BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN MOULIN-OLLAGNIER
DIDIER PINCHON

Systèmes dynamiques topologiques I. Étude des limites de cobords

Bulletin de la S. M. F., tome 105 (1977), p. 405-414
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1977__105__405_0>

Bull. Soc. math. France,
105, 1977, p. 405-414.

SYSTÈMES DYNAMIQUES TOPOLOGIQUES

I. Étude des limites de cobords

PAR

JEAN MOULIN-OLLAGNIER et DIDIER PINCHON
[Université Paris-Nord, Villetaneuse
et Labor. Probabilités, Univ. Paris-VI]

RÉSUMÉ. — Dans une note précédant cet article, il a été établi une caractérisation des cocycles qui sont limites de cobords pour l'action sur un espace compact d'un groupe commutatif d'homéomorphismes; un contre-exemple montre que le résultat ne s'étend pas aux groupes résolubles.

Nous présentons dans cet article la solution de ce problème, notamment dans le cas nilpotent.

Un premier résultat de ce type a été démontré par W. KRIEGER.

ABSTRACT. — Before this paper, we established in a communication a characterization of cocycles which are limits of coboundaries for the action of a commutative group of homeomorphisms of a compact space. A counterexample in a solvable case was given there.

We present in this paper the solution of this problem, especially in the nilpotent case.

W. KRIEGER was the first to obtain a result of this type.

1. Introduction

On appelle *système dynamique topologique* la donnée d'un espace métrique compact X et d'un groupe dénombrable d'homéomorphismes de X.

$C(X)$ désigne l'espace des fonctions continues sur X, muni de la norme uniforme. Soit μ une probabilité sur X; on dit que μ est *quasi invariante à dérivée continue* si, pour tout g de G, il existe une fonction continue V_g sur X telle que $\mu(f \circ g) = \mu(f . \exp V_g)$ pour toute f de $C(X)$. Sur le support de μ, les fonctions V_g, $g \in G$, vérifient les relations $V_{gh} = V_g + V_h \circ g^{-1}$. Cela justifie la définition suivante.

Cocycles. — On appelle *cocycle* une application $V : g \mapsto V_g$ de G dans l'espace $C(X)$ vérifiant

$$\forall g \in G, \quad \forall h \in G, \qquad V_{gh} = V_g + V_h \circ g^{-1}.$$

On dit que le cocycle V est un *cobord* s'il existe une fonction f de $C(X)$ telle que

$$\forall g \in G, \qquad V_g = f \circ g^{-1} - f.$$

On vérifie que l'ensemble des cocycles forme un espace vectoriel que l'on munit de la topologie de la convergence simple pour les applications de G dans $C(X)$ muni de la norme uniforme.

Exemple. — Soit (X, G) un système dynamique topologique. Si G est fini, alors tout cocycle est un cobord. Réciproquement, si G est un groupe infini, il existe un système (X, G), et un cocycle qui n'est pas un cobord.

Démonstration. — Soit V un cocycle. On pose $f = -|G|^{-1} \sum_{g \in G} V_g$.
Le calcul donne

$$\forall h \in G,$$

$$\begin{aligned} f \circ h^{-1} - f &= |G|^{-1} \textstyle\sum_{g \in G} (V_g - V_g \circ h^{-1}) \\ &= |G|^{-1} \textstyle\sum_{g \in G} (V_{hg} - V_g \circ h^{-1}) = V_h \end{aligned}$$

grâce à la relation de cocycle.

Pour la réciproque, distinguons deux cas :

(*a*) *G est finiment engendré :* soit $T_1, \ldots, T_k$ un système de générateurs.

On définit une fonction $f : G \to R^+$ par : $f(g)$ est la plus petite longueur d'une écriture de g comme produit de $T_1, T_1^{-1}, \ldots, T_k, T_k^{-1}$.

f n'est pas une fonction bornée puisque l'ensemble des éléments tels que $f(g) \leqslant n$ est fini. On vérifie que $f(gh) \leqslant f(g) + f(h)$.

On pose alors $V_g(k) = f(g^{-1} k) - f(k)$, et on a $-f(g) \leqslant V_g(k) \leqslant f(g^{-1})$.

$V_g(.)$ est une fonction de $B(G)$. L'ensemble des $V_g(.)$ n'est pas uniformément borné. On peut considérer qu'on a affaire à l'action de G sur l'espace métrique compact X, où X est le spectre maximal de la sous-algèbre de Banach de $C(X)$ engendrée par les fonctions V_g, $g \in G$, algèbre séparable.

$g \to V_g$ est un cocycle non borné donc n'est pas un cobord.

(*b*) *G n'est pas finiment engendré :* soit $T_1, \ldots, T_n, \ldots$ un système de générateurs.

On appelle G_n le groupe engendré par $T_1, \ldots, T_n$, $G_0 = \{e\}$, et on utilise la même démonstration que dans le (*a*) avec la fonction f, définie par $f(g) = \inf\{n ; g \in G_n\}$ qui vérifie :

$$f(gh) \leqslant \sup(f(g), f(h)) \leqslant f(g) + f(h).$$

Dérivées. — On appelle alors *dérivée* un cocycle V tel qu'il existe une mesure de Radon sur X vérifiant :

$$\forall f \in C(X), \quad \forall g \in G, \qquad \mu(f \circ g) = \mu(f . \exp V_g),$$

et on dit que la mesure μ est quasi invariante de dérivée V.

On remarque que si μ est quasi invariante de dérivée V, il en est de même de $|\mu|$; en effet, les transformations linéaires de $C(X)$, induites par les homéomorphismes de X, et les multiplications par une fonction positive de $C(X)$ sont positives. Il existe alors une probabilité, $|\mu|/|\mu|(1)$, de dérivée V.

PROPOSITION 1. — *Si V est une dérivée, et W un cobord, $V+W$ est une dérivée.*

Démonstration. — Il existe f de $C(X)$ avec $W_g = f \circ g^{-1} - f$ pour tout g de G. Soit μ une mesure de Radon de dérivée V, alors $\exp(f).\mu$ est quasi invariante de dérivée $V+W$.

PROPOSITION 2. — *L'ensemble des dérivées est fermé dans l'espace vectoriel topologique des cocycles.*

Démonstration. — Cet espace est métrisable. Supposons qu'une suite V_n de dérivées converge vers le cocycle V. Soit μ_n une probabilité quasi invariante de dérivée V_n. Soit μ la limite faible d'une sous-suite des μ_n :

$$\mu(f \circ g) = \lim \mu_n(f \circ g) = \lim \mu_n(f.\exp(V_n)_g) = \lim \mu_n(f.\exp V_g)$$

(à cause de la convergence uniforme de $\exp(V_n)_g$ vers $\exp V_g$) $= \mu(f.\exp V_g)$ ce qui montre que μ est quasi invariante de dérivée V.

Limites de cobords. — Soit $\mathscr{M}(X, G)$ l'ensemble des probabilités G-invariantes sur X. Soit V un cocycle pour un système (X, G). Il est clair que, pour toute probabilité λ de $\mathscr{M}(X, G)$, les relations de cocycles impliquent que l'application de G dans $(\mathbf{R}, +)$: $g \mapsto \lambda(V_g)$ est un homomorphisme de groupes. Si V est un cobord, cet homomorphisme est nul; il en est de même si V est limite de cobords.

Le théorème principal de cet article propose une réciproque pour certains groupes (en particulier les groupes nilpotents).

THÉORÈME 1. — *Soit (X, G) un système dynamique topologique où le groupe G est nilpotent. La propriété suivante caractérise les cocycles V qui sont limites de cobords*

$$\forall g \in G, \quad \forall \lambda \in \mathscr{M}(X, G), \qquad \lambda(V_g) = 0.$$

La démonstration de ce théorème est l'objet du paragraphe 3.

Dans le cas où l'action du groupe G sur X est uniquement ergodique, c'est-à-dire s'il n'existe qu'une seule probabilité λ G-invariante sur X, on obtient comme corollaire du théorème 1, une caractérisation des dérivées.

COROLLAIRE 1. — *Soit G un groupe nilpotent. Si l'action de G sur X est uniquement ergodique, les dérivées sont les limites de cobords.*

Démonstration. — Toute limite de cobords est une dérivée : cela résulte de l'existence d'une probabilité G-invariante et des propositions 1 et 2.

Réciproquement, si le cocycle $g \rightarrow V_g$ est une dérivée, il en est de même du cocycle $g \rightarrow \lambda(V_g)$, où λ est l'unique probabilité G-invariante : la différence $g \rightarrow V_g - \lambda(V_g)$ est en effet une limite de cobords d'après le théorème 1.

Il est clair, pour des raisons de masse totale, qu'un cocycle $g \rightarrow W_g$, où chaque W_g est une fonction constante sur X, n'est une dérivée que s'il est nul. V est donc une limite de cobords.

2. Quelques remarques sur la moyennabilité

Soit G un groupe dénombrable, et $F(G)$ l'ensemble des parties finies non vides de G. Soit $D \in F(G)$; on introduit la fonction m_D sur $F(G)$, qui mesure le défaut de D-invariance, définie par

$$m_D(A) = |\{x \in A;\ \exists\, d \in D,\ dx \notin A\}|.$$

On pose

$$M(D, \varepsilon) = \{A \in F(G);\ m_D(A) \leqslant |A|\,\varepsilon\}.$$

Le groupe G est moyennable si, pour tout D de $F(G)$ et tout ε, $M(D, \varepsilon)$ est non vide, et ces ensembles forment alors une base d'un filtre K. Les résultats de FØLNER permettent d'adopter comme définition des groupes dénombrables moyennables l'existence d'un tel filtre. En fait, nous n'avons besoin pour la démonstration du théorème 1 que de l'existence de ce filtre pour les groupes commutatifs, qui est claire, et de la proposition suivante qui permet le passage à une extension.

PROPOSITION 3. — *Soit G un groupe dénombrable, H un sous-groupe distingué de G, et $K = G/H$. σ un inverse à droite (ensembliste) de la surjection canonique s. Soit $c \in F(K)$, $C = \sigma(c)$, et $B \in F(H)$; on dit que $C.B$ est un σ-rectangle de G. Si H et K sont moyennables, les σ-rectangles sont arbitrairement moyennants.*

Démonstration. — Soit $D \in F(G)$, $c \in F(K)$, $C = \sigma(c)$, $B \in F(H)$, et $A = C.B$.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} m_D(A) &= \left|\{x\in A;\ \exists d\in D,\ dx\notin A\}\right| \\ &= \left|\{x\in A;\ \exists d\in D,\ s(dx)\notin c\}\right| \\ &\quad +\left|\{x\in A;\ \forall d\in D,\ s(dx)\in c \text{ et } \exists d\in D,\ dx\notin A\}\right| \\ &\leqslant |B|.m_{s(D)}(c)+\textstyle\sum_{\gamma\in c}\left|\{x\in B;\ \exists d\in D,\ d\sigma(\gamma)x\notin\sigma(s(d)\gamma)B\}\right| \\ &\leqslant |B|.m_{s(D)}(c)+\textstyle\sum_{\gamma\in c} m_{\gamma(D)}(B), \end{aligned}$$

où $\gamma(D)$ est la partie de H des éléments de la forme $\sigma(s(d)\gamma)^{-1}.d.\sigma(\gamma)$, où d décrit D.

Donc, $m_D(A) \leqslant \varepsilon\,|A|$; si $c\in M(s(D), \varepsilon/2)$ et $\forall\gamma\in c$, $B\in M(\gamma(D), \varepsilon/2)$, en particulier si $B\in M(\bigcup_{\gamma\in c}\gamma(D), \varepsilon/2)$.

La proposition suivante sera utile dans la suite.

PROPOSITION 4. — *Soit (X, G) un système dynamique topologique où G est moyennable. Soit $f\in C(X)$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *pour toute λ de $\mathcal{M}(X, G)$, $\lambda(f) = 0$;*

(*b*) *selon le filtre K, les moyennes $|A|^{-1}\sum_{g\in A} f\circ g^{-1}$ tendent uniformément vers zéro.*

Démonstration. — Il est évident que (*b*) entraîne (*a*) puisque, pour toute probabilité λ de $\mathcal{M}(X, G)$,

$$\lambda(|A|^{-1}\textstyle\sum_{g\in A} f\circ g^{-1}) = \lambda(f).$$

(*a*) $\Rightarrow$ (*b*) résulte des trois propriétés suivantes :

— le sous-espace de $C(X)$ des fonctions f, telles que $|A|^{-1}\sum_{g\in A} f\circ g^{-1}$ tend uniformément vers zéro selon le filtre K, est fermé pour la norme uniforme;

— ce sous-espace contient les fonctions de la forme $f - f\circ h$, $h\in G$;

— enfin, puisque pour toute probabilité λ de $\mathcal{M}(X, G)$, $\lambda(f) = 0$, f appartient à l'adhérence de l'espace vectoriel engendré par l'ensemble des fonctions $f - f\circ h$, $f\in C(X)$, $h\in G$.

3. Démonstration du théorème 1

PROPOSITION 5. — *Soit (X, G) un système dynamique topologique où G est moyennable, et soit $Z(G)$ le centre de G. Soit V un cocycle tel que*

$$\forall\lambda\in\mathcal{M}(X, G),\quad \forall h\in G,\qquad \lambda(V_h) = 0,$$

alors la restriction de V à $Z(G)$ est une limite de cobords.

Démonstration. — Soit V un cocycle, et A une partie finie de G; on appelle cobord spécial pour V, le cobord correspondant à la fonction continue $f_A = -|A|^{-1} \sum_{g \in A} V_g$.

Alors, $\forall h \in G$,

$$f_A \circ h^{-1} - f_A = |A|^{-1} \sum_{g \in A} (V_g - V_g \circ h^{-1}).$$

Mais si $h Z \in (G)$, $hg = gh$, et la relation de cocycle permet d'écrire :

$$V_g + V_h \circ g^{-1} = V_{gh} = V_{hg} = V_h + V_g \circ h^{-1},$$

$$V_g - V_g \circ h^{-1} = V_h - V_h \circ g^{-1}.$$

D'où

$$f_A \circ h^{-1} - f_A = V_h - |A|^{-1} \sum_{g \in A} V_h \circ g^{-1},$$

qui tend uniformément vers V_h selon le filtre K puisque $\lambda(V_h) = 0$ pour λ de $\mathcal{M}(X, G)$, d'après la proposition 4.

Ce résultat achève la démonstration du théorème 1 lorsque G est commutatif.

DÉFINITION. — Soit G un groupe, et $Z_0 = Z(G)$ son centre, s_0 la surjection canonique de G sur G/Z_0. L'image réciproque par s_0 du centre de G/Z_0 est un sous-groupe distingué de G que l'on note Z_1.

On a

$$Z_1 = \{x \in G; \forall y \in G, xyx^{-1}y^{-1} \in Z_0\}.$$

On définit par récurrence la suite croissante Z_n de sous-groupes distingués de G :

$$Z_n = \{x \in G; \forall y \in G, xyx^{-1}y^{-1} \in Z_{n-1}\} = s_{n-1}^{-1}(Z(G/Z_{n-1})).$$

S'il existe n tel que $G = Z_n$, G est nilpotent, et réciproquement.

PROPOSITION 6. — *Soit* (X, G) *un système dynamique topologique où* G *est moyennable. Soit* V *un cocycle tel que*

$$\forall \lambda \in \mathcal{M}(X, G), \quad \forall h \in G, \qquad \lambda(V_h) = 0,$$

alors la restriction de V *à* Z_n *est une limite de cobords.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence, la proposition 5 en étant le pas initial.

Pour bien montrer le mécanisme de la démonstration, examinons tout d'abord le cas $n = 1$. Nous allons montrer que la restriction de V à Z_1 est limite de cobords spéciaux selon un filtre plus fin que K, *adapté à* V.

Soit $A \in F(G)$, on a

$$f_A \circ h^{-1} - f_A = |A|^{-1} \sum_{g \in A} (V_g - V_g \circ h^{-1}).$$

La relation de cocycle donne

$$V_g - V_g \circ h^{-1} = V_h - V_h \circ g^{-1} + V_{gh} - V_{hg},$$

et

$$V_{gh} - V_{hg} = V_{g^{-1}h^{-1}gh} \circ g^{-1} \circ h^{-1}.$$

D'où :

$$f_A \circ h^{-1} - f_A = V_h - |A|^{-1} \sum_{g \in A} V_h \circ g^{-1} + |A|^{-1} \sum_{g \in A} V_{g^{-1}h^{-1}gh} \circ g^{-1} \circ h^{-1}.$$

Puisque $|A|^{-1} \sum_{g \in A} V_h g^{-1}$ tend uniformément vers zéro suivant le filtre K (proposition 4), il suffit de construire un filtre K_1 plus fin que K tel que $\forall \varepsilon > 0$, $\forall F \in F(G)$, $\exists M_1(F, \varepsilon)$, $\forall h \in F$, $\forall A \in M_1(F, \varepsilon)$,

$$\left\| |A|^{-1} \sum_{g \in A} V_{g^{-1}h^{-1}gh} \circ g^{-1} \circ h^{-1} \right\| < \varepsilon.$$

Si $g \in A = B.C$, on peut écrire $g = g_0 g_1$ avec $g_0 \in B \subset Z_0$ et $g_1 \in C$. On a $g^{-1} h^{-1} gh = g_1^{-1} h^{-1} g_1 h \in Z_0$. D'où

$$|A|^{-1} \sum_{g \in A} V_{g^{-1}h^{-1}gh} \circ g^{-1} \circ h^{-1} = |C|^{-1} \sum_{g_1 \in C} \left[|B|^{-1} \sum_{g_0 \in B} V_{g_1^{-1}h^{-1}g_1 h} \circ g_0^{-1} \right] g_1^{-1} \circ h^{-1}.$$

Puisque $g_1^{-1} h^{-1} g_1 h \in Z_0$, d'après la proposition précédente, la restriction de V à Z_0 est limite de cobords. D'où, pour toute λ de $\mathscr{M}(X, Z_0)$, $\lambda(V_{g_1^{-1}h^{-1}g_1 h}) = 0$ et, d'après la proposition 4, si B est assez moyennant dans Z_0, la norme uniforme de $|B|^{-1} \sum_{g_0 \in B} V_{g_1^{-1}h^{-1}g_1 h} \circ g_0^{-1}$ est inférieure à ε, pour tout g_1 de C et tout h de F. Comme d'autre part les σ-rectangles sont arbitrairement moyennants, cela termine la démonstration.

Cas général. — Soit τ_i des applications injectives de Z_i/Z_{i-1} dans Z_i, $1 \leqslant i < n$, inverses des surjections canoniques, et σ_n une inverse de la surjection canonique de G sur G/Z_{n-1}.

Le calcul montre que l'on peut écrire $g^{-1} h^{-1} gh = K_n . K_{n-1} \ldots K_1$, où chaque K_i est un produit de commutateurs : si on pose $H_i = h^{-1} g_i \ldots g_n h$, on a

$$K_n = [g_n^{-1}, h^{-1}]$$

et, pour $i = 1, \ldots, n-1$,

$$K_i = \ldots [[[g_i^{-1}, h^{-1}], H_{i+1}], H_{i+1}] . [[g_i^{-1}, h^{-1}], H_{i+1}] . [g_i^{-1}, h^{-1}],$$

la suite étant stationnaire s'il y a plus de $i-1$ termes égaux à H_{i+1}, K_i est donc le produit de i commutateurs.

$K_i \in Z_{i-1}$, et son expression ne dépend que de h et des g_j, $j \geqslant i$.

D'où, en utilisant la relation de cocycle

$$\begin{aligned} V_{g^{-1}h^{-1}gh} \circ g^{-1} \circ h^{-1} = {} & (V_{K_n} \circ g_n^{-1}) \circ g_{n-1}^{-1} \dots g_1^{-1} g_0^{-1} h^{-1} \\ & + (V_{K_{n-1}} \circ K_n^{-1} g_n^{-1} g_{n-1}^{-1}) \circ g_{n-2}^{-1} \dots g_0^{-1} h^{-1} + \dots \\ & + (V_{K_1} \circ K_2^{-1} \dots K_n^{-1} g_n^{-1} \dots g_1^{-1}) \circ g_0^{-1} h^{-1}. \end{aligned}$$

On peut alors de la même façon que dans le cas $n = 1$ construire à l'aide de parallèlépipèdes un filtre plus fin que le filtre moyennant K selon lequel le terme complémentaire tend vers zéro.

Ceci achève la démonstration du théorème 1 pour les groupes nilpotents.

4. Conclusions

1° On peut étendre le résultat du théorème 1 en utilisant les propositions suivantes :

PROPOSITION 7. — *Soit G une réunion croissante de sous-groupes G_n. Soit V un cocycle dont la restriction à chaque G_n est une limite de cobords, alors V est une limite de cobords.*

PROPOSITION 8. — *Soit G un groupe, et H un sous-groupe distingué de G tel que G/H soit fini. Soit V un cocycle dont la restriction à H est une limite de cobords, alors V est une limite de cobords.*

2° La démonstration du théorème 1 ne peut se faire par une récurrence du type suivant :

Soit H un sous-groupe distingué de G vérifiant la propriété : pour toute probabilité μ G-invariante sur X, et pour tout cocycle V vérifiant $\mu(V_g) = 0$, $\forall g \in G$, alors V restreint à H est une limite de cobords.

Posons $H' = \{ x \in G ; \forall y \in G, xyx^{-1}y^{-1} \in H \}$, alors H' vérifie la propriété.

Cette situation est en effet celle du contre-exemple de [2], et la conclusion est fausse.

3° On a également la proposition suivante :

PROPOSITION 9. — *Soit G un groupe dénombrable, et F un sous-groupe fini distingué de G. Si $H = G/F$ vérifie le théorème* 1 *pour toute action, il en est de même de G.*

4° L'étude du cas particulier suivant montre, par contre, que la classe des groupes vérifiant le théorème 1 n'est pas stable par extension finie.

Soit $\bar{Z}$ le groupe des isométries de Z : ce groupe est engendré par les bijections $\sigma : n \mapsto -n$ et $\tau : n \mapsto n+1$ qui vérifient les relations

$$\sigma^2 = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad \sigma\tau\sigma = \tau^{-1}.$$

Soit Y un espace métrique compact, et t un homéomorphisme de Y non périodique.

On pose $X = Y \times \{-1, +1\}$, et on définit sur X deux homéomorphismes S et T par $S(x, \varepsilon) = (x, -\varepsilon)$ et $T(x, \varepsilon) = (t^\varepsilon x, \varepsilon)$; on vérifie que le groupe engendré par S et T est isomorphe à $\bar{Z}$. Soit μ une probabilité sur X, elle se décompose d'une manière unique sous la forme

$$\mu = \mu(Y \times \{+1\})\mu_1 + \mu(Y \times \{-1\})\mu_{-1}$$

où μ_1 et μ_{-1} sont deux probabilités portées respectivement par $Y \times \{+1\}$ et $Y \times \{-1\}$.

Pour que μ soit T-invariante, il faut et il suffit que μ_1 et μ_{-1} considérées comme probabilités sur Y soient t-invariantes. Pour que μ soit S-invariante, il faut et il suffit que $\mu(Y \times \{+1\})\mu_1 = \mu(Y \times \{-1\})\mu_{-1}$.

Construction d'un cocycle. — Il suffit de se donner les deux fonctions de $C(X)$, $V_T = F$ et $V_S = G$, pourvu qu'elles satisfassent aux relations correspondant aux relations entre générateurs du groupe

$$(1) \qquad \begin{cases} S^2 = \mathrm{Id} & \Rightarrow \quad G + G \circ S = 0, \\ ST = T^{-1}S & \Rightarrow \quad G + F \circ S = -F \circ T + G \circ T. \end{cases}$$

Si on note f_ε (g_ε) la restriction de F (G) à $Y \times \{\varepsilon\}$, et si on les considère comme fonctions de $C(Y)$, (1) est alors équivalent à

$$g_1 + g_{-1} = 0 \qquad \text{et} \qquad g_1 + f_{-1} = -f_1 \circ t + g_1 \circ t.$$

Le choix d'un cocycle correspond à un choix de f_1 et g_1.

Pour toute probabilité μ $\bar{Z}$-invariante, l'application de $\bar{Z}$ dans $R : h \to \mu(V_h)$ est un homomorphisme; or $\bar{Z}$ n'a aucun homomorphisme non nul, donc $\forall h \in \bar{Z}$, $\mu(V_h) = 0$. Le théorème 1 ne s'applique donc pas à ce groupe, puisque si V est limite de cobords, $\lambda(f_1) = 0$ pour toute probabilité λ T-invariante sur Y.

5° Il est clair qu'une limite de cobords vérifie la condition plus forte que celle du théorème 1 :

(2) $\forall g \in G$, pour toute probabilité λg-invariante sur X, $\lambda(V_g) = 0$.

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit* (X, G) *un système dynamique où* G *est extension finie d'un groupe vérifiant le théorème* 1 (*par exemple nilpotent*).

Soit V *un cocycle vérifiant la condition* (2), *alors* V *est une limite de cobords.*

Démonstration. — On peut appliquer le théorème 1 à la restriction du cocycle au groupe nilpotent, c'est une limite de cobords; il en est de même du cocycle V d'après la proposition 8.

Le contre-exemple mentionné dans la remarque 2 peut être adapté pour contredire le théorème 2 pour un groupe résoluble, à croissance exponentielle (non polycyclique).

Nous tenons à remercier vivement A. BRUNEL et J.-P. CONZE pour leurs encouragements et leurs conseils.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KRIEGER (W.). — On quasi invariant measures in uniquely ergodic systems, *Inventiones Math.*, t. 14, 1971, p. 184-196.

[2] MOULIN-OLLAGNIER (J.) et PINCHON (D.). — Mesures quasi invariantes à dérivée continue, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 282, 1976, Série A, p. 1371-1373.

(Texte reçu le 11 juillet 1977.)

JEAN MOULIN-OLLAGNIER
Mathématiques,
Université de Paris-Nord,
Avenue Jean-Baptiste-Clément,
93430 Villetaneuse.

Didier PINCHON
Probabilités, Tour 56,
Université Pierre-et-Marie-Curie,
4, place Jussieu,
75230 Paris Cedex 05.