathfrak{g})$ (resp. $m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$) l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ engendré par les éléments $x - f(x)$, où $x \in \mathfrak{g}$ (resp. $x \in \mathfrak{h}$). On pose

$$J(f) = \textstyle\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma(m_f(\mathfrak{g})),\ J(f;\, \mathfrak{h}) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma(m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})).$$

L'idéal $J(f)$ (resp. $J(f;\mathfrak{h})$) de $S(\mathfrak{g})$ est l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{g})$ nuls sur $\Gamma.f$ (resp. $\Gamma(f+\mathfrak{h}^{\perp})$). Les lemmes suivants sont les analogues pour $S(\mathfrak{g})$ de résultats démontrés dans [19].

2.2. LEMME. — *Soient $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $f'=f\mid\mathfrak{g}'$. Alors, $J(f)\cap S(\mathfrak{g}')$ est le plus grand idéal* ad $\mathfrak{g}$-*stable de $S(\mathfrak{g}')$ contenu dans $J(f')$.*

Démonstration. — Soit Γ' le plus petit sous-groupe algébrique de Γ dont l'algèbre de Lie contienne $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\mathfrak{g}'$; l'ensemble $\{\mathrm{res}(\gamma);\gamma\in\Gamma\}$ des restrictions à $\mathfrak{g}'$ des éléments de Γ' s'identifie au groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}'$. On a

$$\begin{aligned} J(f)\cap S(\mathfrak{g}') &= \left(\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.m_f(\mathfrak{g})\right)\cap S(\mathfrak{g}') = \bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.(m_f(\mathfrak{g})\cap S(\mathfrak{g}'))\\ &= \bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.m_{f'}(\mathfrak{g}')\\ &= \bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\bigcap\nolimits_{\gamma'\in\Gamma'}\gamma.\gamma'.m_{f'}(\mathfrak{g}') = \bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.J(f'). \end{aligned}$$

D'où le résultat

2.3. LEMME. — *Soient $f\in\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension* 1 *de $\mathfrak{g}$, $f'=f\mid\mathfrak{g}'$; on suppose $P(f';\mathfrak{g}')\subset P(f;\mathfrak{g})$. Alors, $J(f)$ est le plus grand idéal* ad $\mathfrak{g}$-*stable de $S(\mathfrak{g})$ contenu dans $S(\mathfrak{g})J(f')$.*

Démonstration. — Il existe $\mathfrak{h}\in P(f;\mathfrak{g})$ telle que la représentation induite tordue $\widetilde{\mathrm{ind}}\,(f\mid\mathfrak{h};\mathfrak{g})$ soit simple ([3], proposition 6.1.1). On sait alors [23], que $\mathfrak{h}\in P(f+g;\mathfrak{g})$ pour tout $g\in\mathfrak{h}^{\perp}$. Les représentations induites $\widetilde{\mathrm{ind}}\,(f\mid\mathfrak{h};\mathfrak{g})$ et $\widetilde{\mathrm{ind}}\,(f+g\mid\mathfrak{h};\mathfrak{g})$ sont égales pour tout $g\in\mathfrak{h}^{\perp}$. Il en résulte $\Gamma.f=\Gamma(f+\mathfrak{h}^{\perp})$ ([3], théorème 6.5.12), et donc $J(f)=J(f;\mathfrak{h})$. Comme $P(f';\mathfrak{g}')\subset P(f;\mathfrak{g})$, il existe $\mathfrak{h}\in P(f';\mathfrak{g}')$ telle que les représentations $\widetilde{\mathrm{ind}}\,(f\mid\mathfrak{h};\mathfrak{g})$ et $\widetilde{\mathrm{ind}}\,(f'\mid\mathfrak{h};\mathfrak{h}')$ soient simples ([3], lemme 1.12.2, propositions 1.12.10 et 6.1.1). On a alors

$$m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})=S(\mathfrak{g})\,m_{f'}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}'),$$
$$J(f)=J(f;\mathfrak{h}),\ J(f')=J(f';\mathfrak{h})$$

et il vient

$$S(\mathfrak{g})J(f')=\bigcap\nolimits_{\gamma'\in\Gamma'}\gamma'.S(\mathfrak{g})\,m_{f'}^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g}')=\bigcap\nolimits_{\gamma'\in\Gamma'}\gamma'.m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})$$

et donc,

$$\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.S(\mathfrak{g})J(f')=\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\bigcap\nolimits_{\gamma'\in\Gamma'}\gamma.\gamma'.m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})=\bigcap\nolimits_{\gamma\in\Gamma}\gamma.m_f^{\mathfrak{h}}(\mathfrak{g})=J(f).$$

D'où le résultat.

2.4. LEMME. — *On conserve les hypothèses et notations du lemme* 2.3. *Alors,*

$$J(f)=S(\mathfrak{g}).(J(f)\cap S(\mathfrak{g}')).$$

Démonstration. — Soit $x \notin \mathfrak{g}$ tel que $x \in \mathfrak{g}'$. Tout élément u de $J(f)$ s'écrit de manière unique

$$u = x^n u_n + x^{n-1} u_{n-1} + \ldots + u_0$$

avec $u_n, \ldots, u_0 \in J(f')$ (lemme 2.3). Pour $p \in \mathbf{N}$, on a

$$(\operatorname{ad} x)^p . u = \textstyle\sum_{i=p}^{n} x^i . (\operatorname{ad} x)^p . u_i \in \bigoplus x^r . J(f').$$

On a donc $(\operatorname{ad} x)^p . u_i \in J(f')$ pour $i = 0, 1, \ldots, n$. Chaque u_i appartient donc au plus grand idéal ad $\mathfrak{g}$-stable contenu dans $J(f')$ c'est-à-dire $J(f).S(\mathfrak{g}')$ (lemme 2.2). D'où le résultat.

3. Semi-invariants dans $L(\mathfrak{g}; Q)$

On démontre dans ce paragraphe des résultats semblables à ceux de [4]. Les méthodes utilisées sont analogues à celles de [4], excepté pour 3.7.

3.1. Proposition. — *Soient Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-stable de $S(\mathfrak{g})$, et I un idéal non nul $\mathfrak{g}$-stable de $B(Q)$. Il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $I \cap B_\lambda(Q) \neq \{0\}$.*

Démonstration. — Le $\mathfrak{g}$-module $B = B(Q)$ (pour la représentation $\eta_Q \mid B$) est réunion croissante de sous-$\mathfrak{g}$-modules de dimension finie trigonalisables; il en est alors de même pour I, et il existe donc $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ et $u \in I - \{0\}$ tels que $u \in B_\lambda$.

3.2. Corollaire. — *Soient Q et B comme en 2.1. Si $a \in L(Q)_\lambda$, il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $b \in B_{\lambda+\mu}$, $c \in B_\mu$ tels que $a = bc^{-1}$.*

Démonstration. — L'ensemble des $u \in B$ tels que $u.a \in B$ est un idéal non nul I de B. Si $x \in \mathfrak{g}$ et $u \in I$, on a

$$(\eta(x).u)a = \eta(x)(u.a) - u.(\eta(x)a) = \eta(x)(u.a) - \lambda(x)u.a \in B.$$

L'idéal I est donc $\mathfrak{g}$-stable; d'après la proposition 2.2, il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$ et $c \in B_p$ tels que $c \in I - \{0\}$. On a alors $c.a = b \in B_{\lambda+\mu}$ et $a = b.c^{-1}$ comme dans l'énoncé du lemme.

3.3. Soit $\Lambda_B = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*; B_\lambda \neq 0\}$. Alors, d'après 3.2,

$$\Lambda_L = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*; L(Q)_\lambda \neq 0\}$$

est le sous-groupe de $\mathfrak{g}^*$ engendré par Λ_B, et on a

$$\textstyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda_B} \ker \lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_L} \ker \lambda.$$

3.4. Proposition. — *Soient $\mathfrak{g}'$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$, Q un idéal premier $\mathfrak{g}$-stable de $S(\mathfrak{g})$, $Q' = Q \cap S(\mathfrak{g}')$ de sorte que $L(\mathfrak{g}'; Q')$*

s'identifie à un sous-corps de $L(\mathfrak{g};\, Q)$. *On suppose que* Q *est l'idéal de* $S(\mathfrak{g})$ *engendré par* Q'. *Soient* $\mu \in \mathfrak{g}^*$, *et* $a \in (L(\mathfrak{g};\, Q))_\mu$. *Il existe* $b \in D(\mathfrak{g};\, Q)$ *et* $c \in (L(\mathfrak{g};\, Q))_\mu \cap L(\mathfrak{g}';\, Q')$ *tels que* $a = b.c$.

Démonstration. — Compte tenu de 3.2, il suffit de démontrer le résultat pour $a \in B(Q)$, et on peut supposer $a \neq 0$.

Soient $x \in \mathfrak{g}$ tel que $x \notin \mathfrak{g}'$, et u un représentant de a dans $S(\mathfrak{g})$. L'élément u s'écrit de manière unique

$$u = x^n u_n + x^{n-1} u_{n-1} + \ldots + u_0 \qquad \text{avec} \quad u_0, \ldots, u_n \in S(\mathfrak{g}').$$

Les u_i n'appartiennent pas tous à Q', et on peut supposer $u_n \notin Q'$. Si $y \in \mathfrak{g}$ et $p \in \mathbf{N}^*$, comme $[\mathfrak{g};\, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}'$, on a $(\operatorname{ad} y).x^p \in x^{p-1} S(\mathfrak{g}')$. On en déduit que, modulo Q,

$$\begin{aligned}&\mu(y)\, x^n u_n + \ldots + \mu(y)\, u_0 \\ &\quad = \mu(y)\, u \equiv (\operatorname{ad} y)\, u = x^n (\operatorname{ad} y.u_n) + x^{n-1} v_{n-1} + \ldots + v_0\end{aligned}$$

avec $v_{n-1}, \ldots, v_0 \in S(\mathfrak{g}')$.

Comme Q est engendré par Q', il vient donc $(\operatorname{ad} y)\,(u_n) \equiv \mu(y)\, u_n \pmod{Q'}$ et il suffit de choisir pour c l'image canonique de u_n dans $B(\mathfrak{g}';\, Q')$ pour obtenir le résultat de la proposition.

3.5. Soit $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ vérifiant $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$. Il existe un automorphisme τ_λ et un seul de $S(\mathfrak{g})$ tel que $\tau_\lambda(x) = x + \lambda(x)$ pour $x \in \mathfrak{g}$.

3.6. Lemme. — *Soient* $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ *telle que* $\lambda([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = 0$, $\mathfrak{g}' = \ker \lambda$, Q *un idéal* $\mathfrak{g}$*-stable de* $S(\mathfrak{g})$, $Q' = Q \cap S(\mathfrak{g})$. *On a* $Q = S(\mathfrak{g})\, Q'$ *si, et seulement si,* $\tau_\lambda(Q) = Q$.

Démonstration. — Si $\lambda = 0$, il n'y a rien à démontrer; nous supposerons donc $\lambda \neq 0$.

Supposons $Q = S(\mathfrak{g})\, Q'$, et soit $x \in \mathfrak{g}$ tel que $\lambda(x) = 1$. Tout élément a de Q s'écrit de manière unique

$$a = x^n a_n + x^{n-1} a_{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{avec} \quad a_0, \ldots, a_n \in Q'.$$

On a alors

$$\tau_\lambda(a) = (x+1)^n a_n + \ldots + a_0 \in S(\mathfrak{g})\, Q'.$$

Donc, $\tau_\lambda(Q) \subset Q$; de même, $\tau_{-\lambda}(Q) \subset Q$, d'où $\tau_\lambda(Q) = Q$.

Supposons $\tau_\lambda(Q) = Q$, et soit

$$a = x^{n(a)} u_{n(a)} + \ldots + u_P \qquad \text{avec} \quad u_{n(a)}, \ldots, u_0 \in S(\mathfrak{g}').$$

Si $n(a) = 0$, on a $a \in Q'$. Supposons montré $a \in S(\mathfrak{g})\, Q'$ pour $n(a) < n$, et soit a tel que $n(a) = n$. Alors,

$$\tau_\lambda(a) - a = n . u_n x^{n-1} + x^{n-2} v_{n-2} + \ldots + v_0 \in Q$$

avec

$$v_{n-2}, \ldots, v_0 \in S(\mathfrak{g}').$$

D'après l'hypothèse de récurrence, il vient $u_n \in Q'$. On en déduit $Q = S(\mathfrak{g})\, Q'$.

3.7. Proposition. — *Soient Q un idéal premier* ad $\mathfrak{g}$-*stable de* $S(\mathfrak{g})$, $\lambda \in \mathfrak{g}^* - \{0\}$ *tels que* $(L(\mathfrak{g};\, Q))_\lambda \neq 0$. *Soient $\mathfrak{g}'$ le noyau de λ, et $Q' = Q \cap S(\mathfrak{g})$. Alors, Q est l'idéal de $S(\mathfrak{g})$ engendré par Q'.*

Démonstration. — Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de la forme bilinéaire alternée $(x, y) \to f([x, y])$ sur $\mathfrak{g}$.

Soient $\mathscr{V}(Q)$ la variété des zéros de Q dans $\mathfrak{g}^*$ et $a \in (L(\mathfrak{g};\, Q))_\lambda - \{0\}$. L'ensemble $\mathscr{V}'(Q)$ des éléments $f \in \mathscr{V}(Q)$, tels que $a(f)$ soit défini et non nul, est un ouvert dense de $\mathscr{V}(Q)$ puisque Q est premier. Il en résulte que

$$Q = \bigcap\nolimits_{f \in \mathscr{V}(Q)} J(f) = \bigcap\nolimits_{f \in \mathscr{V}'(Q)} J(f).$$

Il est facile de voir que si $f \in \mathscr{V}'(Q)$, on a $(\eta_Q(x).a)(f) = 0$ pour $x \in \mathfrak{g}(f)$ soit, $\lambda(x)\, a(f) = 0$ et donc, si $f \in \mathscr{V}'(Q)$, $\lambda(\mathfrak{g}(f)) = 0$ ou encore, $P(f \mid \mathfrak{g}';\, \mathfrak{g}') \subset P(f;\, \mathfrak{g})$ ([3], lemme 1.12.2). D'après le lemme 2.4, il vient donc

$$J(f) = S(\mathfrak{g})(J(f) \cap S(\mathfrak{g})) \qquad \text{pour} \quad f \in \mathscr{V}'(Q)$$

soit, $\tau_\lambda(J(f)) = J(f)$ (lemme 3.6). On en déduit $\tau_\lambda(Q) = Q$, d'où $Q = S(\mathfrak{g})\, Q'$ (lemme 3.6).

3.8. Nous aurons besoin du résultat suivant qui correspond au lemme 1.1 de [22] et dont la démonstration est tout à fait analogue.

Lemme :

(i) *soient χ un caractère rationnel de Γ, et $\lambda = d\chi \mid$* ad $\mathfrak{g}$ *qu'on identifie à un caractère de $\mathfrak{g}$. Soient $P \in$* Spec $U(\mathfrak{g})$ *(resp. $Q \in$* (Spec $S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$*). Alors, $K(P)^\chi = K(P)_\lambda$ (resp. $L(Q)^\chi = L(Q)_\lambda$);*

(ii) *soit $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $K(P)_\lambda \neq \{0\}$ (resp. $L(Q)_\lambda \neq \{0\}$); alors, il existe un caractère rationnel χ de Γ tel que $\lambda = d\chi \mid$* ad $\mathfrak{g}$.

Démonstration. — On fait la démonstration pour $K(P)$; elle serait analogue pour $L(Q)$ compte tenu de 3.2.

(i) Si $n \in \mathbf{N}$, on note $U_n(\mathfrak{g})$ l'ensemble des éléments de $U(\mathfrak{g})$ de filtration $\leqslant n$. Soit $u \to \bar{u}$ la surjection canonique $U(\mathfrak{g}) \to A(P)$. Si $a \in K(P)$, il s'écrit :

$$a = \bar{u}.\bar{v}^{-1} = \bar{w}^{-1}.\bar{r} \quad \text{avec} \quad u, v, w, r \in U_n(\mathfrak{g}) \quad \text{pour un} \quad n \in \mathbf{N}.$$

Il est facile de voir que $a \in K(P)^\chi$ si, et seulement si,

$$\bar{w}(\gamma.\bar{u}) = \chi(\gamma).\bar{r}(\gamma.\bar{v}) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

C'est-à-dire

$$(a) \qquad w(\gamma.u) - \chi(\gamma)\, r(\gamma.v) \in P \cap U_{2n}(\mathfrak{g}).$$

De même, $a \in K(P)_\lambda$ si, et seulement si,

$$\bar{w}(\varepsilon(x)\bar{u}) = \lambda(x)\bar{r}.\bar{v} + \bar{r}(\varepsilon(x)\bar{v}) \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{g}$$

ou

$$(b) \qquad w(\operatorname{ad} x.u) - \lambda(x)\, r.v - r(\operatorname{ad} x.v) \in P \cap U_{2n}(\mathfrak{g}).$$

En différentiant la relation (*a*), on voit alors (tenant compte de [3], 2.4.16 et proposition 2.4.17) que, si $a \in K(P)^\chi$, alors $a \in K(P)_\lambda$ avec $\lambda = d\chi \mid \operatorname{ad} \mathfrak{g}$;

(ii) soit $a \in K(P)_\lambda$; il existe $\mu \in \mathfrak{g}^*$, $u \in (A(P))_{\lambda+\mu}$, $v \in (A(P))_\mu$ tels que $a = u.v^{-1}$ ([1], lemma 6.5). Il suffit donc de démontrer le résultat pour $a \in A(P)_\lambda$. Soit $u \in U_n(\mathfrak{g})$ un représentant de a dans $U(\mathfrak{g})$. On a $(\operatorname{ad} x)\ (k.u + P \cap U_n(\mathfrak{g})) \in k.u + P \cap U_n(\mathfrak{g})$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. D'après [3] (démonstration de la proposition 2.4.17), on a alors

$$\gamma.(k.u + P \cap U_n(\mathfrak{g})) = k.u + P \cap U_n(\mathfrak{g}) \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

Il en résulte que $a \in K(P)^\chi$ pour un caractère χ de Γ. Le caractère χ est alors rationnel car la représentation naturelle de Γ dans $U_n(\mathfrak{g})$ l'est ([3], 2.4.16).

4. Les isomorphismes $\beta(\mathfrak{g})$ et $\beta_P(\mathfrak{g})$

4.1. Rappelons une description de l'isomorphisme $\beta_P(\mathfrak{g})$ ([18], proposition 6.10). Soient $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ et $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$. Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on note $I(f)$ l'idéal primitif de $U(\mathfrak{g})$ associé à f par l'application de Dixmier.

Soient $\operatorname{Sim} \mathscr{V}(Q)$ l'ensemble des points simples de $\mathscr{V}(Q)$, et $u \in C(\mathfrak{g}; P)$. On note $V_u(\mathfrak{g})$ l'ouvert

$$\{f \in \operatorname{Sim} \mathscr{V}(Q);\ \text{il existe } u_1, u_2 \in A(P);\ u = u_1 u_2^{-1};\ u_2 \notin I(f)\}$$

de $\mathscr{V}(Q)$. L'élément $(u_1 \bmod I(f))\ (u_2 \bmod I(f))^{-1}$ appartient à $C(\mathfrak{g}; I(f))$; c'est donc un scalaire noté $\hat{u}(f)$. Ce scalaire ne dépend pas de la décomposition $u = u_1 u_2^{-1}$. La fonction $\hat{u}$, définie sur $V_u(\mathfrak{g})$, est rationnelle, et définit un élément de $L(\mathfrak{g}; Q)$ que nous noterons encore $\hat{u}$. Pour $u \in C(\mathfrak{g}; P)$, on a alors $\hat{u} = \beta_P(\mathfrak{g})(u)$.

4.2. LEMME. — *Soient $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$, $\mathfrak{g}'$ un idéal de $\mathfrak{g}$, $P' = P \cap U(\mathfrak{g}')$, $Q' = Q \cap S(\mathfrak{g}')$ de sorte que $K(\mathfrak{g}'; P')$ s'identifie à un sous-corps de $K(\mathfrak{g}; P)$:*

(i) *on a* $\beta(\mathfrak{g}')(P') = Q'$;

(ii) *si* $\gamma \in \Gamma$ *et* $u \in K(\mathfrak{g}'; P')$, *on a* $\beta_{P'}(\mathfrak{g}')(\gamma . u) = \gamma . \beta_{P'}(\mathfrak{g}')(u)$;

(iii) *si* $u \in C(\mathfrak{g}; P) \cap C(\mathfrak{g}'; P')$, *on a* $\beta_P(\mathfrak{g})(u) = \beta_{P'}(\mathfrak{g}')(u)$.

Démonstration :

(i) rappelons que si $Q \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$, on a ([18], proposition 6.6) :

$$\beta^{-1}(\mathfrak{g})(Q) = \bigcap\nolimits_{f \in \mathscr{V}(Q)} I(f).$$

Notons $\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}'^*$ l'application de restriction; si $f \in \mathfrak{g}^*$, il vient alors $I(f) \cap U(\mathfrak{g}') = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} I(\pi(\gamma . f))$ ([3], lemme 6.5.1 ou [17], lemme 3.2). L'ensemble $\mathscr{V}(Q)$ étant Γ-stable, on en déduit

$$P' = \bigcap\nolimits_{f \in \mathscr{V}(Q)} I(\pi(f)) = \bigcap\nolimits_{g \in \pi(\mathscr{V}(Q))} I(g).$$

Comme $\pi(\mathscr{V}(Q))$ contient un ouvert partout dense de $\mathscr{V}(Q')$, et que l'application de DIXMIER $f \to I(f)$ est continue ([3], théorème 6.4.4), il vient donc

$$P' = \bigcap\nolimits_{g \in \pi(\mathscr{V}(Q))} I(g) = \bigcap\nolimits_{g \in \mathscr{V}(Q')} I(g)$$

c'est-à-dire $P' = \beta^{-1}(\mathfrak{g}')(Q')$;

(ii) cette assertion est claire par transport de structure;

(iii) soit $u = u_1 u_2^{-1} \in C(\mathfrak{g}; P) \cap C(\mathfrak{g}'; P')$ avec $u_1, u_2 \in A(\mathfrak{g}'; P')$. Notons $\hat{u}_{\mathfrak{g}}$ et $\hat{u}_{\mathfrak{g}'}$ les fonctions définies par u sur $V_u(\mathfrak{g})$ et $V_u(\mathfrak{g}')$ comme en 4.1. Pour $f \in \mathscr{V}(Q)$, on a

$$U(\mathfrak{g}') \cap I(f) \subset I(\pi(f)) \qquad ([3], \text{lemme } 6.5.1 \text{ ot } [19], \text{lemme } 3.2)$$

donc, si $u_2 \notin I(\pi(f))$, $u_2 \notin I(f)$. Il existe donc un ouveit non vide W de $V_u(\mathfrak{g})$ tel que $\pi(W)$ contienne un ouvert non vide de $V_u(\mathfrak{g}')$. On a alors $\hat{u}_{\mathfrak{g}}(f) = \hat{u}_{\mathfrak{g}'}(\pi(f))$ puisque $U(\mathfrak{g}') \cap I(f) \subset I(\pi(f))$. Sur l'ouvert W, la fonction $f \to \hat{u}_{\mathfrak{g}}(f)$ ne dépend que de $\pi(f)$, et définit donc un élément de $L(\mathfrak{g}'; P')$. On en déduit (iii).

5. L'isomorphisme des semi-centres

5.1. PROPOSITION :

(i) *soient* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$,

$$\Lambda_K = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*;\ K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda \neq \{0\}\},$$

$$\Lambda_L = \{\lambda \in \mathfrak{g}^*;\ L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda \neq \{0\}\}.$$

Alors, $\Lambda_K = \Lambda_L$.
Si $\mathfrak{g}_\Lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_L} \ker \lambda$, *on a pour tout* $\lambda \in \Lambda_L : L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda \subset D(\mathfrak{g}_\Lambda;\ Q \cap S(\mathfrak{g}_\Lambda))$;

(ii) *il existe un isomorphisme canonique prolongeant* $\beta_P(\mathfrak{g})$ *de* $SC(\mathfrak{g};\ P)$ *sur* $SD(\mathfrak{g};\ Q)$ *qui transforme* $K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda$ *en* $L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda_L$.

Démonstration :

(ii) notons $\mathfrak{g}_{\Lambda_K} = \bigcap_{\lambda \in \Lambda_K} \ker \lambda$. Si $\lambda \in \Lambda_K$, on sait que

$K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda \subset C(\mathfrak{g}_{\Lambda_K};\ P \cap U(\mathfrak{g}_{\Lambda_K}))$ ([1], lemme 6.5 et Satz 6.1).

Compte tenu des lemmes 3.8 et 4.2 (ii), il vient

$$\beta_{P \cap U(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})}(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})(K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda) \subset L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda.$$

Inversement, soit $\lambda \in \Lambda_L$. Tout élément $a \in L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda$ s'écrit $a = b.c$ avec

$$b \in D(\mathfrak{g};\ Q) \qquad \text{et} \qquad c \in L(\ker\lambda;\ Q \cap S(\ker\lambda)) \cap L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda$$

(propositions 3.4 et 3.7).

On a $\beta^{-1}(\mathfrak{g})(b) \in C(\mathfrak{g};\ P)$, donc

$$b \in D(\mathfrak{g}_{\Lambda_K};\ Q \cap S(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})) \qquad \text{(lemme 4.2 iii).}$$

De même, $c \in D(\ker\lambda;\ S(\ker\lambda) \cap Q)$, donc

$$\beta^{-1}_{P \cap U(\ker\lambda)}(\ker\lambda)(c) \in K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda \subset C(\mathfrak{g}_{\Lambda_K};\ P \cap U(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})),$$

d'où on déduit

$$c \in L(\mathfrak{g}_{\Lambda_K};\ Q \cap S(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})) \qquad \text{(lemme 4.2).}$$

On voit donc que, si on pose

$$\beta^\lambda_P(\mathfrak{g})(u) = \beta_{P \cap U(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})}(\mathfrak{g}_{\Lambda_K})(u) \qquad \text{pour} \quad u \in K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda,$$

on définit un isomorphisme de l'espace vectoriel $K(\mathfrak{g};\ P)_\lambda$ sur l'espace vectoriel $L(\mathfrak{g};\ Q)_\lambda$. L'application $\oplus_{\lambda \in \Lambda_K} \beta^\lambda_P(\mathfrak{g})$ définit alors un isomorphisme d'algèbres

$$\oplus_{\lambda \in \Lambda_K}(K(\mathfrak{g};\ P))_\lambda \to \oplus_{\lambda \in \Lambda L}(L(\mathfrak{g};\ Q))_\lambda.$$

Par passage au corps des fractions, on obtient donc un isomorphisme de $SC(\mathfrak{g}; P)$ sur $SD(\mathfrak{g}; Q)$. Le fait que cet isomorphisme prolonge $\beta_P(\mathfrak{g})$ résulte du lemme 3.2 (ii). L'assertion (i) résulte de cette démonstration.

5.2. *Remarque.* — Soit u un semi-invariant de $A(P)$; on ignore si l'image de u par l'isomorphisme précédemment défini est un élément de $B(Q)$ (*cf.* [20]).

III. — Entiers attachés a un quotient premier

1. Introduction et notations

On désigne par k un corps commutatif algébriquement clos de caractéristique 0, par $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie résoluble de dimension finie, et par Γ son groupe adjoint algébrique. On conserve en outre les notations des parties I et II. Pour les rappels concernant cette partie, on renvoie à [1], [3], [10], [11] et [18]. Soit $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$; on désigne par $E(P)$ l'ensemble des semi-invariants non nuls de $A(P)$ de sorte que $SZ(P)$ est la sous-algèbre de $A(P)$ engendrée par $E(P)$. D'après [10] et [11], $E(P)$ permet un calcul de fractions dans $A(P)$ et l'algèbre $(A(P))_{E(P)}$ (qui est simple) est isomorphe à une algèbre $\mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$ sur le corps $C(P)$. Il est donc naturel d'essayer d'interpréter pour $\mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$ les entiers déterminés dans la première partie et pour cela, de calculer différents entiers attachés à l'algèbre $A(P)$. Dans cette partie, nous calculerons quatre des invariants déjà mis en évidence, et nous démontrerons l'égalité

$$\operatorname{Dim}_k A(I(f)) = \dim \Gamma . f \qquad \text{pour} \quad f \in \mathfrak{g}^* \qquad \text{(corollaire 2.5).}$$

2. Dimension de Gel'fand-Kirillov d'un quotient premier

2.1. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie résoluble, et* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$. *On a*

$$\operatorname{Dim}_k A(P)_{E(P)} = \operatorname{Dim}_k A(P).$$

Démonstration. — Soient $x \to \bar{x}$ la surjection canonique $U(\mathfrak{g}) \to A(P)$ et $a \in E(P)$. Il existe $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ tel que $[x, a] = \lambda(x) a$ pour tout $x \in \mathfrak{g}$. On en déduit que la dérivation $\delta_a : X \to aX - Xa$ de $A(P)$ est localement nilpotente. Comme $SZ(P)$ est une algèbre intègre ([3], 4.3.5) et commutative, le lemme résulte de [2], Satz 6.1.

2.2. Rappelons le résultat suivant ([18], paragraphe 6).

Soient $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $x \to \bar{x}$ la surjection canonique $U(\mathfrak{g}) \to A(P)$, et $\hat{P}$ le noyau de l'application $U(\mathfrak{g}) \otimes_k C(P) \to K(P)$ définie par $a \otimes b \to \bar{a}.b$. Soient K une extension algébriquement close de $C(P)$, et $\mathscr{P}$ un élément de Prim $(U(\mathfrak{g}) \otimes_k K)$ tel que $\mathscr{P} \cap U(\mathfrak{g}) = P$. L'inclusion $A(P) \to U(\mathfrak{g} \otimes_k K)/\mathscr{P}$ induit un k-homomorphisme $\varphi : C(P) \to K = (\operatorname{Fract}(U(\mathfrak{g}) \otimes_k K)/\mathscr{P}))^{\mathfrak{g}}$; pour l'extension

$$\varphi : C(P) \to \mathrm{K}, \text{ on a alors, } \mathscr{P} = \hat{P} \otimes_{C(P)} \mathrm{K}.$$

2.3. Lemme. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie résoluble,* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$, *K une extension algébriquement close de* $C(P)$, $f \in (\mathfrak{g} \otimes_k K)^*$ *tel que* $P = U(\mathfrak{g}) \cap I(f)$, $Q = S(\mathfrak{g}) \cap J(f)$. *On a :*

(i) $\operatorname{Dim}_K(U(\mathfrak{g} \otimes_k K)/I(f)) = \operatorname{Dim}_k(U(\mathfrak{g})/P) - \operatorname{deg\,tr}_k C(P)$;

(ii) $\operatorname{Dim}_k(S(\mathfrak{g} \otimes_k K)/J(f)) = \operatorname{Dim}_k(S(\mathfrak{g})/Q) - \operatorname{deg\,tr}_k C(P)$.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord qu'un élément $f \in (\mathfrak{g} \otimes_k K)^*$ vérifiant les conditions du lemme existe d'après [18], paragraphe 6.

Démontrons la première égalité, la seconde se démontrant de manière analogue. Notons pour simplifier $U = U(\mathfrak{g})$, $\bar{U} = U(\mathfrak{g})/P$, $C = C(P)$. Soit Φ le composé des applications canoniques

$$U(\mathfrak{g} \otimes_k C) \xrightarrow{\sim} U \otimes_k C \to \bar{U} \otimes_k C \to \bar{U}.C.$$

D'après 2.2, l'idéal $I = I(f)$ est le noyau de l'homomorphisme

$$\bar{U}(\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{K}) \to \bar{U}.C \otimes_C \mathrm{K}$$

induit par Φ. Il vient donc $U(\mathfrak{g} \otimes_k K)/I = \bar{U}.C \otimes_C K$ d'où,

$$\operatorname{Dim}_C \bar{U}.C = \operatorname{Dim}_K \bar{U}.C \otimes_C \mathrm{K} = \operatorname{Dim}_K (U(\mathfrak{g} \otimes_k \mathrm{K})/I).$$

— Montrons tout d'abord $\operatorname{Dim}_C \bar{U}.C = \dim_k \bar{U}.C - \operatorname{deg\,tr}_k C$.

Soient $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ une suite d'idéaux de $\mathfrak{g}$ tels que $\dim \mathfrak{g}_i = i$ et $A_i = C[\bar{\mathfrak{g}}_i]$ la sous-algèbre de $\bar{U}.C$ engendrée par $\bar{\mathfrak{g}}_i$.

Soient $\mathfrak{g}_1 = k.x_1$, et $A_1 = C[\bar{x}_1]$; comme A_1 est intègre (car $\bar{U}.C$ l'est) et commutative, on a

$$\operatorname{Dim}_C A_1 = \operatorname{deg\,tr}_C(\operatorname{Fract} A_1)$$

et

$$\operatorname{Dim}_k A_1 = \operatorname{deg\,tr}_k(\operatorname{Fract} A_1) \qquad ([2]\, 2.1).$$

Il vient donc

$$\operatorname{Dim}_C A_1 = \operatorname{Dim}_k A_1 - \operatorname{deg\,tr}_k C.$$

Supposons montré $\mathrm{Dim}_C A_p = \mathrm{Dim}_k A_p - \deg \mathrm{tr}_k\ C$ avec $1 \leqslant p < n$. Soient $x \in \mathfrak{g}_{p+1}$ tel que $x \notin \mathfrak{g}_p$, $D = \mathrm{ad}_{\bar{U}\cdot D}\, \bar{x} \mid A_p$ et $\varphi : (A_p)_D [X] \to A_{p+1}$ l'homomorphisme surjectif qui prolonge l'identité de A_p et tel que $\varphi(X) = \bar{x}$. Si φ est injectif, on a

$$\mathrm{Dim}_C A_{p+1} = 1 + \mathrm{Dim}_C A_p$$

et

$$\mathrm{Dim}_k A_{p+1} = 1 + \mathrm{Dim}_k A_p \qquad ([2],\ 3.1(c)).$$

Supposons φ non injectif; son noyau R est un idéal complètement premier de $(A_p)_D [X]$. D'après [2], Korollar 3.5, il vient donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Dim}_C A_p &\leqslant \mathrm{Dim}_C A_{p+1}\\ &= \mathrm{Dim}_C((A_p)_D[X]/R) \leqslant \mathrm{Dim}_C((A_p)_D[X]) - 1 = \mathrm{Dim}_C A_p.\end{aligned}$$

On en déduit $\mathrm{Dim}_C A_{p+1} = \mathrm{Dim}_C A_p$, et on aurait de même,

$$\mathrm{Dim}_k A_{p+1} = \mathrm{Dim}_k A_p.$$

On a donc

$$\mathrm{Dim}_C \bar{U}.C = \mathrm{Dim}_k \bar{U}.C - \deg \mathrm{tr}_k C.$$

– Montrons maintenant $\mathrm{Dim}_k\ \bar{U}.C = \mathrm{Dim}_k\ \bar{U}$. On a en effet d'après [3], corollaire 4.4.2, $\bar{U} \subset \bar{U}.C \subset \bar{U}_{E(P)}$; le résultat est donc une conséquence du lemme 2.1.

2.4. Théorème. – *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie sur un corps* k *algébriquement clos de caractéristique* 0, $P \in \mathrm{Spec}\ U(\mathfrak{g})$ *et* $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$. *On a*

$$\mathrm{Dim}_k A(P) = \mathrm{Dim}_k B(Q).$$

Démonstration :

– On note (A_n) l'assertion suivante :

Pour tout triplet $(k, \mathfrak{g}, P)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie résoluble telle que $\dim_k \mathfrak{g} \leqslant n$, et $P \in \mathrm{Spec}\ U(\mathfrak{g})$, on a

$$\mathrm{Dim}_k A(P) = \mathrm{Dim}_k B(\beta(P)).$$

– On note (B_n) l'assertion suivante :

Pour tout triplet $(k, \mathfrak{g}, f)$, où k est un corps algébriquement clos de caractéristique 0, $\mathfrak{g}$ une k-algèbre de Lie résoluble, telle que $\dim_k \mathfrak{g} \leqslant n$ et $f \in \mathfrak{g}^*$, on a

$$\mathrm{Dim}_k A(I(f)) = \mathrm{Dim}_k B(J(f)).$$

On démontre maintenant le théorème par récurrence sur $n = \dim \mathfrak{g}$ le cas $n = 1$ étant trivial. D'après le lemme 2.3, on a $(B_n) \Rightarrow (A_n)$; il suffit donc de démontrer $(A_{n-1}) \Rightarrow (B_n)$.

(*a*) Supposons $f \mid [\mathfrak{g}; \mathfrak{g}] = 0$; alors $A(I(f)) = k$, $B(J(f)) = k$; le résultat est donc trivial. On suppose dans la suite le cas (*a*) exclu.

(*b*) Notons $\mathfrak{g}(f)$ le noyau de la forme alternée $(x, y) \to f([x, y])$ et supposons $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(f)$. Posant $\mathfrak{n} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, et $g = f \mid \mathfrak{n}$, il vient alors ([3], lemme 6.5.4)

$$A(I(f)) = U(\mathfrak{n})/I(g); \qquad B(J(f)) = S(\mathfrak{n})/J(g).$$

D'où à nouveau le résultat.

(*c*) Supposons $\mathfrak{g} \neq [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(f)$. Soient $\mathfrak{g}_1$ un idéal de codimension 1 de $\mathfrak{g}$ contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}(f)$, x un élément de $\mathfrak{g}$ n'appartenant pas à $\mathfrak{g}_1$ et $\bar{x}$ (resp. $\tilde{x}$) son image canonique dans $A(I(f))$ (resp. $B(J(f))$). Comme $\mathfrak{g}(f) \subset \mathfrak{g}_1$, toute polarisation de $\mathfrak{g}_1$ en $f \mid \mathfrak{g}_1$ est une polarisation de $\mathfrak{g}$ en f ([3], lemme 1.12.2) et, d'après [19] lemme 3, et paragraphe II, lemme 2.3, on a

$$I(f) = U(\mathfrak{g})(I(f) \cap U(\mathfrak{g}_1)) = (I(f) \cap U(\mathfrak{g}_1))\, U(\mathfrak{g})$$

et

$$J(f) = S(\mathfrak{g})(J(f) \cap S(\mathfrak{g}_1)).$$

Posons

$$N = U(\mathfrak{g}_1)/(I(f) \cap U(\mathfrak{g}_1)) \qquad \text{et} \qquad N' = S(\mathfrak{g}_1)/(J(f) \cap S(\mathfrak{g}_1)).$$

Soient X une indéterminée, $D = \mathrm{ad}_{A(I(f))}\, \bar{x} \mid N$ et $p : N_D[X] \to A(I(f))$ l'homomorphisme qui prolonge l'identité de N et tel que $p(X) = \bar{x}$. D'après ce qui précède, P est un isomorphisme, et il vient donc ([2], lemme 3.1 (*c*))

$$\mathrm{Dim}_k A(I(f)) = 1 + \mathrm{Dim}_k N.$$

On aurait de même, $B(J(f)) = N'[\tilde{x}]$ et donc

$$\mathrm{Dim}_k B(J(f)) = 1 + \mathrm{Dim}_k N'.$$

Comme $\beta(\mathfrak{g})(I(f)) = J(f)$, on a

$$\beta(\mathfrak{g}_1)(I(f) \cap U(\mathfrak{g}_1)) = S(\mathfrak{g}_1) \cap J(f) \qquad (\S\,\text{II, lemme 4.1 (i)}).$$

On en déduit le théorème.

2.5. COROLLAIRE. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une* k*-algèbre de Lie résoluble,* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $Q = \beta(P)$, *et* $\mathscr{V}(Q)$ *la variété des zéros de* Q *dans* $\mathfrak{g}^*$.

On a

$$\mathrm{Dim}_k A(P) = \dim_k \mathscr{V}(Q).$$

En particulier, pour tout $f \in \mathfrak{g}^*$, *on a*

$$\mathrm{Dim}_k A(I(f)) = \dim_k \Gamma . f.$$

Démonstration. — Comme $B(Q)$ est commutative et intègre, $\mathrm{Dim}_k\, B(Q)$ est égal à $\deg \mathrm{tr}_k (\mathrm{Fract}\, B(Q))$; on en déduit la première assertion. La deuxième résulte du fait que $J(f)$ est l'ensemble des éléments de $S(\mathfrak{g})$ nuls sur $\Gamma . f$.

2.6 [Les sections 2.6. à 2.9. ont été ajoutées au texte original le 6 décembre 1977]. — Si P est un idéal premier de $U(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g})$), on appelle hauteur de P (notée $\mathrm{ht}(P)$) la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ (resp. $S(\mathfrak{g})$) contenus dans P. Utilisant le corollaire 2.5., nous allons démontrer le résultat suivant qui généralise [15] (corollaire de la proposition 2) et [8] (corollaire 2).

THÉORÈME. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une k-algèbre de Lie résoluble,* $P \in \mathrm{Spec}\, U(\mathfrak{g})$ *et* $Q = \beta_{\mathfrak{g}}(P)$. *On a*

$$\mathrm{ht}(P) = \mathrm{ht}(Q) = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathscr{V}(Q).$$

2.7. LEMME. — *Soient X une variété affine, irréductible, et* Γ *un groupe algébrique, affine, connexe et résoluble opérant régulièrement sur X. Soient n la dimension de X, et F un fermé irréductible,* Γ*-stable de X de dimension* $d < n$. *Alors, il existe un fermé* F' *de X, irréductible, contenant F,* Γ*-stable et vérifiant* $\dim F' = 1 + \dim F$.

Démonstration. — Je dois à R. RENTSCHLER l'idée de la démonstration très simple de ce lemme.

Le résultat est évident si $n-d = 1$. Raisonnons par récurrence sur la valeur de l'entier $n-d$.

Soit A une k-algèbre vérifiant $X = \mathrm{Specm}(A)$ (spectre maximal). On a $F = \mathscr{V}(P)$, où P est un idéal premier Γ-stable de A. Le groupe Γ étant résoluble, il existe $t \in P\text{-}\{0\}$ semi-invariant pour l'action de Γ. Soient $H = \mathscr{V}(t)$, et $V_1, \ldots, V_r$ les composantes irréductibles de H. L'élément t étant semi-invariant, toutes ces variétés sont Γ-stables, et $F \subset H$. La variété H étant une hypersurface dans X, tous les V_i $(1 \leqq i \leqslant r)$ sont de dimension $n-1$. Si $F \subset V_s$, on a alors le résultat en appliquant l'hypothèse de récurrence au couple (F, V_s).

2.8. DÉFINITION. — *Soit* $Q \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$. *On appelle* $\mathfrak{g}$-*hauteur de* Q (*notée* $\operatorname{ht}_{\mathfrak{g}}(Q)$) *la longueur maximale des chaînes d'idéaux premiers* $\mathfrak{g}$-*stables contenus dans* Q.

PROPOSITION. — *Si* $Q \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))_{\mathfrak{g}}$, *on a* $\operatorname{ht}_{\mathfrak{g}}(Q) = \operatorname{ht}(Q)$.

Démonstration. — Il est clair que $\operatorname{ht}_{\mathfrak{g}}(Q) \leqslant \operatorname{ht}(Q)$. Si Γ est le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$, on peut trouver, par applications itérées du lemme 2.7, des fermés irréductibles, Γ-stables

$$F_r = \mathscr{V}(Q) \subset F_{r-1} \subset \ldots \subset F_0 = \mathfrak{g}^*$$

avec $\dim F_{i+1} - \dim F_i = 1$. On a donc

$$\operatorname{ht}_{\mathfrak{g}}(Q) \geqslant \dim \mathfrak{g} - \dim \mathscr{V}(Q) = \operatorname{ht}(Q),$$

ce qui démontre la proposition.

2.9. *Démonstration du théorème* 2.6. — Soient $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ et $Q = \beta_{\mathfrak{g}}(P)$. Soit

$$(0) = Q_0 \subset Q_1 \subset \ldots \subset Q_r = Q$$

une chaîne d'éléments de $(\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$ de longueur maximale, et $P_i = \beta_{\mathfrak{g}}^{-1}(Q_i)$ pour $i = 0, 1, \ldots, r$.

D'après [6] (corollaire 6.7), on a

$$(0) = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_r = P.$$

On a donc, $\operatorname{ht}(P) \geqslant \operatorname{ht}_{\mathfrak{g}}(Q) = \operatorname{ht}(Q)$ (proposition 2.8), c'est-à-dire

$$\operatorname{ht}(P) \geqslant \dim \mathfrak{g} - \dim \mathscr{V}(Q).$$

D'autre part, d'après [2] (Korollar 3.5), on a

$$\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{g})/P) \leqslant \operatorname{Dim} U(\mathfrak{g}) - \operatorname{ht}(P),$$

soit

$$\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{g})/P) \leqslant \dim \mathfrak{g} - \operatorname{ht}(P).$$

Cette dernière inégalité s'écrit, compte tenu du lemme 2.5,

$$\operatorname{ht}(P) \leqslant \dim \mathfrak{g} - \dim \mathscr{V}(Q),$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

3. Interprétation des invariants de $\mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$

3.1. Soient $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$; comme il a déjà été vu au paragraphe III. 1, l'algèbre $(A(P))_{E(P)}$ est isomorphe à une algèbre $\mathscr{A} = \mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$ sur le corps $C(P)$. Utilisant les notations du paragraphe I, nous poserons

$$C = U(V^G) \otimes_{C(P)} C(P).G, \qquad D = U(V^{G\delta}) \otimes_{C(P)} C(P).G;$$

nous désignerons en outre par T le commutant de $SZ(P)$ dans $A(P)$, et par $Z(T)$ le centre de T.

3.2. PROPOSITION. — *Soient* $P \in \mathrm{Spec}\ U(\mathfrak{g})$ *et* $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$. *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) $\mathrm{rang}(G) = \deg \mathrm{tr}_k SC(P) - \deg \mathrm{tr}_k C(P)$.

(ii) $\dim_{C(P)} V = \dim_k \mathscr{V}(Q) - \deg \mathrm{tr}_k SC(P)$.

(iii) $\dim_{C(P)} V^G = \mathrm{Dim}_k T - \deg \mathrm{tr}_k SC(P)$.

(iv) $\dim_{C(P)} V_{G\delta} = \deg \mathrm{tr}_k (\mathrm{Fract}\ Z(T)) - \deg \mathrm{tr}_k SC(P)$.

Démonstration :

(i) compte tenu de la démonstration du corollaire 6.5 (4) de [10], il est facile de voir que $(SZ(P))_{E(P)}$ et $C(P).G$ se correspondent par l'isomorphisme

$$(A(P))_{E(P)} \to \mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G).$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\mathrm{rang}(G) &= \mathrm{Dim}_{C(P)} C(P).G = \deg \mathrm{tr}_{C(P)} \mathrm{Fract}(C(P).G) \qquad ([2], 2.1)\\ &= \deg \mathrm{tr}_{C(P)} SC(P) = \deg \mathrm{tr}_k SC(P) - \deg \mathrm{tr}_k C(P);\end{aligned}$$

(ii) soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ une $C(P)$-base de V; on a alors, avec des notations évidentes,

$$\mathscr{A} = ((\ldots(C(P).G)_{D_1}[v_1])\ldots)_{D_n}[v_n]).$$

On en déduit ([2], lemma 3.1 (c))

$$\mathrm{Dim}_k \mathscr{A} = \dim_{C(P)} V + \mathrm{Dim}_k (C(P).G).$$

Comme

$$\mathrm{Dim}_k (C(P).G) = \deg \mathrm{tr}_k SC(P)$$

et

$$\mathrm{Dim}_k \mathscr{A} = \mathrm{Dim}_k A(P) = \dim_k \mathscr{V}(Q)$$

(lemme 2.1), on obtient (ii);

(iii) l'algèbre $SZ(P)$ est commutative; il en résulte que le commutant de $(SZ(P)_{E(P)}$ dans $(A(P))_{E(P)}$ est $T_{E(P)}$. Recopiant la démonstration du lemme 2.1, on obtient $\mathrm{Dim}_k T_{E(P)} = \mathrm{Dim}_k T$. On termine alors comme en (ii);

(iv) le centre D de C s'identifie à $(Z(T))_{E(P)}$; on obtient alors le résultat comme en (ii) et (iii).

3.3. D'après la proposition 3.2, il nous faut, pour résoudre le problème posé au paragraphe III. 1, déterminer certains invariants de l'algèbre $A(P)$; la fin de ce travail est consacrée à cette détermination.

Rappelons que Γ désigne le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$. Soit Γ_0 l'intersection des noyaux des caractères rationnels de Γ. Soient $Q \in (\operatorname{Spec} S(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}}$, $P = \beta^{-1}(\mathfrak{g})(Q)$, et $r_\Gamma(Q)$ (resp. $r_{\Gamma_0}(Q)$) la dimension maximale des Γ-orbites (resp. Γ_0-orbites) dans $\mathscr{V}(Q)$. Puisque $\beta_P(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme de $C(\mathfrak{g}; P)$ sur $D(\mathfrak{g}; P)$, on a

$$\deg \operatorname{tr}_k C(\mathfrak{g}; P) = \dim \mathscr{V}(Q) - r_\Gamma(Q).$$

Soit Γ_1 l'intersection des noyaux des caractères de Γ qui sont poids d'éléments semi-invariants dans $L(\mathfrak{g}; Q)$. D'après [16], II, lemme 5 ou [5], lemme 3.2. on a

$$SD(\mathfrak{g}; Q) = (L(\mathfrak{g}; Q))^{\Gamma_0} = (L(\mathfrak{g}; Q))^{\Gamma_1}$$

Compte tenu de II, proposition 5.1 (ii), il vient

$$\deg \operatorname{tr}_k SC(\mathfrak{g}; P) = \dim \mathscr{V}(Q) - r_{\Gamma_0}(Q).$$

On a donc obtenu le résultat suivant.

PROPOSITION. — *Soient* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$ *et* $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$. *Avec les notations précédentes, on a :*

(i) $\deg \operatorname{tr}_k C(\mathfrak{g}; P) = \dim \mathscr{V}(Q) - r_\Gamma(Q)$;

(ii) $\deg \operatorname{tr}_k SC(\mathfrak{g}; P) = \dim \mathscr{V}(Q) - r_{\Gamma_0}(Q)$.

Remarque. — Il peut n'exister aucune sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $SD(\mathfrak{g}; Q) = (L(\mathfrak{g}; Q))^{\mathfrak{h}}$. En En effet, soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base x, y, z, t avec $[x, t] = t$, $[x, y] = z$, les autres crochets étant nuls ou s'en déduisant par antisymétrie. On voit facilement que $SD(\mathfrak{g}; 0) = k(z, t)$ mais que $SD(\mathfrak{g}; 0) \neq (L(\mathfrak{g}; 0))^{\mathfrak{h}}$ pour toute sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$.

3.4. Notons Λ l'ensemble des formes linéaires sur $\mathfrak{g}$ qui sont poids de semi-invariants dans $K(\mathfrak{g}; P)$ (ou dans $L\,\mathfrak{g}; Q)$ d'après la proposition II.5.1), $\mathfrak{g}_\Lambda = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \ker \lambda$. Le lemme suivant est aussi démontré dans [6].

LEMME. — *Le commutant* T *de* $SZ(\mathfrak{g}; P)$ *dans* $A(P)$ *est égal à* $U(\mathfrak{g}_\Lambda)/(P \cap U(\mathfrak{g}_\Lambda))$.

Démonstration. — D'après [1], lemma 6.5, il existe des éléments $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ de $\mathfrak{g}^*$ linéairement indépendants qui sont poids d'éléments semi-invariants dans $A(P)$ et qui engendrent dans $\mathfrak{g}^*$ le même sous-espace que Λ (ce sous-espace est l'orthogonal $\mathfrak{g}_\Lambda^\perp$ de $\mathfrak{g}_\Lambda$ dans $\mathfrak{g}^*$). Soient $x_1, \ldots, x_r$ des éléments de $\mathfrak{g}$ tels que $\lambda_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant r$; on a alors ([1], Satz 6.1) :

$$A(P) = (\ldots((U(\mathfrak{g}_\Lambda)/(P \cap U(\mathfrak{g}_\Lambda)))_{D_1}[x_1]) \ldots)_{D_r}[x_r]),$$

où D_i est la dérivation de $A(P)$ induite par ad x_i.

Soit $u_i \in SZ(\mathfrak{g}; P)$ de poids λ_i pour $i = 1, 2, \ldots, r$. Un élément a de $A(P)$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$a = \sum_{i_1, \ldots, i_r \in \mathbf{N}} a_{i_1, \ldots, i_r} x_1^{i_1} \ldots x_r^{i_r} \qquad \text{avec} \quad a_{i_1, \ldots, i_r} \in U(\mathfrak{g}_\Lambda)/(P \cap U(\mathfrak{g}_\Lambda)).$$

Si m est le degré de a en $x_1, \ldots, x_r$, et si $i_1 + \ldots + i_r = m$, on obtient facilement

$$(\operatorname{ad} u_1)^{i_1} \ldots (\operatorname{ad} u_r)^{i_r} . a = i_1 !\, i_2 ! \ldots i_r !\, a_{i_1, \ldots, i_r} u_1^{i_1} \ldots u_r^{i_r}.$$

On voit donc que $a \in T$ si, et seulement si, $a \in U(\mathfrak{g}_\Lambda)/(U(\mathfrak{g}_\Lambda) \cap P)$.

3.5. D'après [1] (Satz 6.1) et [2] (lemma 3.1. (*c*)), il vient donc

$$\operatorname{Dim} T = \operatorname{Dim} A(P) - \dim \mathfrak{g}_\Lambda^\perp$$

et, compte tenu du corollaire 2.5,

$$\operatorname{Dim} T = \dim \mathscr{V}(Q) - \dim \mathfrak{g}_\Lambda^\perp$$

On voit donc que la détermination de $\operatorname{Dim} T$ se ramène à celle de l'idéal $\mathfrak{g}_\Lambda$. Nous alons voir que celle-ci n'est vraiment explicite que si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique (résultat à rapprocher de [1], chapitre 8, et de [24], proposition 2.2).

Introduisons quelques notations. On désigne par $\mathscr{G}$ la plus petite sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ contenant $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} \mathfrak{g}$ (de sorte que Lie $\Gamma = \mathscr{G}$). Si $f \in \mathfrak{g}^*$, on désigne par $\mathscr{G}(f)$ (resp. Γ_f) le stabilisateur de f dans $\mathscr{G}$ (resp. Γ); on a Lie $\Gamma_f = \mathscr{G}(f)$. Avec les notations du paragraphe III, 3.3, il existe un ouvert U non vide de $\mathscr{V}(Q)$ tel que $\Gamma_1 = \Gamma_0 . \Gamma_f$ pour tout $f \in U$ ([5], théorème 3.3) et, $\mathfrak{g}$ étant résoluble, on a Lie $\Gamma_0 = \mathscr{N}$, plus grand idéal nilpotent de $\mathscr{G}$. On note enfin $\mathscr{I} : \mathfrak{g} \to \mathscr{G}$ l'application $x \to \operatorname{ad}_\mathfrak{g} x$. Compte tenu de ces remarques et de [5], théorème 3.3, il vient la proposition suivante.

PROPOSITION. — *Il existe un ouvert U non vide de $\mathscr{V}(Q)$ tel que, pour tout $f \in U$, on ait $\mathfrak{g}_\Lambda = \mathscr{I}^{-1}(\mathscr{N} + \mathscr{G}(f))$. En particulier, si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique et si $\mathfrak{n}$ est le plus grand idéal nilpotent de $\mathfrak{g}$, on a $\mathfrak{g}_\Lambda = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(f)$ pour tout $f \in U$.*

Exemples :

(*a*) soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie, introduite dans la remarque 3.3, avec $Q = 0$. Il est facile de voir que si $f \in \mathfrak{g}^*$ vérifie $f(z) \neq 0, f(t) \neq 0$, on a $\mathfrak{g}_\Lambda = \mathfrak{n} + \mathfrak{g}(f)$ bien que $\mathfrak{g}$ ne soit pas ad-algébrique.

(*b*) Soit $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de base x, y, z, u, t avec $[x, y] = y$, $[x, t] = -t$, $[y, t] = z$, $[x, u] = z$, les autres crochets étant nuls ou s'en déduisant par antisymétrie. L'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ n'est pas ad-algébrique. Prenons $Q = 0$. D'après [5] (théorème 4.4) et [2] (4.9.6), le semi-centre de $U(\mathfrak{g})$ est égal à son centre, donc $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\Lambda$. Sur l'ouvert $\{f \in \mathfrak{g}^*; f(z) \neq 0\}$, on a $\mathfrak{g}(f) = k.z$, et donc $\mathfrak{n}+\mathfrak{g}(f) = \mathfrak{n} \neq \mathfrak{g}_\Lambda$.

Remarquons qu'on déduit de la proposition précédente le corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble ad-algébrique, de plus grand idéal nilpotent* $\mathfrak{n}$, $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, *et* $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$. *Pour que le semi-centre de* $A(P)$ *soit égal à son centre, il faut et il suffit qu'il existe un ouvert non vide* U *de* $\mathscr{V}(Q)$ *tel que* $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}+\mathfrak{g}(f)$ *pout tout* $f \in U$.

3.6. Revenant à Dim T, on a donc montré qu'il existe un ouvert non vide U de $\mathscr{V}(Q)$ tel que, pour tout $f \in U$,

$$\operatorname{Dim} T = \dim \mathscr{V}(Q) - \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathscr{I}^{-1}(\mathscr{N}+\mathscr{G}(f)));$$

en particulier, si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique,

$$\operatorname{Dim} T = \dim \mathscr{V}(Q) - \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{n}+\mathfrak{g}(f)).$$

3.7. On peut maintenant déterminer Dim $Z(T)$. Soit Γ_Λ le plus petit sous-groupe algébrique de Γ dont l'algèbre de Lie contient

$$\operatorname{ad}_\mathfrak{g} \mathfrak{g}_\Lambda = \mathscr{I}(\mathscr{I}^{-1}(\mathscr{N}+\mathscr{G}(f))) \qquad (\text{pour } f \in U).$$

Notons $r_{\Gamma_\Lambda}(Q)$ la dimension maximale des Γ_Λ-orbites dans $\mathscr{V}(Q)$. L'ensemble des éléments de $L(\mathfrak{g}; Q)$, invariants sous l'action de $\mathfrak{n}_Q(\mathfrak{g}_\Lambda)$, est alors $(L(\mathfrak{g}; Q))^{\Gamma_\Lambda}$. D'après le paragraphe II, lemme 4.1 (ii), cet ensemble est isomorphe à Fract $Z(T)$. Il vient donc

$$\deg \operatorname{tr}_k(\operatorname{Fract} Z(T)) = \operatorname{Dim} Z(T) = \dim \mathscr{V}(Q) - r_{\Gamma_\Lambda}(Q).$$

Si $\mathfrak{g}$ est ad-algébrique, les algèbres de Lie $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{g}(f))$ et $\operatorname{ad}_\mathfrak{g}(\mathfrak{n}+\mathfrak{g}(f))$ sont algébriques pour $f \in U$, et on a $\operatorname{ad}_\mathfrak{g} \mathfrak{g}_\Lambda = \operatorname{Lie} \Gamma_1$. On aura donc $Z(T) = SZ(\mathfrak{g}; P)$ et, dans l'algèbre $\mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$ associée à $A(P)$, on a $V^{G\delta} = 0$. On a donc obtenu un nouveau corollaire.

COROLLAIRE. — *Soient* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie ad-algébrique,* $P \in \operatorname{Spec} U(\mathfrak{g})$, $Q = \beta(\mathfrak{g})(P)$, $\mathscr{A}_{C(P)}(V, \delta, G)$ *l'algèbre* $(A(P))_{E(P)}$. *Avec les notations précédemment introduites, on a :*

(i) $\operatorname{rang}(G) = r_\Gamma(Q) - r_{\Gamma_0}(Q)$;

(ii) $\dim_{C(P)} V = r_{\Gamma_0}(Q)$;

(iii) *soit* $\mathfrak{n}$ *le plus grand idéal nilpotent de* $\mathfrak{g}$. *Il existe un ouvert non vide* U *de* $\mathscr{V}(Q)$ *tel que*

$$\dim_{C(P)} V^G = r_{\Gamma_0}(Q) - \dim \mathfrak{g} + \dim(\mathfrak{n}+\mathfrak{g}(f)) \quad \textit{pour tout } f \in U.$$

(iv) $V^{G\delta} = \{0\}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borho (W.), Gabriel (P.) und Rentschler (R.). — *Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie Algebren.* — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lectures Notes in Math.*, n° 357).

[2] Borho (W.), Kraft (H.). — Über die Gel'fand-Kirillov Dimension, *Math. Annalen*, t. 220, 1976, p. 1-24.

[3] Dixmier (J.). — *Algèbres enveloppantes.* — Paris, Gauthier-Villars, 1974 (*Cahiers scientifiques*, 37).

[4] Dixmier (J.). — Représentations irréductibles des algèbres de Lie résolubles, *J. Math. pures et appl.*, *t.* 45, 1966, p. 1-66.

[5] Dixmier (J.), Duflo (M.) et Vergne (M.). — Sur la représentation co-adjointe d'une algèbre de Lie, *Comp. Math.*, Groningen, t. 29, 1974, p. 209-233.

[6] Guimier (F.). — *Dérivations dans les algèbres* $\mathscr{A}$ (V, δ, G), Paris, 1976 (preprint).

[7] Joseph (A.). — *Sur les algèbres de Weyl*, Cours multigraphié, Université Paris-VI, 1973.

[8] Levasseur (T.). — Dimensions dans les anneaux réguliers non commutatifs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, Série A, t. 287, 1977, p. 657-660.

[9] McConnell (J. C.). — A note on the Weyl algebra A_n, *Proc. London math. Soc.*, séries 3, t. 28, 1974, p. 89-98.

[10] McConnell (J. C.). — Representations of solvable Lie algebras and the Gel'fand-Kirillov conjecture, *Proc. London math. Soc.*, séries 3, t. 29, 1974. p. 453-484.

[11] McConnell (J. C.). — Representations of solvable Lie-algebras, II : Twisted group-rings, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, série 4, t. 8, 1975, p. 157-178.

[12] McConnell (J. C.). — *Rrepresentations of solvable Lie-algebras*, III : *Cancellation theorems*, University of Leeds, 1975 (preprint).

[13] McConnell (J. C.). — *Representations of solvable Lie-algebras.* IV : *An elementary proof of the* $(U/P)_E$*-structure theorem*, University of Leeds, 1976 (preprint).

[14] McNaughton (J. M.). — *A note on cocycle twisted rings of differential operators*, *preprint*, University of Leeds, 1976 (Preprint).

[15] Malliavin-Brameret (M.-P.). — *Dimension d'anneaux dans les algèbres universelles* (à paraître).

[16] Moeglin (C.). — Factorialité dans les algèbres enveloppantes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. 282, 1976, p. 1269-1272.

[17] Renault (G.). — *Algèbre non commutative.* — Paris, Gauthier-Villars, 1976 (*Varia mathematica*).

[18] Rentschler (R.). — L'injectivité de l'application de Dixmier pour les algèbres de Lie résolubles, *Invent. Math.*, t. 23, 1974, p. 49-71.

[19] Rentschler (R.). — Comportement de l'application de Dixmier par rapport à l'anti-automorphisme principal pour les algèbres de Lie résolubles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. 282, 1976, p. 555-557.

[20] Rentschler (R.). — Sur le centre du quotient de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, 268, 1973, p. 689-692.

[21] Rentschler (R.) et Gabriel (P.). — Sur la dimension des anneaux et ensembles ordonnés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. 265, 1967, p. 712-715.

[22] Rentschler (R.) et Vergne (M.). — Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, série 4, t. 6, 1973, p. 389-405.

[23] Tauvel (P.). — Polarisations et représentations induites des algèbres de Lie résolubles, *Bull. Sc. math.*, série 2, n° 100, 1976, p. 33-44.

[24] Tauvel (P.). — Stabilisateurs, *C. R. Acad. Sc. Paris*, série A, t. 283, p. 1976, 287-288.

(Texte reçu le 22 mars,
complété le 2 décembre 1977.)

Patrice Tauvel,
Mathématiques, U.E.R. 47, Tour 46,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.