BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI SKODA

Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans C^n

Bulletin de la S. M. F., tome 100 (1972), p. 353-408

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1972__100__353_0>

Bull. Soc. math. France,
100, 1972, p. 353 à 408

SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES D'ORDRE FINI OU INFINI DANS $\mathbf{C}^n$

PAR

Henri SKODA

[Nice]

Résumé. — On démontre qu'on peut définir un ensemble analytique X dans $\mathbf{C}^n$, de dimension pure p, à l'aide de $n+1$ fonctions entières, dont la croissance est majorée par la croissance du volume de X. On donne ensuite des généralisations de ce résultat aux ouverts de Stein de $\mathbf{C}^n$, et à des variétés de Stein. Utilisant les estimations L^2 de L. Hörmander, on est ramené à la construction d'une fonction plurisousharmonique, convenablement associée au courant d'intégration sur X. Plus généralement, on associe à un courant θ, positif, fermé, une fonction plurisousharmonique dont les propriétés sont liées à celles de θ. On en déduit une application à l'étude de la structure des courants positifs, fermés.

Table des matières

Introduction

Soit X un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^n$, fermé, de dimension pure p, avec $0 \leq p \leq n-1$. On désigne par $\sigma(r)$ le volume ($2p$-dimensionnel) de X dans la boule euclidienne de centre 0 et de rayon $r > 0$. On pose

$$\nu(r) = \pi^{-p}\, p\,!\, r^{-2p}\, \sigma(r)$$

[pour $p = 0$, $\sigma(r)$ désigne le nombre de points de X dans la boule fermée de rayon r, et $\sigma(r) = \nu(r)$]; on sait (*cf.* [14]) que $\nu(r)$ est une fonction croissante de r.

L'existence et la définition de la mesure positive, « volume » d'un ensemble analytique, résultent d'un travail de P. Lelong [16], qui définit également la notion de courant positif dont nous ferons usage ici; on renvoie le lecteur au livre de P. Lelong [14] pour les propriétés générales des courants positifs.

Si X est une hypersurface ($p = n - 1$), il est bien connu, d'après les travaux de P. Lelong [12], W. Stoll [25], B. A. Taylor [27], R. O. Kujala [10] et H. Skoda [21], qu'on peut définir X à l'aide de fonctions entières dont la croissance est liée de façon précise à $\nu(r)$ ou à $\sigma(r)$.

D'autre part, d'après un résultat de E. Bishop [1] et W. Stoll [23], si $\nu(r)$ est borné (mais p quelconque), X est algébrique. Le but principal de cet article est de généraliser ces résultats, en supprimant les restrictions sur la dimension de X et sur $\nu(r)$. La méthode employée permet en outre d'obtenir des résultats semblables pour les ouverts de Stein de $\mathbf{C}^n$ et pour les variétés de Stein, ainsi qu'un théorème sur la structure des courants positifs, fermés. On a le résultat suivant :

Théorème 1. — *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n+1$ fonctions entières F_1, $F_2, \ldots, F_{n+1}$, telles que X soit exactement l'ensemble des zéros communs aux F_j ($j = 1, 2, \ldots, n+1$), et qui vérifient, pour $r = |z|$ assez grand, l'une des majorations suivantes :*

1° $\log |F_j(z)| \leq C(\varepsilon)\, r^2\, \sigma(r + \varepsilon)$;

2° $\log |F_j(z)| \leq C(\varepsilon) \log^2 r\, \nu(r + \varepsilon r)$;

3° *On se donne, en plus de $\varepsilon > 0$, un nombre $d > 0$. On peut alors choisir les F_j de sorte que*

$$\log |F_j(z)| \leq C(\varepsilon, d)(1 + r)^d \int_1^{1+r} t^{-d-1}\, \nu(t + \varepsilon t)\, dt.$$

4° *Dans le cas particulier où $0 \notin X$ et $\int_0^{+\infty} t^{-2}\, \nu(t)\, dt < +\infty$, on a*

$$\log |F_j(z)| \leq C(\varepsilon) \left[\int_0^{r+\varepsilon} t^{-1}\, \nu(t)\, dt + (r + \varepsilon) \int_{r+\varepsilon}^{+\infty} t^{-2}\, \nu(t)\, dt \right].$$

$C(\varepsilon)$ désigne une constante qui dépend de ε, p, n et X.

Ce sont les majorations 3° et 4° qui semblent les plus intéressantes en vue des applications à l'analyse fine. En particulier, le 4° redonne le résultat de W. Stoll et E. Bishop; la majoration 3° permet de traiter complètement les croissances d'ordre fini, avec les raffinements habituels sur le type et les ordres précisés de Valiron. Par exemple, si $\nu(r)$ vérifie une majoration du type $\nu(r) \leq C r$, X peut être défini par des fonctions entières de type exponentiel.

Lorsque $\nu(r)$ est d'ordre ρ, Y. C. PAN (*cf.* [17]) avait démontré qu'on pouvait définir X par des fonctions d'ordre inférieur ou égal à ρ, mais il faisait une importante restriction sur le comportement à l'infini de X.

Dans le cas $p = n - 1$, il y a deux problèmes voisins, mais bien distincts. On peut, d'une part, chercher une fonction entière s'annulant sur X, et seulement sur X, c'est le second problème de Cousin, considéré par P. LELONG [12], W. STOLL [25], et aussi R. O. KUJALA [10] et H. SKODA [20] et [21].

Notre méthode ne permet pas de retrouver ce genre de résultat. Mais on peut, d'autre part, chercher des fonctions entières s'annulant sur X, et éventuellement ailleurs (en fait $n + 1$ de ces fonctions suffisent pour définir X), on retrouve alors la plus grande partie des résultats de ce type figurant dans [25], [27], [10] et [21], à l'exception de certains résultats d'analyse fine de B. A. TAYLOR [27] et R. O. KUJALA [10].

Comme la démonstration du théorème principal est longue et technique, nous indiquons ici les principales étapes de cette démonstration. Le point de départ est le théorème suivant :

THÉORÈME 2 (L. HÖRMANDER, E. BOMBIERI). — *Soient Ω un ouvert pseudoconvexe de $\mathbf{C}^n$, V une fonction plurisousharmonique dans Ω, $z_0 \in \Omega$ un point tel que e^{-V} soit sommable au voisinage de z_0, alors il existe une fonction F, holomorphe dans Ω, telle que*

$$F(z_0) = 1,$$

et

$$\int_\Omega |F(z)|^2 \exp[-V(z)] (1 + |z|^2)^{-n-2} \, dz < +\infty.$$

Le théorème est une conséquence aisée des théorèmes d'existence d'Hörmander pour l'opérateur $\bar\partial$ (*cf.* E. BOMBIERI [2]). Suivant E. BOMBIERI, on remarque que F s'annule nécessairement en tout point où e^{-V} est non sommable. On construira donc une fonction plurisousharmonique V dans $\mathbf{C}^n$, continue en dehors de X, égale à $-\infty$ sur X, telle que e^{-V} soit non sommable en tout point de X, et convenablement majorée (supérieurement) à l'infini. La construction de V est la principale difficulté de cet article et occupe les paragraphes 2, 3, 4, 5 et 6. Cette construction ne fait intervenir que le courant d'intégration θ associé à X, et non pas l'ensemble analytique X lui-même. Il en résulte qu'elle peut être généralisée à n'importe quel courant, positif, fermé, θ, dans $\mathbf{C}^n$, et qu'elle permet d'associer à un tel courant θ, une fonction plurisousharmonique V, dont les propriétés sont étroitement liées à celles du courant θ. Donnons une description sommaire de V. Dans ce but, on choisit une partition de l'unité ρ_j de classe C^∞ dans $\mathbf{C}^n$, et une suite η_j de fonctions dans $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, η_j étant égal à 1 sur un voisinage du support de ρ_j.

On pose

$$U_j(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2p} \eta_j(x) \, d\sigma(x),$$

où σ désigne la mesure trace de θ. Puis, on pose

$$U = \Sigma_{j=1}^\infty \rho_j U_j.$$

La fonction V est alors choisie égale à $U + W$, où W est une fonction continue suffisamment fortement plurisousharmonique, simple; par exemple, pour la majoration 4°, on a

$$W(z) = C(\varepsilon, d)(1 + r)^d \int_1^{1+r} t^{-d-1} \nu(t + \varepsilon t) \, dt \qquad (r = |z|).$$

Pour démontrer que V est plurisousharmonique, on commence par estimer le hessien de U_j au voisinage du support de ρ_j. L'estimation du hessien de U_j fait l'objet du paragraphe 2 (proposition 2.2), c'est l'étape cruciale de la démonstration, car c'est là qu'intervient l'hypothèse que θ est un courant positif, fermé. Nous ne savons pas, pour l'instant, procéder autrement que par des méthodes très techniques, consistant à transformer d'abord U_j, puis à dériver sous le signe somme, à transformer ensuite le hessien par la formule de Stokes, et finalement à considérer le produit de θ par certaines formes différentielles positives remarquables (lemme 2.1). La considération du courant θ au lieu de X présente l'énorme avantage de permettre l'usage de la régularisation : on fait tous les calculs en supposant θ de classe C^∞.

Le paragraphe 3 étudie le cas $p = n - 1$ (et $p = 0$), qui échappe aux méthodes du paragraphe 2.

Le paragraphe 4 donne une méthode de construction d'une fonction V, particulière aux croissances lentes, lorsque $\int_1^{+\infty} t^{-3} \nu(t) \, dt < +\infty$; on obtient alors pour V un potentiel canonique *explicite*, qui généralise le potentiel canonique de P. Lelong [12], relatif au cas $p = n - 1$. Or on sait que ces croissances lentes sont d'un intérêt tout particulier pour l'analyse fine; la majoration 4° du théorème 1 en résulte d'ailleurs.

Dans le paragraphe 5, on revient à l'estimation du hessien de U; on choisit convenablement les suites ρ_j et η_j, et on aboutit, à l'aide d'une technique un peu pénible mais classique de partition de l'unité, à un « défaut de plurisousharmonicité » pour U en $-(\nu(r+\varepsilon r)/r^2)\,|\,\lambda\,|^2$ (*cf.* lemme 5.1). On construit alors une fonction W explicite, fortement plurisousharmonique, de façon à compenser le « défaut de plurisousharmonicité » de U.

Le choix fait dans le paragraphe 5 pour ρ_j et η_j n'a rien d'absolu, et pour des croissances particulières de $\sigma(r)$ ou $\nu(r)$, on peut espérer améliorer les résultats par un choix plus adapté de ρ_j et η_j; c'est précisément l'objet du paragraphe 6, qui concerne surtout les croissances d'ordre infini.

Dans le paragraphe 7, on démontre que e^{-kV} est non sommable sur X pour un choix convenable de la constante k. Pour un courant θ, positif, fermé, quelconque, on étudie la liaison entre la densité ou nombre de Lelong $\nu(z)$ du courant θ au point z, et le fait, pour e^{-kV}, d'être sommable ou non au point z. C'est l'étape décisive (et technique) pour le théorème sur la structure des courants positifs fermés du paragraphe 11.

Le paragraphe 8 est consacré à la démonstration du théorème fondamental (théorème 1), qui consiste à reprendre de façon détaillée la démonstration du théorème 2, en la combinant avec un raisonnement sur la dimension de certains sous-ensembles analytiques, dû à H. Grauert. La difficulté est d'obtenir $n+1$ fonctions, tout en conservant la bonne croissance à l'infini.

Remarquons que lorsque X est une hypersurface, les fonctions F_j s'annulent sur X avec une multiplicité éventuellement supérieure à 1, et peuvent s'annuler en dehors de X; on ne résoud donc nullement le second problème de Cousin.

Dans un travail antérieur [21], nous avions démontré, pour les hypersurfaces, un théorème très proche du théorème 1, en utilisant le théorème 2; mais la construction de la fonction plurisousharmonique V utilisait un artifice de régularisation, particulier aux hypersurfaces, tandis qu'ici on utilise une « solution locale du problème » et une partition de l'unité. Cette nouvelle méthode, quoique plus difficile sur le plan technique, me paraît néanmoins plus souple, d'adaptation plus aisée à des situations particulières. La preuve en est qu'elle permet une généralisation aux ouverts bornés pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$, qui fait l'objet du paragraphe 9; on démontre une variante du théorème 1 pour de tels ouverts. Signalons un résultat récent de G. Laville [11], relatif aux hypersurfaces d'un ouvert strictement pseudoconvexe étoilé; la situation envisagée par lui est assez différente, car il résoud un second problème de Cousin. Comme une variété de Stein se plonge dans un espace $\mathbf{C}^n$, le théorème 1 permet, théoriquement au moins, de résoudre des problèmes semblables pour une variété de Stein quelconque, il suffit de connaître un plongement suffisamment explicite. On utilise cette propriété pour démontrer dans le paragraphe 10 qu'une famille bornée (en un sens naturel) d'ensembles analytiques dans une variété de Stein peut être définie à l'aide de $n+1$ familles bornées de fonctions holomorphes.

L'hypothèse que X est de dimension pure p n'est pas essentielle, si X est de dimension $\leq p$, on décompose X en une réunion d'ensembles analytiques $X_0, X_1, \ldots, X_p$, X_j étant de dimension pure j. Le théorème 1 reste vrai, en prenant

$$\sigma(r) = \sigma_0(r) + \sigma_1(r) + \ldots + \sigma_p(r),$$

$\sigma_j(r)$ désignant le volume ($2j$-dimensionnel) de X_j dans la boule de rayon r, et on prend

$$\nu(r) = \nu_0(r) + \nu_1(r) + \ldots + \nu_p(r),$$

avec

$$\nu_j(r) = \pi^{-j}\, j\,!\, r^{-2j}\, \sigma_j(r).$$

Le paragraphe 11 utilise la proposition du paragraphe 7 pour démontrer que l'ensemble E_c des points z du support d'un courant θ, positif et fermé, où la densité $\nu(z)$ du courant θ est supérieure ou égale à $c > 0$, est contenu dans un ensemble analytique X de dimension $\leq p$, l'ensemble X étant lui-même contenu dans $E_{c'}$, où $c' = (1 - p/n)\, c$.

On généralise ainsi des résultats de E. Bombieri [2] et de F. R. Harvey et J. R. King [6].

Les résultats de cet article ont été annoncés dans une Note [22], à l'exception du résultat relatif aux ouverts bornés, pseudoconvexes de $\mathbf{C}^n$.

Le lecteur, désireux d'aller rapidement, pourra ne lire d'abord, après l'introduction, que les paragraphes 1, 2, 4 et 5; il est également invité à ne considérer d'abord que le cas $p = 1$ dans le paragraphe 2.

Afin d'alléger les notations, nous avons désigné par U des fonctions différentes dans les paragraphes 2, 5, 6 et 7; le contexte ne permet aucune confusion.

1. Courants positifs et formes positives, courants d'ordre fini dans $\mathbf{C}^n$

On désigne par $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ l'espace des fonctions de classe C^∞, à support compact dans $\mathbf{C}^n$; on désigne de même par $\mathcal{D}_{p,q}(\mathbf{C}^n)$ l'espace des formes différentielles de bidegré (p, q), de classe C^∞, à support compact dans $\mathbf{C}^n$; on notera enfin par $\mathcal{D}'_{p,q}(\mathbf{C}^n)$ l'espace des courants de bidegré (p, q).

On choisit comme (n, n)-forme fondamentale sur $\mathbf{C}^n$ la forme

$$\left(\frac{i}{2}\right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n,$$

ce qui permet d'identifier les 0-courants, les $2n$-courants et les distributions sur $\mathbf{C}^n$. On identifiera également une forme différentielle de bidegré (p, q) avec le courant de bidegré (p, q) qu'elle définit.

Au cours des démonstrations, nous ferons un usage fréquent des propriétés des courants positifs, fermés. Nous rappelons donc les définitions et les propriétés relatives aux courants positifs, fermés, en renvoyant à P. LELONG (*cf.* [14], par exemple) pour les démonstrations.

DÉFINITION. — Un courant θ, de bidegré $(n-p, n-p)$, est dit *positif*, si pour tout système de p formes différentielles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, de bidegré $(1, 0)$, de classe C^∞, à support compact, la distribution $\theta \wedge (i\,\alpha_1 \wedge \bar{\alpha}_1) \wedge (i\,\alpha_2 \wedge \bar{\alpha}_2) \wedge \ldots \wedge (i\,\alpha_p \wedge \bar{\alpha}_p)$ est positive.

Une forme différentielle est dite *positive*, si le courant qu'elle définit est positif.

Un cas particulier très important est celui où θ est de bidegré $(1, 1)$, si θ s'écrit en écriture canonique

$$(1.1) \qquad \theta = i \textstyle\sum_{j,k} \theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

où les θ_{jk} sont des 0-courants ou distributions sur $\mathbf{C}^n$, avec $1 \leqq j,\ k \leqq n$. La condition de positivité est alors équivalente à la condition

$$(1.2) \qquad \textstyle\sum_{j,k} \theta_{jk}\, \lambda_j \bar{\lambda}_k \geqq 0,$$

pour tous $\lambda_j \in \mathbf{C}$. Si $\theta = i\, d'\, d''\, V$, où V est une fonction semi-continue supérieurement sur $\mathbf{C}^n$, θ est positif si, et seulement si, le hessien de V, $\sum_{j,k} (\partial^2 V/\partial z_j\, \partial \bar{z}_k)\, \lambda_j \bar{\lambda}_k$, est positif (les dérivées sont calculées au sens des distributions); autrement dit, θ est positif si, et seulement si, V est plurisousharmonique.

Les courants positifs vérifient les propriétés suivantes :

(*a*) Un courant positif θ est d'ordre nul, autrement dit ses coefficients sont des mesures complexes.

(*b*) Si $\rho \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ est une fonction positive et si θ est positif, le courant régularisé $\theta \bigstar \rho$ est positif.

(*c*) Si θ est positif, et si ω est une $(1, 1)$ forme différentielle, de classe C^∞, positive, le courant $\theta \wedge \omega$ est positif.

Il en résulte que si θ est de bidegré $(n-p,\ n-p)$ et si les p formes ω_1, $\omega_2, \ldots, \omega_p$ sont de bidegré $(1, 1)$ et positives, la mesure $\theta \wedge \omega_1 \wedge \omega_2, \wedge \ldots \wedge \omega_p$ est positive.

L'exemple fondamental, qui nous intéresse ici, de courant positif, est constitué par le courant d'intégration sur un ensemble analytique X, de dimension pure p. Si φ désigne un élément de $\mathcal{D}_{p,p}(\mathbf{C}^n)$, le courant θ associé à X est défini par

$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_X \varphi. \tag{1.3}$$

Si X est une sous-variété de $\mathbf{C}^n$, l'intégrale définissant $\langle \theta, \varphi \rangle$ est parfaitement définie. En revanche, si X possède des singularités, la définition précise et la convergence de (1.3) est un résultat fondamental dû à P. Lelong [14] (*cf.* aussi Stolzenberg [26]). De plus, on a le résultat suivant, dû également à P. Lelong :

Proposition 1.1. — *Le courant d'intégration sur un ensemble analytique est* positif *et* fermé.

Autrement dit, on a

$$d''\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad d'\theta = 0.$$

Nous introduisons maintenant certaines formes différentielles positives, qui jouent un très grand rôle dans l'étude des propriétés métriques des courants positifs, fermés. Afin de simplifier l'écriture dans la partie la plus technique de cet article (à savoir le paragraphe 2), nous ne prenons pas exactement les mêmes définitions que P. Lelong, nos formules sont les mêmes, mais à un facteur 2 ou 2^{-p} près. On pose par définition

$$\alpha = i\, d'\, d'' \log |x|^2, \tag{1.4}$$

$$\beta = i\, d'\, d'' |x|^2 = i \textstyle\sum_{k=1}^n dx_k \wedge d\bar{x}_k, \tag{1.5}$$

$$\gamma = i\, d' |x|^2 \wedge d'' |x|^2 = i \left(\textstyle\sum_{k=1}^n \bar{x}_k\, dx_k\right) \wedge \left(\textstyle\sum_{k=1}^n x_k\, d\bar{x}_k\right). \tag{1.6}$$

On a la relation

$$\alpha = \frac{\beta}{|x|^2} - \frac{\gamma}{|x|^4}. \tag{1.7}$$

On désigne par α^p le produit extérieur $\alpha \wedge \alpha \wedge \ldots \wedge \alpha$, de p formes identiques à α. Comme $\gamma \wedge \gamma = 0$ et que β et γ commuttent, la formule du binôme, donne la relation

$$\alpha^p = \frac{\beta^p}{|x|^{2p}} - p\, \frac{\beta^{p-1} \wedge \gamma}{|x|^{2p+2}}, \tag{1.8}$$

permettant de calculer α^p en fonction de β et γ. En multipliant (1.8) par γ, on obtient

$$\alpha^p \wedge \gamma = |x|^{-2p} \beta^p \wedge \gamma. \tag{1.9}$$

En remplaçant p par $p-1$ dans (1.9) et tenant compte de (1.8), on a

$$(1.10)\qquad |x|^{-2p}\,\beta^p = \alpha^p + p\,|x|^{-4}\,\alpha^{p-1}\wedge\gamma,$$

relation qui donne β^p en fonction de α.

Nous aurons besoin des formes différentielles en x, à coefficients fonctions de x et de z, définis par

$$(1.11)\qquad \alpha\,(x-z) = i\,d'_x\,d''_x\,(\log|\,x-z\,|^2),$$

$$(1.12)\qquad \gamma\,(x-z) = i\,d'_x\,(\,|\,x-z\,|^2)\wedge d''_x\,(\,|\,x-z\,|^2).$$

On met x en indice afin de préciser que l'on dérive la variable x. Comme les formes $\alpha\,(x-z)$ et $\gamma\,(x-z)$ se déduisent de α et γ par le changement de variable $x\mapsto x-z$, et que la forme β est invariante par translation, on déduit de (1.10) la relation

$$(1.13)\quad |\,x-z\,|^{-2p}\,\beta^p = \alpha^p\,(x-z) + p\,|\,x-z\,|^{-4}\,\alpha^{p-1}\,(x-z)\wedge\gamma\,(x-z),$$

qui servira de base pour l'étude du hessien des potentiels que nous introduirons.

Les formes α, β et $\alpha\,(x-z)$ sont fermées.

A un courant positif θ, on associe les mesures positives suivantes :

$$(1.14)\qquad \sigma = \frac{2^{-p}}{p\,!}\,\theta\wedge\beta^p,$$

$$(1.15)\qquad \nu = (2\,\pi)^{-p}\,\theta\wedge\alpha^p,$$

appelées respectivement *mesure trace* et *mesure projective* du courant θ. Si θ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique X, la mesure trace σ n'est autre que « l'aire » de X.

On montre aisément que la mesure σ majore la valeur absolue des coefficients du courant θ (qui sont des mesures).

Soit $\sigma\,(r) = \int_{|x|<r} d\sigma\,(x)$ la mesure σ portée par la boule de rayon r.

On a l'important résultat suivant (*cf.* P. Lelong [14]) :

Proposition 1.2. — *Si le courant positif* θ *est fermé,* $r^{-2p}\,\sigma\,(r)$ *est fonction croissante de* r, *pour* $r>0$; *soit* $\nu\,(0)$ *le nombre défini par*

$$\nu\,(0) = \lim_{r\to 0}\pi^{-p}\,p\,!\,r^{-2p}\,\sigma\,(r),$$

l'intégrale $\int_{0<|x|<r} d\nu(x)$ *est convergente, et on a*

$$\nu(0) + \int_{0<|x|<r} d\nu(x) = \pi^{-p}\, p\,!\, r^{-2p}\, \sigma(r).$$

On appelle $\nu(0)$ le nombre de Lelong ou densité du courant θ en 0. On définit, de même, le nombre de Lelong $\nu(z)$ du courant θ au point $z \in \mathbf{C}^n$ par la formule

$$\nu(z) = \lim_{r\to 0} \pi^{-p}\, p\,!\, r^{-2p} \int_{|x-z|<r} d\sigma(x) \tag{1.16}$$

et on a la relation

$$\nu(z) + (2\pi)^{-p} \int_{0<|x-z|<r} \alpha^p(x-z) \wedge \theta(x) = (2\pi)^{-p}\, r^{-2p} \int_{|x-z|<r} \beta^p \wedge \theta. \tag{1.17}$$

Si θ est le courant d'intégration sur X, on démontre (*cf.* [26]) que

$$\nu(z) \geqq 1, \qquad \text{lorsque} \quad z \in X \tag{1.18}$$

(en fait, dans ce cas, $\nu(z)$ est entier > 0).

Comme la mesure σ majore les coefficients de θ, on est amené à prendre les fonctions $\sigma(r)$ ou $\nu(r)$ comme indicatrices de croissance du courant θ.

On dira que θ est d'ordre fini ρ si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = \rho. \tag{1.19}$$

On dira que θ est de ρ-type nul, resp. normal, resp. maximal, si $\limsup_{r\to\infty} r^{-\rho}\, \nu(r)$ est nul, resp. fini, resp. infini.

On dira que θ est d'ordre infini si

$$\limsup_{r\to+\infty} \frac{\log \nu(r)}{\log r} = +\infty.$$

On définira l'ordre et le type d'un ensemble analytique X comme l'ordre et le type du courant d'intégration sur X, dans ce cas, $\sigma(r)$ n'est autre que le volume de X dans la boule de rayon r.

Nous aurons besoin du résultat bien classique suivant qui résulte de la croissance de $\nu(r)$ et $\sigma(r)$:

Proposition 1.3. — *La convergence de l'intégrale* $\int_1^{+\infty} t^{-\rho}\, d\nu(t)$, *équivaut à la convergence de* $\int_1^{+\infty} \nu(t)\, t^{-\rho-1}\, dt$, *et à la convergence de* $\int_1^{+\infty} t^{-\rho-2p}\, d\sigma(t)$ pour $\rho > 0$ (*cf.* par exemple [12]).

2. Hessien du potentiel d'un courant à support compact

Afin de faciliter les calculs de différentiation sous le signe somme et d'intégration par parties, on suppose, dans tous les calculs qui vont suivre, que le courant θ est une forme différentielle de classe C^∞, positive, à support compact. On suppose θ de bidegré $(n-p, n-p)$, avec $1 \leqq p \leqq n-2$, et par conséquent $n \geqq 3$. On considère le potentiel U défini par

$$U(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2p}\, \beta^p \wedge \theta(x). \tag{2.1}$$

Exprimons d'abord U à l'aide de la forme différentielle en x, $\alpha^p(z-x)$, d'après (1.13), on a

$$|z - x|^{-2p}\, \beta^p = \alpha^p(z - x) + p\, |z - x|^{-4}\, \gamma(z - x) \wedge \alpha^{p-1}(z - x). \tag{2.2}$$

On a, d'autre part,

$$\begin{cases} |z - x|^{-4}\, \gamma(z - x) = i\, |z - x|^{-4}\, d'_x |z - x|^2 \wedge d''_x |z - x|^2, \\ |z - x|^{-4}\, \gamma(z - x) = i\, d'_x \log |z - x|^2 \wedge d''_x \log |z - x|^2. \end{cases} \tag{2.3}$$

De (2.1), (2.2) et (2.3), on déduit

$$\begin{aligned} U(z) = &-\int_{\mathbf{C}^n} \alpha^p(z - x) \wedge \theta(x) \\ &- p \int_{\mathbf{C}^n} i\, d'_x \log |z - x|^2 \wedge d''_x \log |z - x|^2 \\ &\qquad\qquad \wedge\, \alpha^{p-1}(z - x) \wedge \theta(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

[on pose $\alpha^{p-1}(z - x) = 1$, si $p = 1$].

Pour simplifier l'écriture dans les calculs, nous désignerons par E la fonction $\log |z - x|^2$, et nous choisissons de ne pas écrire systématiquement les variables z et x, nous écrirons α et θ au lieu de $\alpha(z - x)$ et $\theta(x)$. Avec ces conventions, on a donc

$$U(z) = -\int \alpha^p \wedge \theta - p \int i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta. \tag{2.5}$$

On transforme la première intégrale en utilisant la formule de Stokes

$$\alpha^p \wedge \theta = i\, d'_x\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta$$
$$= i\, d'_x (d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta) + i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x \theta,$$
$$-\int_{\mathbf{C}^n} \alpha^p \wedge \theta = \lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{|z-x| \geqq \varepsilon} \alpha^p \wedge \theta$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} -\int_{S_\varepsilon} i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta$$
$$-\int_{|z-x| \geqq \varepsilon} i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x \theta.$$

S_ε désignant la sphère de centre z et de rayon ε, orientée par la normale intérieure. Or les coefficients de la forme $i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta$ sont majorés par $O(\varepsilon^{-2p+1})$ sur la sphère S_ε. Comme le volume de S_ε est $O(\varepsilon^{2n-1})$, l'intégrale $\int_{S_\varepsilon} i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta$ est majorée par $O(\varepsilon^{2n-2p})$ et tend vers 0 quand ε tend vers zéro. On a donc

$$-\int_{\mathbf{C}^n} \alpha^p \wedge \theta = -\int_{\mathbf{C}^n} i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x \theta,$$

$$(2.6) \quad U(z) = -\int i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x \theta - p \int i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta.$$

Posons

$$U_1(z) = -\int i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x \theta,$$
$$U_2(z) = -p \int i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta.$$

De sorte que

$$(2.7) \qquad U = U_1 + U_2.$$

Afin d'alléger l'écriture, nous allons calculer non pas directement le hessien de U, mais la forme différentielle en z de bidegré $(1, 1)$ $i\, d'_z\, d''_z U$. Nous allons utiliser la notion de forme double, c'est-à-dire de forme différentielle en z à valeurs dans les formes différentielles en x.

Nous renvoyons à De Rham ([18], § 7) pour une définition des formes doubles et pour l'étude de leurs propriétés (*cf. aussi* les produits tensoriels d'algèbres dans Bourbaki [3], § 3, et les formes différentielles à valeurs dans un espace de Banach par H. Cartan [4]). Rappelons simplement les règles formelles suivantes; une telle forme s'écrit en écriture canonique :

$$\Sigma_{I,J,K,L}\, a_{I,J,K,L}\, (dz_I \wedge d\bar{z}_J) \otimes (dx_K \wedge d\bar{x}_L),$$

où I, J, K, L sont des multi-indices, où $a_{I,J,K,L}$ est une fonction de z et de x, et où dz_I désigne le covecteur :

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge dz_{i_2} \wedge \ldots \wedge dz_{i_p},$$

avec $I = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$.

De même, $d\bar{z}_J$ désigne le covecteur $d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \wedge \ldots \wedge d\bar{z}_{j_q}$, avec $J = (j_1, j_2, \ldots, j_q)$.

Nous commettrons l'abus de langage consistant à identifier dz_j avec $dz_j \otimes 1$ et de même dx_k avec $1 \otimes dx_k$, on a alors l'écriture $dz_j \wedge dx_k$ pour l'écriture plus correcte :

$$(dz_j \otimes 1) \wedge (1 \otimes dx_k) = dz_j \otimes dx_k.$$

Il n'y aura pas d'ambiguïté, car nous ne considérons pas ici de formes différentielles extérieures sur $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^n$, mais seulement des formes doubles.

Formellement, les dz_j et $d\bar{z}_k$ commuttent avec les dx_j et $d\bar{x}_k$, tandis que dz_j et $d\bar{z}_k$ anticommuttent entre eux.

On a deux sortes d'opérateurs de différentiation extérieure, les opérateurs d'_z et d''_z de différentiation en z et les opérateurs d'_x et d''_x de différentiation en x. Les opérateurs d'_z et d''_z commuttent avec les opérateurs d'_x et d''_x, tandis que les opérateurs d'_z et d''_z anticommuttent entre eux (de même pour d'_x et d''_x).

Dans la suite, nous intégrerons les formes différentielles doubles, de bidegré (n, n) en x, par rapport à x, et le résultat de l'intégration sera une forme différentielle en z. L'usage des formes doubles n'est nullement indispensable, mais permet de condenser l'écriture; le lecteur peut, s'il le désire, faire tous les calculs en remplaçant le symbole d'_z par $\sum_{j=1}^n \lambda_j \, \partial/\partial z_j$ et en modifiant certains signes, il obtiendra alors directement le hessien de U,

$$\Sigma_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k.$$

Dans les calculs qui suivent, les termes importants sont ceux où figurent θ, les termes secondaires sont ceux où figurent $d'_x \theta, d''_x \theta$ et $d'_x d''_x \theta$.

On a, par dérivation de (2.7), sous le signe somme :

$$(2.8) \qquad i\, d'_z\, d''_z\, U_1 = - \int i\, d'_z\, d''_z\, (i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge d'_x\, \theta),$$

$$(2.9) \qquad i\, d'_z\, d''_z\, U_2 = - p \int i\, d'_z\, d''_z\, (i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta).$$

Comme θ ne dépend que de x, on a

$$(2.10) \qquad i\, d'_z\, d''_z\, U_1 = - \int i\, d'_z\, d''_z\, (i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge d'_x\, \theta,$$

$$(2.11) \qquad i\, d'_z\, d''_z\, U_2 = - p \int i\, d'_z\, d''_z\, (i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta.$$

On transforme maintenant uniquement (2.11). Les calculs qui vont suivre sont compliqués pour p quelconque, mais se simplifient massivement lorsque $p = 1$, le lecteur pourra donc ne considérer d'abord que le cas $p = 1$.

Désignons par ω la forme $i\, d'_x E \wedge d''_x E$, on a

$$(2.12) \qquad \omega = i\, d'_x E \wedge d''_x E,$$

$$(2.13) \quad i\, d'_z d''_z (\omega \wedge \alpha^{p-1}) = i\, d'_z d''_z \omega \wedge \alpha^{p-1} + i\, d'_z \omega \wedge d''_z (\alpha^{p-1}) - i\, d''_z \omega \wedge d'_z (\alpha^{p-1}) + \omega \wedge i\, d'_z d''_z (\alpha^{p-1}).$$

Comme ω et α sont des formes réelles, on a

$$(2.14) \quad i\, d'_z d''_z (\omega \wedge \alpha^{p-1}) = i\, d'_z d''_z \omega \wedge \alpha^{p-1} + 2 \operatorname{Re} i\, d'_z \omega \wedge d''_z (\alpha^{p-1}) + \omega \wedge i\, d'_z d''_z (\alpha^{p-1}).$$

Calculons $i\, d'_z d''_z \omega$ en remarquant que $E = \log |z - x|^2$ est réelle; d'après (2.12), on a

$$(2.15) \quad i\, d'_z d''_z \omega = 2 \operatorname{Re} i\, d'_x d'_z d''_z E \wedge i\, d''_x E + i\, d'_x d'_z E \wedge i\, d''_x d''_z E - i\, d'_x d''_z E \wedge i\, d''_x d'_z E.$$

Comme les formes α et $d''_z \alpha$ commuttent, on a

$$(2.16) \qquad d''_z \alpha^{p-1} = (p-1)\, d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-2},$$

$$(2.17) \qquad d'_z d''_z \alpha^{p-1} = (p-1)\, d'_z d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-2} + (p-1)(p-2)\, d'_z \alpha \wedge d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-3},$$

(on pose $\alpha^{-1} = 0$, $\alpha^{-2} = 0$).

De (2.11), (2.12), (2.14), (2.15), (2.16) et (2.17), il résulte qu'on a

$$(2.18) \qquad i\, d'_z d''_z U_2 = p\,(I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + I_7),$$

avec :

$$I_1 = 2 \operatorname{Re} \int - i\, d'_x d'_z d''_z E \wedge i\, d''_x E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,$$

$$I_2 = \int - i\, d'_x d'_z E \wedge i\, d''_x d''_z E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,$$

$$I_3 = \int i\, d'_x d''_z E \wedge i\, d''_x d'_z E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,$$

$$I_4 = 2(p-1) \operatorname{Re} \int - i\, d'_x d'_z E \wedge i\, d''_x E \wedge d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-2} \wedge \theta,$$

$$I_5 = 2(p-1) \operatorname{Re} \int - i\, d'_x E \wedge i\, d''_x d'_z E \wedge d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-2} \wedge \theta,$$

$$I_6 = (p-1) \int - i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge i\, d'_z d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-2} \wedge \theta,$$

$$I_7 = (p-1)(p-2) \int - i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge i\, d'_z \alpha \wedge d''_z \alpha \wedge \alpha^{p-3} \wedge \theta.$$

Remarquons qu'on a par exemple $i\,d'_z\,d''_z\,\alpha = i\,d'_x\,d''_x\,(i\,d'_z\,d''_z\,E)$, nous allons donc transformer I_1, I_2, I_4, I_5, I_6 et I_7 par intégration par parties de façon à éliminer « l'excès de dérivation portant sur E ». Désignons par ω_j ($j = 1, 2, \ldots, 7$) la forme différentielle sous le signe somme de I_j. On a

$$\omega_1 = -\,i\,d'_x\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,$$

$$\begin{aligned}\omega_1 &= d'_x\,(-\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta \\ &\quad + i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta.\end{aligned}$$

La forme $d''_x\,(-\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1})$ étant de bidegré $(p-1, p+1)$ en x, et θ de bidegré $(n-p, n-p)$, on a

$$\omega_1 = d_x\,(-\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta + i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha^p \wedge \theta,$$

$$\begin{aligned}(2.19)\qquad 2\,\mathrm{Re}\,\omega_1 &= d_x\,(-\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d_x\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta \\ &\quad + 2\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha^p \wedge \theta\end{aligned}$$

(avec $d_x = d'_x + d''_x$).

Pour ω_2, on a

$$\omega_2 = -\,i\,d'_x\,d'_z\,E \wedge d''_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,$$

$$\begin{aligned}\omega_2 &= d'_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d''_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta \\ &\quad + d''_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta \\ &\quad + i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,\end{aligned}$$

$$(2.20)\qquad \omega_2 = d_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta + \omega_3.$$

On transforme ω_4

$$\omega_4 = -\,i\,d'_x\,d'_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge d''_z\,\alpha \wedge \alpha^{p-2} \wedge \theta,$$

$$\begin{aligned}\omega_4 &= d'_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge d''_z\,\alpha \wedge \alpha^{p-2}) \wedge \theta \\ &\quad + d''_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta \\ &\quad + i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2.21)\qquad \omega_4 &= d_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge d''_z\,\alpha \wedge \alpha^{p-2}) \wedge \theta \\ &\quad + d_x\,(-\,i\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \theta + \omega_3.\end{aligned}$$

On transforme enfin ω_5

$$\omega_5 = -\,i\,d'_x\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge d''_z\,\alpha \wedge \alpha^{p-2} \wedge \theta,$$

$$\begin{aligned}\omega_5 &= d''_x\,(i\,d'_x\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-2}) \wedge \theta \\ &\quad + i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta,\end{aligned}$$

$$(2.22)\qquad \omega_5 = d_x\,(i\,d'_x\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-2}) \wedge \theta + \omega_3.$$

De (2.19), (2.20), (2.21) et (2.22), il résulte que

$$(2.23)\quad I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 2\int i\, d'_z\, d''_z\, E \wedge \alpha^p \wedge \theta + (4p-2)\int \omega_3 + \int d_x\, \varphi \wedge \theta$$

où φ désigne par définition la forme

$$(2.24)\quad \begin{aligned} \varphi = &- i\, d'_z\, d''_z\, E \wedge i\, d_x E \wedge \alpha^{p-1} - i\, d'_z\, E \wedge i\, d_x\, d''_z\, E \wedge \alpha^{p-1} \\ &- (2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\, d'_z\, E \wedge i\, d''_x\, E \wedge d''_z\, \alpha \wedge \alpha^{p-2} \\ &- (2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\, d'_z\, E \wedge i\, d'_x\, d''_z\, E \wedge \alpha^{p-1} \\ &+ (2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\, d'_x\, E \wedge i\, d''_x\, d'_z\, E \wedge i\, d'_x\, d''_z\, E \wedge \alpha^{p-2}. \end{aligned}$$

On transforme l'intégrale $\int d_x\, \varphi \wedge \theta$ par la formule de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{C}^n} d_x\, \varphi \wedge \theta &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-x| \geqq \varepsilon} d_x\, \varphi \wedge \theta \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|z-x| \geqq \varepsilon} d_x\, (\varphi \wedge \theta) + \varphi \wedge d_x\, \theta \end{aligned}$$

(φ est de degré impair en x),

$$\int_{\mathbf{C}^n} d_x\, \varphi \wedge \theta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_\varepsilon} \varphi \wedge \theta + \int_{|z-x| \geqq \varepsilon} \varphi \wedge d_x\, \theta.$$

Les coefficients de la forme φ sont des fonctions homogènes de degré $-2p-1$ en $z-x$, les coefficients de φ sont donc majorés par $O(\varepsilon^{-2p-1})$ sur S_ε, les coefficients de $\int_{S_\varepsilon} \varphi \wedge \theta$ sont donc majorés par $O(\varepsilon^{2n-2p-2})$ et tendent vers zéro quand ε tend vers zéro (car $p < n-1$), on a donc

$$\int d_x\, \varphi \wedge \theta = \int \varphi \wedge d_x\, \theta.$$

Et d'après (2.23), il vient

$$(2.25)\quad I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 2\int i\, d'_z\, d''_z\, E \wedge \alpha^p \wedge \theta + (4p-2)\int \omega_3 + \int \varphi \wedge d_x\, \theta.$$

Il reste à transformer I_6 et I_7

$$(2.26)\quad I_6 + I_7 = (p-1)\int - i\, d'_x\, E \wedge d''_x\, E \wedge [i\, d'_z\, d''_z\, \alpha \wedge \alpha + (p-2)\, i\, d'_z\, \alpha \wedge d''_z\, \alpha] \wedge \alpha^{p-3} \wedge \theta.$$

On a

$$i\, d'_z\, d''_z\, \alpha \wedge \alpha = i\, d'_x\, d''_x\, (i\, d'_z\, d''_z\, E \wedge \alpha),$$
$$i\, d'_z\, \alpha \wedge d''_z\, \alpha = i\, d'_x\, d''_x\, (i\, d''_x\, d'_z\, E \wedge i\, d'_x\, d''_z\, E).$$

Si on pose par définition

$$(2.27)\quad \begin{cases} \psi = i\, d'_z\, d''_z\, E \wedge \alpha + (p-2)\, i\, d''_x\, d'_z\, E \wedge i\, d'_x\, d''_z\, E, \\ \chi = -\, i\, d'_x E \wedge d''_x E \wedge \alpha^{p-3} \wedge \theta, \end{cases}$$

on a simplement

$$(2.28)\qquad I_6 + I_7 = (p-1) \int i\, d'_x\, d''_x\, \psi \wedge \chi.$$

Introduisons l'opérateur $d^c_x = i\,(d''_x - d'_x)$ (*cf.* WEIL [28]), un calcul immédiat montre qu'on a

$$d_x\,(d^c_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge d^c_x\, \chi)$$
$$= 2\, i\, d'_x\, d''_x\, \psi \wedge \chi - 2\, \psi \wedge i\, d'_x\, d''_x\, \chi + 2\, i\, d'_x\, \psi \wedge d'_x\, \chi - 2\, i\, d''_x\, \psi \wedge d''_x\, \chi.$$

Mais ψ étant de bidegré (1, 1) en x, et χ de bidegré $(n-2, n-2)$ en x, les formes $d'_x\, \psi \wedge d'_x\, \chi$ et $d''_x\, \psi \wedge d''_x\, \chi$ sont nulles, on a

$$(2.29)\quad \frac{1}{2}\, d_x\,(d^c_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge d^c_x\, \chi) = i\, d'_x\, d''_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge i\, d'_x\, d''_x\, \chi.$$

Appliquons la formule de Stokes :

$$\int_{|x-z| \geqq \varepsilon} i\, d'_x\, d''_x\, \psi \wedge \chi = \int_{|x-z| \geqq \varepsilon} \psi \wedge i d'_x d''_x \chi + \frac{1}{2} \int_{S_\varepsilon} d^c_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge d^c_x\, \chi.$$

Sur la sphère S_ε les coefficients de la forme $d^c_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge d^c_x\, \chi$ sont majorés par $O\,(\varepsilon^{-2p-1})$, les coefficients de l'intégrale

$$\int_{S_\varepsilon} d^c_x\, \psi \wedge \chi - \psi \wedge d^c_x\, \chi$$

sont donc majorés par $O\,(\varepsilon^{2n-2p-2})$ et tendent vers zéro quand ε tend vers zéro. On a donc

$$\int_{\mathbf{C}^n} i\, d'_x\, d''_x\, \psi \wedge \chi = \int_{\mathbf{C}^n} \psi \wedge i\, d'_x\, d''_x\, \chi,$$

$$(2.30)\qquad I_6 + I_7 = (p-1) \int \psi \wedge i\, d'_x\, d''_x\, \chi.$$

Un calcul immédiat montre que

$$i\, d'_x\, d''_x\, \chi = \alpha^{p-1} \wedge \theta - 2\, \mathrm{Re}\, i\, d''_x\, E \wedge \alpha^{p-2} \wedge d'_x\, \theta$$
$$-\, i\, d'_x\, E \wedge d''_x\, E \wedge \alpha^{p-3} \wedge i\, d'_x\, d''_x\, \theta.$$

On a donc, d'après (2.27) et (2.30),

$$(2.31)\quad I_6 + I_7 = (p-1)\int i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha^p \wedge \theta + (p-1)(p-2)\int \omega_3$$
$$- (p-1)\int \psi \wedge (2\,\mathrm{Re}\, i\,d''_x\,E \wedge \alpha \wedge d'_x\,\theta$$
$$+ i\,d'_x\,E \wedge d''_x\,E \wedge i\,d'_x\,d''_x\,\theta) \wedge \alpha^{p-3}.$$

D'après (2.18), (2.25) et (2.31), on obtient

$$(2.32)\quad i\,d'_z\,d''_z\,U_2 = p(p+1)\int (i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha$$
$$+ pi\,d'_x\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E) \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta$$
$$+ p\int \varphi \wedge d_x\,\theta - p(p-1)$$
$$\times \int \psi \wedge (2\,\mathrm{Re}\, i\,d''_x\,E \wedge \alpha \wedge d'_x\,\theta$$
$$+ i\,d'_x\,E \wedge d''_x\,E \wedge i\,d'_x\,d''_x\,\theta) \wedge \alpha^{p-3}.$$

Le premier terme seul sera d'une importance fondamentale.

On regroupe les résultats des calculs précédents dans l'énoncé suivant

PROPOSITION 2.1. — *Le potentiel U associé à une $(n-p, n-p)$ forme différentielle θ de classe C^∞, à support compact, est de classe C^2, et on a*

$$i\,d'_z\,d''_z\,U = p(p+1)\int (i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha + pi\,d'_x\,d''_z\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E)$$
$$\wedge\, \alpha^{p-1} \wedge \theta + J_1 + J_2 + J_3$$

avec :

$$J_1 = -\int i\,d'_z\,d''_z\,(i\,d''_x\,E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge d'_x\,\theta,$$
$$J_2 = p\int \varphi \wedge d_x\,\theta,$$
$$J_3 = -p(p-1)\int \psi \wedge (2\,\mathrm{Re}\, i\,d''_x\,E \wedge \alpha \wedge d'_x\,\theta$$
$$+ i\,d'_x\,E \wedge d''_x\,E \wedge i\,d'_x\,d''_x\,\theta) \wedge \alpha^{p-3},$$
$$\psi = i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge \alpha + (p-2)\,i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E,$$
$$\varphi = -\,i\,d'_z\,d''_z\,E \wedge i\,d_x\,E \wedge \alpha^{p-1} - i\,d'_z\,E \wedge i\,d_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}$$
$$-(2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\,d'_z\,E \wedge i\,d''_x\,E \wedge d''_z\,\alpha \wedge \alpha^{p-2}$$
$$-(2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-1}$$
$$+(2p-2)\,\mathrm{Re}\, i\,d'_x\,E \wedge i\,d''_x\,d'_z\,E \wedge i\,d'_x\,d''_z\,E \wedge \alpha^{p-2},$$
$$E = \log |z-x|^2.$$

Le lemme suivant montre que la première intégrale, dans l'expression de $i\, d'_z\, d''_z\, U$, est une forme positive, lorsque θ est positive.

Lemme 2.1. — *Soit θ une forme positive, pour tout $\lambda_j \in \mathbf{C}$, tout z et $x \in \mathbf{C}^n$, avec $z \neq x$, on a*

$$\Sigma_{j,k}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\alpha - pi\, d'_x\left(\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_k}\right) \wedge d''_x\left(\frac{\partial E}{\partial z_j}\right)\right]\lambda_j \bar{\lambda}_k \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta \geqq 0$$

avec

$$1 \leqq j, \qquad k \leqq n.$$

On suppose d'abord $p = 1$, il suffit alors de démontrer que la forme

$$\Sigma_{j,k}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\alpha - i\, d'_x\left(\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_k}\right) \wedge d''_x\left(\frac{\partial E}{\partial z_j}\right)\right]\lambda_j \bar{\lambda}_k$$

est positive, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda_j \in \mathbf{C}$ et tout $\mu_l \in \mathbf{C}$, on a

$$(2.33)\quad \Sigma_{j,k,l,m}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\,\frac{\partial^2 E}{\partial x_l\, \partial \bar{x}_m} - \frac{\partial^2 E}{\partial x_l\, \partial \bar{z}_k}\,\frac{\partial^2 E}{\partial \bar{x}_m\, \partial z_j}\right)\lambda_j \bar{\lambda}_k \mu_l \bar{\mu}_m \geqq 0,$$

$1 \leqq j,\ k,\ l,\ m \leqq n$.

Introduisons la forme hermitienne $H(\lambda, \mu)$ définie par

$$H(\lambda, \mu) = \Sigma_{j,k}\frac{\partial^2 E}{\partial z_j\, \partial \bar{z}_k}\lambda_j \bar{\mu}_k.$$

Comme $E = \log|z - x|^2$ est plurisousharmonique en z, H est positive. Comme

$$\frac{\partial E}{\partial x_l} = -\frac{\partial E}{\partial z_l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial \bar{x}_m} = -\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_m},$$

(2.33) s'écrit encore

$$H(\lambda, \lambda)\, H(\mu, \mu) - H(\mu, \lambda)\, H(\lambda, \mu) \geqq 0,$$

ce qui n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour traiter le cas $p > 1$, on introduit la forme différentielle en x à coefficients fonctions de z, x et de λ, γ_λ définie par

$$\gamma_\lambda = \Sigma_{j,k}\, i\, d'_x\left(\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_k}\right) \wedge d''_x\left(\frac{\partial E}{\partial z_j}\right)\lambda_j \bar{\lambda}_k,$$

$$(2.34)\qquad \gamma_\lambda = i\, d'_x\left(\Sigma_k \frac{\partial E}{\partial \bar{z}_k}\bar{\lambda}_k\right) \wedge d''_x\left(\Sigma_j \frac{\partial E}{\partial z_j}\lambda_j\right).$$

Remarquons que

$$(2.35)\qquad \gamma_\lambda \wedge \gamma_\lambda = 0.$$

On veut démontrer que

$$(2.36) \qquad [H(\lambda, \lambda)\, \alpha^p - p\, \gamma_\lambda \wedge \alpha^{p-1}] \wedge \theta \geqq 0.$$

D'après le cas $p = 1$, on sait que $H(\lambda, \lambda)\, \alpha - \gamma_\lambda \geqq 0$, si $H(\lambda, \lambda) = 0$, il en résulte que $\gamma_\lambda = 0$, et que (2.36) est vraie. Si $H(\lambda, \lambda) > 0$, (2.36) s'écrit en tenant compte de (2.35)

$$(2.37) \qquad [H(\lambda, \lambda)]^{-p+1} [H(\lambda, \lambda)\, \alpha - \gamma_\lambda]^p \wedge \theta \geqq 0.$$

Comme $H(\lambda, \lambda)\, \alpha - \gamma_\lambda$ est positive, de bidegré (1, 1), (2.37) résulte de la positivité de θ. Ce qui achève de démontrer le lemme.

LEMME 2.2. — *Soit θ un $(n-p, n-p)$-courant à support compact, tel que θ, $d'_x\, \theta$, $d''_x\, \theta$, $d'_x\, d''_x\, \theta$ soient d'ordre nul. L'égalité de la proposition* 2.1 *est encore vraie au sens des distributions pour le potentiel U associé à θ.*

L'hypothèse sur θ signifie que les coefficients des courants θ, $d'_x\, \theta$, $d''_x\, \theta$ et $d'_x\, d''_x\, \theta$ sont des mesures à support compact. L'égalité de la proposition 2.1 devient une égalité au sens des courants de bidegré (1, 1), et toutes les dérivées sont calculées au sens des distributions.

Soit ρ_ε une fonction régularisante de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, positive, telle que ρ_ε converge vers δ, mesure de Dirac à l'origine, quand ε tend vers zéro, la convergence ayant lieu dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$. Soit K_p la fonction $-|x|^{-2p}$; U n'est autre que le produit de convolution de K_p avec la mesure $\sigma = \beta^p \wedge \theta$

$$U = K_p \star \sigma.$$

Considérons le courant régularisé $\theta \star \rho_\varepsilon$ (obtenu en régularisant chaque coefficient de θ) et le potentiel U_ε associé à $\theta \star \rho_\varepsilon$. On a

$$U_\varepsilon = K_p \star (\sigma \star \rho_\varepsilon) = (K_p \star \sigma) \star \rho_\varepsilon = U \star \rho_\varepsilon.$$

Il en résulte que

$$U_\varepsilon \to U \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{C}^n) \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,$$

$$(2.38) \quad i\, d'_z\, d''_z\, U_\varepsilon \to i\, d'_z\, d''_z\, U \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_{1,1}(\mathbf{C}^n) \qquad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0,$$

[$\mathcal{D}'_{1,1}(\mathbf{C})$ désignant l'espace des courants de bidegré (1, 1), muni de sa topologie faible]. Remarquons que le second membre de l'égalité de la proposition 2.1 est un (1, 1)-courant en z dont les coefficients sont des combinaisons linéaires finies de produits de convolution de la forme $K \star T$, où $K(x)$ est un noyau fonction homogène de x obtenu comme produit de dérivées de la fonction $\log |x|^2$, et T est un coefficient de θ, $d'\,\theta$, $d''\,\theta$ ou $d'\,d''\,\theta$. On constate que K est homogène de degré $-2p-2$

si T est un coefficient de θ, homogène de degré $-2p-1$ si T est coefficient de $d'\theta$ ou $d''\theta$, homogène de degré $-2p$ si T est coefficient de $d'd''\theta$. Dans tous les cas, K est localement sommable, le produit $K \star T$ est donc encore défini et est dans L^1_{loc} si θ, $d'\theta$, $d''\theta$ et $d'd''\theta$ sont d'ordre nul, auquel cas T est une mesure.

Au courant régularisé $\theta \star \rho_\varepsilon$ correspond le produit régularisé $K \star T \star \rho_\varepsilon$ qui converge vers $K \star T$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{C}^n)$ quand ε tend vers zéro.

Tenant compte de (2.38), le lemme 2.2 résulte alors de l'application de la proposition 2.1 au courant $\theta \star \rho_\varepsilon$.

On applique maintenant les résultats précédents au courant obtenu par troncature d'un courant positif fermé. Si η est une fonction de classe C^2 sur $\mathbf{C}^n$, on pose

$$| d''\eta(x) | = \left(\Sigma_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta}{\partial \bar{x}_k}(x) \right|^2 \right)^{1/2},$$

$$| d'd''\eta(x) | = \left(\Sigma_{j,k} \left| \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_j \, \partial \bar{x}_k}(x) \right|^2 \right)^{1/2}.$$

PROPOSITION 2.2. — *Soit θ un $(n-p, n-p)$-courant positif et fermé dans $\mathbf{C}^n$. Soit η une fonction positive, de classe C^∞, à support compact dans $\mathbf{C}^n$. Soit U le potentiel défini par*

$$U(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} | z - x |^{-2p} \eta(x) \, \beta^p \wedge \theta(x).$$

Alors le hessien de U vérifie, pour tout $\lambda = (\lambda_j) \in \mathbf{C}^n$, l'inégalité

$$\text{(2.39)} \quad \Sigma_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \geqq -C(p,n) \, | \lambda |^2 \int \left(\frac{| d''\eta(x) |}{| z - x |} + | d'd''\eta(x) | \right) \frac{\beta^p \wedge \theta(x)}{| z - x |^{2p}},$$

l'inégalité ayant lieu au sens des distributions dans l'ouvert, complémentaire du support $d''\eta$, $C(p,n)$ désignant une constante ne dépendant que de p et de n.

Cette proposition constitue le résultat essentiel de ce paragraphe, elle montre que le potentiel U, associé au courant $\eta\theta$, est « presque plurisousharmonique » en dehors du support de $d''\eta$, et elle donne une estimation du défaut de plurisousharmonicité.

Puisque $d'\theta = 0$ et $d''\theta = 0$, on a

$$\text{(2.40)} \quad \begin{cases} d'(\eta\theta) = d'\eta \wedge \theta, \qquad d''(\eta\theta) = d''\eta \wedge \theta, \\ d'd''(\eta\theta) = d'd''\eta \wedge \theta. \end{cases}$$

D'après le lemme 2.2, on peut appliquer la proposition 2.1 au courant positif $\eta\theta$. Désignons par $\mathcal{H}(U, \lambda)$ le hessien de U

$$\mathcal{H}(U, \lambda) = \Sigma_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k.$$

On a donc

$$\mathcal{H}(U, \lambda) = p(p+1) \int_{\mathbf{C}^n} \Sigma_{j,k} \left[\frac{\partial^2 E}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \alpha - p i \, d'_x \left(\frac{\partial E}{\partial \bar{z}_k} \right) \wedge d''_x \left(\frac{\partial E}{\partial z_j} \right) \right]$$
$$\times \lambda_j \bar{\lambda}_k \alpha^{p-1} \wedge \eta\theta(x) + J_1(\lambda) + J_2(\lambda) + J_3(\lambda),$$

où $J_1(\lambda)$, $J_2(\lambda)$, $J_3(\lambda)$ sont les formes hermitiennes en λ associées aux (1, 1)-formes en z, J_1, J_2, J_3.

D'après le lemme 2.1, l'intégrale est positive, on a

$$\mathcal{H}(U, \lambda) \geqq J_1(\lambda) + J_2(\lambda) + J_3(\lambda),$$
$$\mathcal{H}(U, \lambda) \geqq -|J_1(\lambda)| - |J_2(\lambda)| - |J_3(\lambda)|.$$

On est donc ramené à majorer les coefficients des formes J_1, J_2, J_3, la majoration de la proposition 2.2 résulte alors de l'expression explicite de J_1, J_2, J_3 donnée par la proposition 2.1, du fait que les dérivées premières de E sont majorées par $1/|z - x|$ et les dérivées secondes de E par $1/|z - x|^2$, de (2.40), et du fait que la mesure $\beta^p \wedge \theta$ majore les coefficients de θ. Détaillons les majorations par exemple pour J_1, on a

$$J_1(\lambda) = -\int \Sigma_{j,k} \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (i \, d''_x E \wedge \alpha^{p-1}) \wedge d'_x \eta \wedge \theta(x) \lambda_j \bar{\lambda}_k.$$

Les coefficients de $i \, d''_x E \wedge \alpha^{p-1}$ sont des fonctions homogènes de $z - x$ de degré $-2p + 1$, les coefficients de $\partial^2/\partial z_j \partial \bar{z}_k (i \, d''_x E \wedge \alpha^{p-1})$ sont donc homogènes en $z - x$ de degré $-2p - 1$, ils sont donc majorés par $C(p, n) |z - x|^{-2p-1}$, on a donc

$$|J_1(\lambda)| \leqq C(p, n) \int |z - x|^{-2p-1} |d'_x \eta| |\beta^p \wedge \theta(x)| |\lambda|^2.$$

Des considérations semblables sont valables pour $J_2(\lambda)$ et $J_3(\lambda)$.

3. Le cas d'un courant de bidegré (1, 1) et d'une mesure

Lorsque X est une hypersurface, le courant d'intégration sur X est positif, fermé, de bidegré (1, 1). Dans ce cas, les calculs du paragraphe 2 ne sont pas valables. Mais on peut faire un calcul particulier beaucoup plus simple, analogue à celui fait implicitement par P. Lelong ([12], p. 388).

On considère le potentiel U défini par

$$U(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2n+2}\, \eta(x)\, \beta^{n-1} \wedge \theta(x), \tag{3.1}$$

où $\eta \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, et où θ désigne un (1, 1)-courant positif, fermé dans $\mathbf{C}^n$. θ s'écrit en écriture canonique

$$\theta = i \sum_{j,k} \theta_{jk}\, dz_j \wedge d\bar{z}_k, \qquad 1 \leqq j, \quad k \leqq n, \tag{3.2}$$

les θ_{jk} étant des distributions sur $\mathbf{C}^n$.

On a

$$\beta^{n-1} \wedge \theta = i^n (n-1)!\, (\textstyle\sum_{j=1}^n \theta_{jj}) \wedge dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \ldots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n. \tag{3.3}$$

Introduisons la fonction K définie par

$$K(x) = 2^n (n-1)!\, |x|^{-2n+2}. \tag{3.4}$$

D'après (3.2) et (3.3), et en tenant compte des conventions faites, (3.1) s'écrit encore

$$U = \textstyle\sum_{j=1}^n K \star (\eta\theta_{jj}). \tag{3.5}$$

Posons

$$U_j = K \star (\eta\theta_{jj}).$$

Puisque θ est fermé, on a les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}\theta_{jk} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\theta_{jl}, \\ \frac{\partial}{\partial z_l}\theta_{jk} &= \frac{\partial}{\partial z_j}\theta_{lk}. \end{aligned}\right. \tag{3.6}$$

En utilisant les relations (3.6) et la règle de dérivation d'un produit de convolution, on a successivement les égalités suivantes :

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}(\eta\theta_{jj}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_l}\theta_{jj} + \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\eta \frac{\partial \theta_{jl}}{\partial \bar{z}_j}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_j}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}(\eta\theta_{jl}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\, \partial \bar{z}_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar{z}_j}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial \bar{z}_j} \star \frac{\partial}{\partial z_k}(\eta\theta_{jl}),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\,\partial \bar z_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar z_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar z_j}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial \bar z_j} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_k}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial \bar z_j} \star \left(\eta \frac{\partial \theta_{kl}}{\partial z_j}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z_k\,\partial \bar z_l} U_j = \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar z_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar z_j}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial \bar z_j} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_k}\theta_{jl} - \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\theta_{kl}\right) + \frac{\partial^2 K}{\partial z_j\,\partial \bar z_j} \star (\eta\,\theta_{kl}).$$

En multipliant cette dernière égalité par $\lambda_k \bar\lambda_l$, et en sommant sur j, k et l, on obtient

$$(3.7)\qquad \mathscr{H}(U, \lambda) = \Sigma_{j,k,l} \frac{\partial^2 K}{\partial z_j\,\partial \bar z_j} \star (\eta \theta_{kl}\,\lambda_k \bar\lambda_l) + \frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar z_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar z_j}\theta_{jl}\right)\lambda_k\bar\lambda_l + \frac{\partial K}{\partial \bar z_j} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_k}\theta_{jl} - \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\theta_{kl}\right)\lambda_k\bar\lambda_l.$$

Or il est bien connu qu'on a

$$(3.8)\qquad \Sigma_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 K}{\partial z_j\,\partial \bar z_j} = 2^n (n-1)!\,\frac{\pi^n}{(n-2)!}\,\delta,$$

où δ désigne la distribution de Dirac en 0. On a donc

$$(3.9)\qquad \Sigma_{j,k,l} \frac{\partial^2 K}{\partial z_j\,\partial \bar z_j} \star (\eta\theta_{kl}\,\lambda_k\bar\lambda_l) = (n-1)\,(2\,\pi)^n\,\eta\,\Sigma_{k,l}\,\theta_{k,l}\,\lambda_k\bar\lambda_l.$$

Comme θ est positif, le second membre de (3.9) est positif (à condition de prendre $\eta \geqq 0$). On a donc (au sens des distributions) l'inégalité suivante :

$$(3.10)\qquad \mathscr{H}(U, \lambda) \geqq \Sigma_{j,k,l}\left[\frac{\partial K}{\partial z_k} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial \bar z_l}\theta_{jj} - \frac{\partial \eta}{\partial \bar z_j}\theta_{jl}\right) + \frac{\partial K}{\partial \bar z_j} \star \left(\frac{\partial \eta}{\partial z_k}\theta_{jl} - \frac{\partial \eta}{\partial z_j}\theta_{kl}\right)\right]\lambda_k\bar\lambda_l.$$

Il résulte aussitôt de (3.10) que la proposition 2.2 est encore valable pour un (1, 1)-courant. De façon précise, on a l'énoncé suivant :

Proposition 3.1. — *Soit θ un (1, 1)-courant positif, fermé, dans $\mathbf{C}^n$, soit η une fonction positive appartenant à $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, et soit U le potentiel défini par*

$$U(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2n+2}\,\eta(x)\,\beta^{n-1} \wedge \theta(x).$$

Alors le hessien de U vérifie, pour tout $\lambda = (\lambda_j) \in \mathbf{C}^n$, *l'inégalité*

$$\Sigma_{j,k} \frac{\partial^2 U}{\partial z_j \, \partial \bar{z}_k} \lambda_j \bar{\lambda}_k \geqq - C(n) \, | \lambda |^2 \int_{\mathbf{C}^n} | z - x |^{-2n+1} \, | d'' \eta (x) | \, \beta^{n-1} \wedge \theta (x),$$

l'inégalité ayant lieu au sens des distributions, et $C(n)$ *désignant une constante ne dépendant que de* n.

Envisageons maintenant le cas où X est une suite discrète de points a_n. On lui associe la mesure σ définie par

$$(3.11) \qquad \sigma = \Sigma_{n=1}^{\infty} \delta_{a_n},$$

δ_{a_n} désignant la masse de Dirac au point a_n.

A une mesure positive σ, on associera la fonction U

$$(3.12) \qquad U(z) = \int_{\mathbf{C}^n} \log \frac{| z - x |}{1 + | x |} \eta (x) \, d\sigma (x).$$

$U(z)$ est évidemment plurisousharmonique (*cf.* Lelong [13], p. 54). Il est d'ailleurs facile de calculer le hessien de U, on trouve

$$(3.13) \qquad \mathcal{H} (U, \lambda) = \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}^n} \frac{| (z - x) \wedge \lambda |^2}{| z - x |^4} \eta (x) \, d\sigma (x),$$

avec :

$$| (z - x) \wedge \lambda |^2 = \Sigma_{j<k} \, | (z_j - x_j) \lambda_k - (z_k - x_k) \lambda_j |^2.$$

4. **Potentiel canonique pour un courant θ tel que**

$$\int_1^{+\infty} t^{-3} \nu (t) \, dt < + \infty.$$

On considère un courant positif, fermé, tel que

$$\int_{|x| \geqq 1} | x |^{-2p-2} \beta^p \wedge \theta (x) < + \infty,$$

c'est-à-dire un courant à croissance assez lente à l'infini. Soit, d'autre part, $P(z, x)$ un polynôme des z_k et $\bar{z}_k$, pluriharmonique en z, dont les coefficients sont des fonctions de x, de classe C^∞ au voisinage du support de θ. On suppose qu'on a choisi $P(z, x)$ de sorte que l'intégrale

$$(4.1) \qquad V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} [- | z - x |^{-2p} + P(z, x)] \, \beta^p \wedge \theta (x),$$

soit absolument convergente pour presque tout z.

Montrons que la fonction $V(z)$ définie par (4.1) est plurisousharmonique. Soit V_j la fonction définie par

$$(4.2)\qquad V_j(z) = \int_{\mathbf{C}^n} [-|z-x|^{-2p} + P(z,x)]\,\chi_j(x)\,\beta^p \wedge \theta(x),$$

où $\chi_j \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ désigne la suite de fonctions définie par $\chi_j(x) = \chi(x/j)$, où $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ est égale à 1 pour $|x| \leqq 1$, et à 0 pour $|x| \geqq 2$. Le choix ultérieur de $P(z,x)$ sera fait de telle sorte qu'on ait trivialement

$$(4.3)\qquad V = \lim_{j\to\infty} V_j \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{C}^n).$$

Il en résulte que

$$(4.4)\qquad d'_z\, d''_z\, V = \lim_{j\to\infty} d'_z\, d''_z\, V_j \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'_{1,1}(\mathbf{C}^n)$$

(muni de la topologie faible).

Désignons par W_j la fonction définie par

$$(4.5)\qquad W_j(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z-x|^{-2p}\,\chi_j(x)\,\beta^p \wedge \theta(x).$$

Comme $P(z,x)$ est pluriharmonique en z, on a

$$(4.6)\qquad d'_z\, d''_z\, V_j = d'_z\, d''_z\, W_j,$$

c'est-à-dire, en considérant les hessiens, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^n$, on a

$$(4.7)\qquad \mathcal{H}(V_j, \lambda) = \mathcal{H}(W_j, \lambda).$$

La proposition 2.2 donne une estimation du hessien de W_j :

$$(4.8)\qquad \mathcal{H}(W_j, \lambda) \geqq -C(p,n)\,|\lambda|^2 \times \int \left(\frac{|d''\chi_j(x)|}{|z-x|} + |d'\,d''\chi_j(x)| \right) \frac{\beta^p \wedge \theta(x)}{|z-x|^{2p}}.$$

Comme $\chi_j(x) = \chi(x/j)$ et que $d''\chi_j(x) = 0$ pour $|x| \leqq j$ ou pour $|x| \geqq 2j$, on voit aisément qu'il existe une constante $C(p,n,\chi)$ telle que

$$(4.9)\qquad \mathcal{H}(W_j, \lambda) \geqq -C(p,n,\chi)\,|\lambda|^2 \times \int_{|x|\geqq j} \left(\frac{1}{|z-x|} + \frac{1}{|x|} \right) \frac{\beta^p \wedge \theta(x)}{|x|.|z-x|^{2p}}.$$

D'après l'hypothèse de croissance sur θ, le second membre de (4.9) tend vers zéro quand $j \to \infty$.

D'après (4.4), (4.7) et (4.9), on a donc

$$\mathcal{H}(V, \lambda) \geqq 0.$$

La fonction V est donc plurisousharmonique.

La construction du polynôme $P(z, x)$ relève de techniques classiques, consistant à développer le noyau $|z - x|^{-2p}$ suivant les puissances de z, pour x grand. Nous renvoyons à P. Lelong ([12], p. 374-380, *cf.* aussi [13]) pour les détails d'une telle construction (dans P. Lelong, la construction est faite pour $p = n - 1$, mais se transpose adssitôt au cas où p est quelconque). En supposant θ nul au voisinage de 0 et

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^{2p+1}} < +\infty,$$

on peut prendre

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} (-|z - x|^{-2p} + |x|^{-2p})\, \beta^p \wedge \theta(x). \tag{4.10}$$

En supposant que

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^{2p+2}} < +\infty,$$

on peut prendre

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} [-|z - x|^{-2p} + |x|^{-2p} + 2p\, |x|^{-2p-2} \operatorname{Re}(x, z)]\, \beta^p \wedge \theta(x), \tag{4.11}$$

$$[\text{avec } (x, z) = \textstyle\sum_{j=1}^n x_j \bar{z}_j].$$

On a donc le résultat suivant :

Proposition 4.1. — *Soit θ un $(n - p, n - p)$-courant, positif, fermé, nul au voisinage de 0, la fonction V définie par*

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} (-|z - x|^{-2p} + |x|^{-2p})\, \beta^p \wedge \theta(x),$$

si

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^{2p+1}} < +\infty,$$

resp.

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} [-|z - x|^{-2p} + |x|^{-2p} + 2p\, |x|^{-2p-2} \operatorname{Re}(x, z)]\, \beta^p \wedge \theta(x),$$

si

$$\int_1^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t^{2p+2}} < +\infty,$$

est plurisousharmonique.

D'après P. Lelong ([12] et [13]), $V(z)$ vérifie les majorations

$$V(z) \leq C(p, n)\left[\int_0^r \frac{\nu(t)}{t}\,dt + r\int_r^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt\right] \tag{4.12}$$

$$\text{si} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^2} < +\infty,$$

resp.

$$\left\{\begin{array}{l} V(z) \leq C(p, n)\left[r\displaystyle\int_0^r \frac{\nu(t)}{t^2}\,dt + r^2\int_r^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^3}\,dt\right], \\ \qquad \text{si} \quad \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\nu(t)}{t^3}\,dt < +\infty. \end{array}\right. \tag{4.13}$$

Remarque 4.1. — Si l'origine appartient au support de θ, il suffit de prendre pour V les fonctions définies par

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} \left(-\frac{1}{|z-x|^{2p}} + \frac{1}{1+|x|^{2p}}\right)\beta^p \wedge \theta(x),$$

resp.

$$V(z) = \int_{\mathbf{C}^n} \left[-\frac{1}{|z-x|^{2p}} + \frac{1}{1+|x|^{2p}} + 2p\frac{\operatorname{Re}(z, x)}{1+|x|^{2p+2}}\right]\beta^p \wedge \theta(x).$$

Remarque 4.2. — Comme $|x|^{-2p}$ est, à une constante près, la solution élémentaire de l'opérateur Δ^{n-p} (laplacien itéré $n-p$ fois), on voit, sans difficultés, que la fonction V est solution de l'équation

$$\Delta^{n-p} V = (-1)^{n-p-1}\frac{(n-p-1)!}{(p-1)!}\beta^p \wedge \theta.$$

La fonction V apparaît donc comme une généralisation aux courants positifs, fermés, de bidegré $(n-p, n-p)$, du potentiel canonique, construit par P. Lelong ([12] et [13]) pour les courants de bidegré (1, 1). Des considérations techniques nous limitent au cas où

$$\int_{|x| \geq 1} \frac{d\sigma(x)}{|x|^{2p+2}} < +\infty,$$

mais il me paraît très probable qu'une telle généralisation existe pour tous les courants positifs, fermés, d'ordre fini.

Remarque 4.3. — Lorsque $p = 0$, il suffit de remplacer $-|x|^{-2p}$ par $\log|x|$.

5. Fonction plurisousharmonique associée à un courant positif fermé

Dans ce paragraphe, on construit une fonction plurisousharmonique V dont le comportement local et la croissance à l'infini sont étroitement liés à la structure du courant θ.

Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$ une fonction telle que $0 \leqq \chi(z) \leqq 1$, telle que $\chi(z) = 1$ pour $|z| \leqq 1$, $\chi(z) = 0$ pour $|z| \geqq 1 + \varepsilon$, ε désignant un nombre fixé avec $0 < \varepsilon < 1$.

Posons $\chi_j(z) = \chi(z/j)$ pour $j \geqq 1$, la fonction χ_j vaut donc 1 pour $|z| \leqq j$ et 0 pour $|z| \geqq (1 + \varepsilon) j$.

Posons également

$$\rho_1 = \chi_1, \qquad \rho_j = \chi_j - \chi_{j-1}, \qquad j \geqq 2;$$

le support de ρ_j est contenu dans l'ensemble $j - 1 \leqq |z| \leqq (1 + \varepsilon) j$ $(j \geqq 2)$, et les ρ_j constituent une partition de l'unité

$$\Sigma_{j=1}^{\infty} \rho_j = 1. \tag{5.1}$$

Désignons par η_j la fonction

$$\eta_j(z) = \chi\left(\frac{z}{(1 + 2\varepsilon) j}\right),$$

la fonction η_j est égale à 1 pour $|z| \leqq (1 + 2\varepsilon) j$ et en particulier sur le support de ρ_j, η_j est nulle pour $|z| \leqq (1 + 5\varepsilon) j$. On pose

$$U_j(z) = -\int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2p} \eta_j(x) \beta^p \wedge \theta(x), \tag{5.2}$$

ou encore

$$U_j = K_p \bigstar (\eta_j \sigma). \tag{5.3}$$

On considère la fonction U définie par

$$U = \Sigma_{j=1}^{\infty} \rho_j U_j. \tag{5.4}$$

La série est convergente, car il n'y a localement qu'un nombre fini de ρ_j non nulles.

En utilisant la proposition 2.2, on va estimer « le défaut de plurisousharmonicité » de la fonction U à l'aide de $\nu(r)$, puis en ajoutant à U une fonction continue suffisamment fortement plurisousharmonique, on obtiendra une fonction plurisousharmonique qui aura même comportement local que U.

On désigne encore par $\mathcal{H}(U, \lambda)$ le hessien de U, calculé au sens des distributions, soit

$$\mathcal{H}(U, \lambda) = \Sigma_{k,l} \frac{\partial^2 U}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l, \qquad 0 \leqq k, l, \leqq n, \qquad \lambda = (\lambda_k) \in \mathbf{C}^n.$$

On a

$$\mathcal{H}(U, \lambda) = \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l} \left(\rho_j \frac{\partial^2 U_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} + \frac{\partial \rho_j}{\partial z_k} \frac{\partial U_j}{\partial \bar{z}_l} + \frac{\partial \rho_j}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial U_j}{\partial z_k} + U_j \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}\right) \lambda_k \bar{\lambda}_l. \tag{5.5}$$

Soit encore $\mathcal{H}(U, \lambda) = \mathcal{H}_1(U, \lambda) + \mathcal{H}_2(U, \lambda) + \mathcal{H}_3(U, \lambda)$, avec :

$$\mathcal{H}_1(U, \lambda) = \qquad \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l}\, \rho_j \frac{\partial^2 U_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l,$$

$$\mathcal{H}_2(U, \lambda) = 2 \operatorname{Re} \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l} \frac{\partial \rho_j}{\partial z_k} \frac{\partial U_j}{\partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l,$$

$$\mathcal{H}_3(U, \lambda) = \qquad \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l}\, U_j \frac{\partial^2 \rho_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l.$$

Appliquons la proposition 2.2 ou 3.1 si $p = n - 1$) à U_j, on a

$$(5.6) \quad \mathcal{H}_1(U, \lambda) \geqq - \Sigma_{j=1}^{\infty} C(p, n) \mid \lambda \mid^2 \rho_j(z)$$
$$\times \int \left(\frac{\mid d'' \eta_j(x) \mid}{\mid z - x \mid} + \mid d' d'' \eta_j(x) \mid \right) \frac{d\sigma(x)}{\mid z - x \mid^{2p}}.$$

Soit M un majorant de $\mid d'' \chi \mid$ et de $\mid d' d'' \chi \mid$, on a

$$(5.7) \qquad \mid d'' \eta_j(x) \mid \leqq \frac{M}{(1 + 2\varepsilon) j},$$
$$\mid d' d'' \eta_j(x) \mid \leqq \frac{M}{(1 + 2\varepsilon)^2 j^2}.$$

D'autre part, lorsque z appartient au support de ρ_j et x au support de $d'' \eta_j$ on a

$$\mid x - z \mid \geqq (1 + 2\varepsilon) j - (1 + \varepsilon) j,$$
$$(5.8) \qquad \mid x - z \mid \geqq \varepsilon j.$$

Tenant compte de (5.6), (5.7) et (5.8), on obtient

$$(5.9) \quad \mathcal{H}_1(U, \lambda) \geqq - C(\varepsilon, p, n) M \mid \lambda \mid^2 \Sigma_{j=1}^{\infty} \frac{\rho_j(z)}{j^{2p+2}} \int_{\mid x \mid \leqq (1+5\varepsilon) j} d\sigma(x).$$

Lorsque $\rho_j(z) \neq 0$, on a : $j - 1 \leqq \mid z \mid \leqq (1 + \varepsilon) j$, et par conséquent

$$(5.10) \qquad \frac{1 + \mid z \mid}{2(1 + \varepsilon)} \leqq j \leqq 1 + \mid z \mid.$$

Comme $\Sigma_{j=1}^{\infty} \rho_j = 1$, on a, d'après (5.9) et (5.10),

$$(5.11) \qquad \mathcal{H}_1(U, \lambda) \geqq - C(\varepsilon) \mid \lambda \mid^2 \frac{\sigma[(1 + 5\varepsilon)(1 + \mid z \mid)]}{(1 + \mid z \mid)^{2p+2}}.$$

$C(\varepsilon)$ désignant une constante dépendant de ε, p, n et χ.

Dans la suite, $C(\varepsilon)$ désignera toujours une constante dépendant de ε, p, n et χ, mais qui pourra « varier d'une inégalité à la suivante ».

On transforme $\mathcal{H}_2(U, \lambda)$; en écrivant que $\rho_1 = \chi_1$, $\rho_j = \chi_j - \chi_{j-1}$, $j \geqq 2$, et en regroupant les termes en χ_j de la série, il vient

$$(5.12) \qquad \mathcal{H}_2(U, \lambda) = 2 \operatorname{Re} \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l} \frac{\partial \chi_j}{\partial z_k} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}(U_j - U_{j+1}) \lambda_k \bar{\lambda}_l.$$

On a, d'autre part, d'après (5.2) et (5.3) :

$$(5.13) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}(U_j - U_{j+1}) = p \int \frac{z_l - x_l}{|z - x|^{2p+2}} [\eta_j(x) - \eta_{j+1}(x)]\, d\sigma(x),$$

$$(5.14) \qquad \left| \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l}(U_j - U_{j+1}) \right| \leqq p \int |z - x|^{-2p-1} [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, d\sigma(x).$$

Lorsque z appartient au support de χ_j et x au support de $\eta_{j+1} - \eta_j$, on a $|z - x| \geqq \varepsilon j$, et par conséquent, d'après (5.12) et (5.14),

$$(5.15) \qquad \mathcal{H}_2(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon) |\lambda|^2 \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_k \left| \frac{\partial \chi_j}{\partial z_k} \right| j^{-2p-1} \times \int [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, d\sigma(x).$$

On a

$$(5.16) \qquad \left| \frac{\partial \chi_j}{\partial z_k} \right| \leqq \frac{M}{j}.$$

D'autre part, les $\partial \chi_j / \partial z_k$ sont nulles pour $|z| \leqq j$ et pour $|z| \geqq (1 + \varepsilon) j$, on peut donc limiter la sommation sur j, aux entiers j tels que

$$\frac{|z|}{1 + \varepsilon} \leqq j \leqq |z|.$$

D'après (5.15) et (5.16), on obtient donc

$$(5.17) \qquad \mathcal{H}_2(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon) |\lambda|^2 (1 + |z|)^{-2p-2} \Sigma_{j \leqq |z|} \times \int [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, d\sigma(x),$$

$$(5.18) \qquad \mathcal{H}_2(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon)(1 + |z|)^{-2p-2} \sigma[(1 + 5\varepsilon)(1 + |z|)] |\lambda|^2.$$

On transforme et on minore $\mathcal{H}_3(U, \lambda)$ exactement de la même façon :

$$(5.19) \qquad \mathcal{H}_3(U, \lambda) = \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l} \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l}(U_j - U_{j+1}) \lambda_k \bar{\lambda}_l.$$

$U_j - U_{j+1}$ est de classe C^∞ sur le support de χ_j, et on a

$$(5.20)\qquad |U_j(z) - U_{j+1}(z)| \leqq \int [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, |z-x|^{-2p}\, d\sigma(x),$$

$$(5.21)\qquad \mathcal{H}_3(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon)\, |\lambda|^2 \, \Sigma_{j=1}^{\infty} \Sigma_{k,l} \left| \frac{\partial^2 \chi_j}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \right| j^{-2p} \times \int [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, d\sigma(x).$$

Comme $|\partial^2 \chi_j / \partial z_k \partial \bar{z}_l| \leqq M/j^2$, et en sommant pour $|z|/(1+\varepsilon) \leqq j \leqq |z|$, on obtient

$$(5.22)\qquad \mathcal{H}_3(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon)\, |\lambda|^2 (1+|z|)^{-2p-2} \, \Sigma_{j \leqq |z|} \times \int [\eta_{j+1}(x) - \eta_j(x)]\, d\sigma(x),$$

$$(5.23)\qquad \mathcal{H}_3(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon)(1+|z|)^{-2p-2}\, \sigma[(1+5\varepsilon)(1+|z|)].$$

De (5.5), (5.11), (5.19) et (5.23), on déduit aussitôt le lemme suivant, où l'on utilise $\nu(r) = \pi^{-p}\, p!\, \sigma(r)/r^{2p}$.

LEMME 5.1. — *Le hessien* $\mathcal{H}(U, \lambda)$ *de la fonction* $U = \Sigma_{j=1}^{\infty} \rho_j U_j$ *vérifie au sens des distributions l'inégalité*

$$\mathcal{H}(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon)(1+|z|)^{-2}\, \nu[(1+5\varepsilon)(1+|z|)]\, |\lambda|^2,$$

pour tout $\lambda = (\lambda_k) \in \mathbf{C}^n$, $C(\varepsilon)$ *désignant une constante qui ne dépend que de* ε, p, n *et* χ.

On construit maintenant une fonction continue W telle que

$$(5.24)\qquad \Sigma_{k,l} \frac{\partial^2 W}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqq C(\varepsilon)(1+|z|)^{-2}\, \nu[(1+5\varepsilon)(1+|z|)]\, |\lambda|^2.$$

La fonction $U + W$ sera plurisousharmonique, majorée par W puisque les U_j sont négatives, et aura même comportement local que U puisque W est continue.

La construction de W relève de méthodes classiques déjà utilisées dans [21], nous reprenons ces méthodes en les perfectionnant sur le plan technique.

Soit q la fonction plurisousharmonique définie par

$$q(z) = \log(1+|z|^2) + \frac{1}{2}\log^2(1+|z|^2).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$(5.25)\qquad \Sigma_{l,k} \frac{\partial^2 q}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqq \frac{|\lambda|^2}{1+|z|^2}.$$

On choisit W de la forme $W = h \circ q$, où h est une fonction numérique convexe croissante, que l'on va déterminer de façon à réaliser (5.24). D'après (5.25), on a, par un calcul aisé, si h est de classe C^2

(5.26) $$\Sigma_{k,l} \frac{\partial^2 W}{\partial z_k \partial \bar{z}_l} \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqq \frac{h' \circ q}{1 + |z|^2} |\lambda|^2.$$

Si h n'est plus de classe C^2, l'inégalité (5.26) est encore vraie au sens des distributions, par passage à la limite en approchant h par ses régularisées.

La condition (5.24), où l'on remplace ε par $\varepsilon/5$ pour simplifier l'écriture, est remplie si on a

(5.27) $$h' \circ q(z) \geqq C(\varepsilon)\, \nu\, [(1 + \varepsilon)(1 + |z|)].$$

Désignons par q^{-1} la fonction inverse de la fonction

$$\log(1 + t^2) + \frac{1}{2} \log^2(1 + t^2),$$

(5.27) devient alors

(5.28) $$h'(t) \geqq C(\varepsilon)\, \nu\, [(1 + \varepsilon)(1 + q^{-1}(t))].$$

Comme $\nu(r)$ est croissante, on peut prendre

(5.29) $$h(t) = C(\varepsilon) \int_0^t \nu\, [(1 + \varepsilon)(1 + q^{-1}(\tau))]\, d\tau.$$

Il en résulte aussitôt pour $W = h \circ q$ la majoration

(5.30) $$W(z) \leqq C(\varepsilon)\, q(z)\, \nu\, [(1 + \varepsilon)(1 + |z|)].$$

Autrement dit,

$$W(z) \leqq C(\varepsilon) \log^2 r\, \nu(r + \varepsilon r),$$

pour r assez grand ($r = |z|$).

En vue d'obtenir des résultats parfaitement satisfaisants pour l'ordre fini, on a besoin de faire d'autres choix pour W.

Soient d un nombre réel > 0 et $g(t)$ la fonction définie par

(5.31) $$g(t) = t^d \int_0^t \frac{\nu(\tau + \varepsilon\tau)}{\tau^{d+1}}\, d\tau, \qquad t \geqq 1.$$

En supposant pour l'instant que $\nu(\tau)$ est une fonction croissante de classe C^1, on a

(5.32) $$g'(t) = dt^{d-1} \int_0^t \frac{\nu(\tau + \varepsilon\tau)}{\tau^{d+1}}\, d\tau + \frac{\nu(t + \varepsilon t)}{t},$$

$$g''(t) = d(d-1)\,t^{d-2}\int_0^t \frac{\nu(\tau+\varepsilon\tau)}{\tau^{d+1}}\,d\tau + (d-1)\frac{\nu(t+\varepsilon t)}{t^2} + (1+\varepsilon)\frac{\nu'(t+\varepsilon t)}{t}. \tag{5.33}$$

Évaluons le hessien de la fonction $G(z) = g(1+|z|)$; un calcul immédiat montre que

$$\mathcal{H}(G,\lambda) = g'(1+|z|)\left[\frac{|\lambda|^2}{2|z|} - \frac{|(\lambda,z)|^2}{4|z|^3}\right] + g''(1+|z|)\frac{|(\lambda,z)|^2}{4|z|^2}. \tag{5.34}$$

Soit encore, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\mathcal{H}(G,\lambda) \geqq \frac{1}{4}g'(1+|z|)\frac{|\lambda|^2}{|z|} + g''(1+|z|)\frac{|(\lambda,z)|^2}{4|z|^2}. \tag{5.35}$$

Si $d \geqq 1$, on a $g'' \geqq 0$, et par conséquent

$$\mathcal{H}(G,\lambda) \geqq \frac{\nu[(1+\varepsilon)(1+|z|)]}{4|z|(1+|z|)}|\lambda|^2. \tag{5.36}$$

Si $0 < d < 1$, on minore $g''(t)$ en supprimant le terme en $\nu'(t+\varepsilon t)/t$ dans (5.33), puis on minore (5.35) grâce à l'inégalité

$$|(\lambda,z)|^2 \leqq |\lambda|^2\,|z|^2,$$

on obtient (avec $t = 1+|z|$)

$$\mathcal{H}(G,\lambda) \geqq \frac{d}{4}t^{d-2}\left(d+\frac{1}{|z|}\right) \times \int_1^t \frac{\nu(\tau+\varepsilon\tau)}{\tau^{d+1}}\,d\tau + \frac{\nu(t+\varepsilon t)}{4t}\left(\frac{1}{t|z|}+\frac{d}{t}\right). \tag{5.37}$$

Soit en ne conservant que le dernier terme

$$\mathcal{H}(G,\lambda) \geqq \frac{d}{4}\,\frac{\nu[(1+\varepsilon)(1+|z|)]}{(1+|z|)^2}. \tag{5.38}$$

Les inégalités (5.36) et (5.38) démontrées lorsque $\nu(\tau)$ est croissante et de classe C^1, sont encore vraies au sens des distributions, lorsque $\nu(\tau)$ est seulement croissante, il suffit d'approcher ν par ses régularisées.

D'après (5.36) et (5.38), il suffit de choisir W de sorte que

$$W(z) = C(\varepsilon, d)(1 + |z|)^d \int_1^{1+|z|} \frac{\nu(\tau + \varepsilon\tau)}{\tau^{d+1}} d\tau, \tag{5.39}$$

où $C(\varepsilon, d)$ ne dépend que de p, n, χ et d.

En désignant par V la fonction $U + W$, on a, d'après (5.30) et (5.39), la proposition suivante :

Proposition 5.1. — *Soit U la fonction définie par* (5.4) *et* 5.2), *il existe une fonction plurisousharmonique V, telle que $V - U$ soit continue, et qui vérifie l'une des majorations :*

(*a*) $V(z) \leq C(\varepsilon) \log^2 r\, \nu(r + \varepsilon r)$ *pour* $r = |z|$ *assez grand;*

(*b*) $V(z) \leq C(\varepsilon, d)(1 + r)^d \int_1^{1+r} \nu(t + \varepsilon t)/t^{d+1} dt$, *où* $d > 0$ *est donné* a priori.

Autrement dit, V a même comportement local que U et vérifie des majorations précises au voisinage de l'infini. Cette proposition est tout à fait semblable à la proposition 1′ de [21] (relative à $p = n - 1$). Dans les raisonnements précédents, nous avons supposé $p > 0$; si $p = 0$, il suffit de remplacer $|z - x|^{-2p}$ par $\log(|z - x|)/(1 + |x|)$. On voit aisément que (5.23) et (5.18) sont encore valables. En revanche, la fonction U n'est plus négative, elle vérifie

$$U(z) \leq \int_0^{(1+5\varepsilon)(1+|z|)} \log \frac{|z| + t}{1 + t} d\sigma(t).$$

Une intégration par parties montre qu'il existe une constante $C(\varepsilon)$ telle que

$$U(z) \leq C(\varepsilon) \left\{ \sigma[(1 + 5\varepsilon)(1 + |z|)] + \int_0^{(1+5\varepsilon)(1+|z|)} \frac{\sigma(t)}{1 + t} dt \right\}.$$

Comme $\nu(t) = \sigma(t)$ lorsque $p = 0$, il en résulte que les majorations de la proposition 5.1 sont encore valables.

6. Le cas des croissances rapides

Des travaux antérieurs, concernant les hypersurfaces ([20] et [21]), et utilisant la régularisation par une fonction de $\mathcal{D}(\mathbf{C}^n)$, faisaient apparaître, de façon naturelle, des majorations du type $r^2 \sigma(r + \varepsilon)$ au lieu de $\log^2 r\, \nu(r + \varepsilon r)$. Ces majorations sont évidemment plus précises lorsque $\sigma(r)$ est d'ordre infini [par exemple si $\sigma(r)$ croît comme $\exp(r)$]. Pour obtenir une telle majoration, il suffit de modifier la suite de fonctions χ_j, utilisée dans le paragraphe 5. Soit $\chi(t)$ une fonction de classe C^∞, définie sur $\mathbf{R}$, telle que

$$0 \leqq \chi(t) \leqq 1, \qquad \chi(t) = 1 \quad \text{pour } t \leqq \varepsilon, \qquad \chi(t) = 0 \quad \text{pour } t \geqq 2\varepsilon.$$

On pose :

$$\chi_j(z) = \chi(|z| - j\varepsilon + \varepsilon) \quad \text{pour } j \text{ entier} \geqq 1. \tag{6.1}$$

La fonction χ_j vaut donc 1 pour $|z| \leqq j\varepsilon$, et 0 pour $|z| \geqq (j+1)\varepsilon$.
On pose :

$$\rho_1 = \chi_1, \qquad \rho_j = \chi_j - \chi_{j-1} \qquad \text{pour} \quad j \geqq 2;$$

le support de ρ_j est contenu dans l'ensemble $(j-1)\varepsilon \leqq |z| \leqq (j+1)\varepsilon$ $(j \geqq 2)$.

On désigne par η_j la fonction définie par

$$\eta_j(z) = \chi(|z| - j\varepsilon - \varepsilon) = \chi_{j+2}(z). \tag{6.2}$$

La fonction η_j est égale à 1 pour $|z| \leqq (j+2)\varepsilon$, et est nulle pour $|z| \geqq (j+3)\varepsilon$.

Les fonctions U_j et U sont toujours définies par les formules (5.2) et (5.4).

Les dérivées premières et secondes des fonctions χ_j, ρ_j, η_j sont majorées sur $\mathbf{C}^n$ par des constantes ne dépendant que de ε et χ. En répétant des raisonnements entièrement semblables à ceux du paragraphe 5 (les majorations sont même techniquement beaucoup plus faciles), on obtient, après des modifications évidentes dans (5.9), (5.15) et (5.21)

$$\mathcal{H}(U, \lambda) \geqq -C(\varepsilon, p, n)\,|\lambda|^2\,\sigma(|z| + 4\varepsilon), \tag{6.3}$$

où $C(\varepsilon, p, n)$ ne dépend que de ε, p, n et χ.

Pour construire une fonction W continue telle que

$$\mathcal{H}(W, \lambda) \geqq C(\varepsilon, p, n)\,|\lambda|^2\,\sigma(|z| + 4\varepsilon), \tag{6.4}$$

il suffit de reprendre la méthode utilisée dans [21], proposition 1. On choisit W de la forme $W(z) = h(|z|^2)$, où h est une fonction convexe croissante que l'on détermine de façon à réaliser la condition (6.4). On a

$$\mathcal{H}(W, \lambda) \geqq h'(|z|^2)\,|\lambda|^2. \tag{6.5}$$

Il suffit donc de choisir

$$h'(|z|^2) = C(\varepsilon, p, n)\,\sigma(|z| + 4\varepsilon). \tag{6.6}$$

Il en résulte aisément que

$$(6.7)\qquad W(z) = C(\varepsilon, p, n) \int_0^{|z|^2} \sigma(\sqrt{t} + 4\varepsilon)\, dt.$$

On a la majoration

$$(6.8)\qquad W(z) \leqq C(\varepsilon, p, n)\, |z|^2\, \sigma(|z| + 4\varepsilon).$$

Il en résulte la variante suivante de la proposition 5.1 (comparer avec la proposition 1 de [21]).

Proposition 6.1. — *Soit U la fonction définie par* (5.4) et (5.2), *mais avec le choix de ce paragraphe pour ρ_j et η_j, il existe une fonction plurisousharmonique V telle que $V - U$ soit continue, et telle que*

$$V(z) \leqq C(\varepsilon, p, n)\, |z|^2\, \sigma(|z| + \varepsilon).$$

7. Singularité du potentiel associé à un courant positif fermé

Dans ce paragraphe, p prend toutes les valeurs comprises entre 1 et $n - 1$. Les résultats qui suivent sont vrais, mais triviaux pour $p = 0$. Pour des raisons esthétiques, on considère au lieu de la fonction

$$U(z) = -\int |z - x|^{-2p}\, \eta(x)\, \beta^p \wedge \theta(x),$$

la fonction U_1, définie par l'une des formules suivantes :

$$(7.1)\qquad U_1 = \pi^{-p}\, 2^{-p}\, U,$$

$$(7.2)\qquad U_1 = \pi^{-p}\, p\,!\, K_p \star \eta\sigma,$$

$$(7.3)\qquad U_1(z) = -\pi^{-p}\, p\,! \int_{\mathbf{C}^n} |z - x|^{-2p}\, \eta(x)\, d\sigma(x).$$

Rappelons qu'on appelle densité du courant θ au point z, ou encore nombre de Lelong de θ au point z, le nombre $\nu(z)$ défini par

$$\nu(z) = \lim_{r \to 0} \pi^{-p}\, p\,!\, r^{-2p} \int_{|z - x| \leqq r} d\sigma(x).$$

On a la proposition suivante :

Proposition 7.1. — *Soit Ω l'ouvert complémentaire du support de* $1 - \eta$, *et soit $c > 0$. La fonction* $\exp[-(n/pc)\, U_1]$ *est non sommable au voisinage d'un point $z \in \Omega$ tel que $\nu(z) \geqq c$, elle est sommable au voisinage d'un point $z \in \Omega$ tel que $\nu(z) < [1 - (p/n)]\, c$.*

REMARQUE 7.1. — Si θ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique X, on a $\nu(z) \geqq 1$ en tout point de X, et $\nu(z) = 0$ en dehors de X; la fonction $\exp[-(n/p)\, U_1]$ est donc non sommable sur X et sommable dans le complémentaire de X (elle est même trivialement de classe C^∞ en dehors de X). La proposition 7.1 vise surtout les applications à la structure des courants positifs, fermés.

Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $\nu(z_0) \geqq c$, on peut toujours supposer que $z_0 = 0$. On peut d'autre part remplacer la fonction U_1 par la fonction U_2, définie par

$$U_2(z) = -\pi^{-p}\, p\,! \int_{|x| \leqq R} |z - x|^{-2p}\, d\sigma(x), \tag{7.4}$$

car $U_1 - U_2$ est de classe C^∞ pourvu que R soit assez petit et que $|z| < R$. La première partie de la proposition est alors une conséquence du lemme purement technique suivant :

LEMME 7.1. — *Si $\nu(0) \geqq c$, on a l'inégalité suivante :*

$$\pi^{-p}\, p\,! \int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z| + t)^{2p}} \geqq 2\, pc \log\left(1 + \frac{R}{|z|}\right) - 4\, p^2\, \pi^{-p}\, p\,! \frac{\sigma(R)}{R^{2p}}.$$

On a en effet, d'après (7.4),

$$\begin{aligned} -U_2(z) &\geqq \pi^{-p}\, p\,! \int_{|x| \leqq R} (|z| + |x|)^{-2p}\, d\sigma(x) \\ &= \pi^{-p}\, p\,! \int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z| + t)^{2p}}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire d'après le lemme

$$-U_2(z) \geqq 2\, pc \log\left(1 + \frac{R}{|z|}\right) - 4\, p^2\, \pi^{-p}\, p\,! \frac{\sigma(R)}{R^{2p}},$$

$$\exp\left[-\frac{n}{pc} U_2(z)\right] \geqq C(n, p, c, R)\left(1 + \frac{R}{|z|}\right)^{2n}. \tag{7.5}$$

Il résulte de (7.5) que $\exp[-(n/pc)\, U_2]$ est non sommable au voisinage de 0.

Démontrons maintenant le lemme. Une intégration par parties donne

$$\int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z| + t)^{2p}} = \frac{\sigma(R)}{(|z| + R)^{2p}} + 2\, p \int_0^R \frac{\sigma(t)\, dt}{(|z| + t)^{2p+1}}. \tag{7.6}$$

On en déduit

$$(7.7)\qquad \int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z|+t)^{2p}} \geqq 2p\int_0^R \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{2p}(|z|+t)} - 2p\int_0^R \left[\frac{1}{t^{2p}} - \frac{1}{(|z|+t)^{2p}}\right]\frac{\sigma(t)\,dt}{(|z|+t)}.$$

En remarquant que $(|z|+t)^{2p} - t^{2p} \leqq 2p\,|z|\,(|z|+t)^{2p-1}$, on obtient

$$(7.8)\qquad \int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z|+t)^{2p}} \geqq 2p\int_0^R \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{2p}(|z|+t)} - 4p^2|z|\int_0^R \frac{\sigma(t)\,dt}{t^{2p}(|z|+t)^2}.$$

Comme $t^{-2p}\sigma(t)$ est une fonction croissante de t, on a

$$(7.9)\qquad \pi^{-p}\,p\,!\,\frac{\sigma(R)}{R^{2p}} \geqq \pi^{-p}\,p\,!\,\frac{\sigma(t)}{t^{2p}} \geqq c.$$

Tenant compte de (7.8) et de (7.9), on a

$$(7.10)\qquad \pi^{-p}\,p\,!\int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z|+t)^{2p}} \geqq 2pc\int_0^R \frac{dt}{|z|+t} - 4p^2\pi^{-p}\,p\,!\,\frac{\sigma(R)}{R^{2p}}\,|z|\int_0^R \frac{dt}{(|z|+t)^2}.$$

On minore en sommant de 0 à $+\infty$ dans la dernière intégrale de (7.10)

$$\pi^{-p}\,p\,!\int_0^R \frac{d\sigma(t)}{(|z|+t)^{2p}} \geqq 2pc\log\left(1+\frac{R}{|z|}\right) - 4p^2\pi^{-p}\,p\,!\,\frac{\sigma(R)}{R^{2p}}.$$

Soit maintenant z_0 un point de Ω tel que $\nu(z_0) < c[1-(p/n)]$. L'idée de la démonstration est d'exprimer U_1 comme l'intégrale d'un logarithme afin de pouvoir utiliser l'inégalité de convexité du logarithme. D'après l'égalité (2.6) du paragraphe 2, où l'on a remplacé θ par $\eta\theta$, on a

$$(7.11)\qquad U(z) = -\int i\,d''_x E\wedge\alpha^{p-1}\wedge d'_x\eta\wedge\theta - p\int i\,d'_x E\wedge d''_x E\wedge\alpha^{p-1}\wedge\eta\theta,$$

en supposant, pour l'instant, θ de classe C^∞. Appliquons la formule de Stokes à la deuxième intégrale

$$(7.12)\qquad -p\int i\, d'_x E\wedge d''_x E\wedge \alpha^{p-1}\wedge \eta\theta$$
$$= p\int E\,\alpha^p\wedge\eta\theta - p\int i\,E\,d''_x E\wedge\alpha^{p-1}\wedge d'_x\eta\wedge\theta,$$

[on légitime la formule de Stokes par un raisonnement semblable à (2.5), l'intégrale sur la sphère S_ε étant $0\,(\,|\log\varepsilon|\,\varepsilon^{2n-2p})$].

On a donc, d'après (7.11) et (7.12),

$$(7.13)\qquad U(z) = p\int E\,\alpha^p\wedge\eta\theta - \int i\,d''_x E\wedge\alpha^{p-1}\wedge d'_x\eta\wedge\theta$$
$$- p\int i E\,d''_x E\wedge\alpha^{p-1}\wedge d'_x\eta\wedge\theta.$$

Cette formule est démontrée lorsque θ est de classe C^∞, mais en raisonnant comme dans le lemme 2.2, c'est-à-dire en approchant le courant $\eta\theta$ par les courants $(\eta\theta)\bigstar\rho_\varepsilon$ et en remarquant que les intégrales peuvent s'exprimer comme des produits de convolutions de fonctions localement sommables avec les coefficients des courants $\eta\theta$ et $d'(\eta\theta)$, il est immédiat d'étendre (7.13) à un courant θ fermé, d'ordre nul, l'égalité ayant alors lieu *pour presque tout z*.

Remarquons que lorsque z appartient à Ω, les deux dernières intégrales de (7.13) sont de classe C^∞ en z, il suffit donc de considérer au lieu de U_1, la fonction U_3 définie par

$$(7.14)\qquad U_3(z) = \pi^{-p}\,2^{-p}\,p\int_{\mathbf{C}^n}\log|z-x|^2\,\alpha^p(z-x)\wedge\eta(x)\,\theta(x).$$

On peut toujours supposer que $z_0 = 0$, et remplacer U_3 par la fonction U_4, obtenue en sommant sur une boule de rayon R assez petit

$$(7.15)\qquad U_4(z) = \pi^{-p}\,2^{-p}\,p\int_{|x|\leq R}\log|z-x|^2\,\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x).$$

Posons

$$(7.16)\qquad \mu(z) = \int_{|x|\leq R}\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)\qquad\text{et}\qquad \varkappa(z) = \pi^{-p}\,2^{-p}\,\mu(z)\,\frac{n}{c}$$

(7.15) s'écrit alors

$$(7.17)\qquad -\frac{n}{pc}\,U_4(z) = \int_{|x|\leq R}\log\left[\,|z-x|^{-\varkappa(z)}\right]\frac{\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)}{\mu(z)}.$$

Utilisant l'inégalité de convexité du logarithme, on a

$$(7.18)\qquad -\frac{n}{pc}U_4(z)\leqq \log\left[\int_{|x|\leqq R}|z-x|^{-2\varkappa(z)}\frac{\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)}{\mu(z)}\right],$$

$$(7.19)\qquad \int_{|z|\leqq r}\exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right]dz$$
$$\leqq\iint_{|z|\leqq r,\,|x|\leqq R}|z-x|^{-2\varkappa(z)}\frac{\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)}{\mu(z)}dz.$$

Estimons $\mu(z)$ et $\varkappa(z)$, d'après (7.16) on a, pour $|z|\leqq r$,

$$(7.20)\qquad (2\pi)^{-p}\mu(z)\leqq(2\pi)^{-p}\int_{|z-x|\leqq r+R}\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)$$
$$\leqq\pi^{-p}\,p\,!\,(r+R)^{-2p}\int_{|x-z|\leqq r+R}d\sigma(x),$$

[on a utilisé (1.17)], soit encore

$$(7.21)\qquad \begin{cases}(2\pi^{-p})\,\mu(z)\leqq\pi^{-p}\,p\,!\,(r+R)^{-2p}\,\sigma(2r+R),\\ (2\pi^{-p})\,\mu(z)\leqq\left(\dfrac{2r+R}{r+R}\right)^{2p}\nu(2r+R).\end{cases}$$

On a besoin également d'une minoration de $\mu(z)$.

$$(7.22)\qquad (2\pi)^{-p}\mu(z)\geqq(2\pi)^{-p}\int_{|z-x|\leqq R-r}\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x).$$

Si $\nu(z)=0$, on a, d'après (1.17),

$$(7.23)\qquad (2\pi)^{-p}\int_{|z-x|\leqq R-r}\alpha^p(z-x)\wedge\theta(x)$$
$$=\pi^{-p}\,p\,!\,(R-r)^{-2p}\int_{|z-x|\leqq R-r}d\sigma(x).$$

De (7.22) et (7.23), il résulte que

$$(2\pi^{-p})\,\mu(z)\geqq\pi^{-p}\,p\,!\,(R-r)^{-2p}\int_{|x|\leqq R-2r}d\sigma(x),$$

$$(7.24)\qquad (2\pi)^{-p}\mu(z)\geqq\left(\frac{R-2r}{R-r}\right)^{2p}\nu(R-2r).$$

En définitive, d'après (7.1) et (7.24), on a, pour $|z| \leq r$:

$$(7.25)\quad \left(\frac{R-2r}{R-r}\right)^{2p} \nu(R-2r) \leq (2\pi)^{-p}\mu(z) \leq \left(\frac{R+2r}{R+r}\right)^{2p} \nu(R+2r),$$

l'inégalité de gauche n'étant vérifiée que lorsque $\nu(z) = 0$.

Comme $\nu(r) \to \nu(0) < c[1 - (p/n)]$, quand $r \to 0$, on peut choisir ε, R et r/R assez petits pour qu'on ait

$$(7.26)\qquad (2\pi)^{-p}\mu(z) < c\left(1 - \frac{p}{n} - \frac{\varepsilon}{n}\right),$$

pour $|z| \leq r$ et $\nu(z) = 0$. Mais, d'après le lemme 7.1, $\nu(z) > 0$ entraîne $U(z) = -\infty$, comme U est localement sommable, l'ensemble des points où $\nu(z) > 0$ est donc de mesure de Lebesgue nulle, et (7.25) est vraie pour *presque tout* z tel que $|z| \leq r$.

Tenant compte de (7.16), (7.19), (7.26) et (7.25), on obtient

$$\int_{|z|\leq r} \exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right] dz \leq \frac{(2\pi)^{-p}}{\nu(R-2r)}\left(\frac{R-r}{R-2r}\right)^{2p} \iint_{\substack{|z|\leq r\\ |x|\leq R}} |z-x|^{-2(n-p-\varepsilon)}\,\alpha^p(z-x) \wedge \theta(x)$$

[on suppose $\nu(R-2r) > 0$, sinon θ est nul au voisinage de 0].

Les coefficients de la forme $\alpha^p(z-x)$ sont majorés par

$$C(n,p)\,|z-x|^{-2p},$$

on a donc

$$\int_{|z|\leq r} \exp\left[-\frac{n}{pc}U_4(z)\right] dz \leq \frac{C(n,p)}{\nu(R-2r)}\left(\frac{R-r}{R-2r}\right)^{2p} \iint_{\substack{|z|\leq r\\ |x|\leq R}} |z-x|^{-2n+2\varepsilon}\,d\sigma(x)\,dz.$$

La deuxième intégrale étant manifestement finie, $\exp[-(n/pc)\,U_4]$ est sommable au voisinage de 0.

8. Le théorème fondamental

On construit à partir de la fonction plurisousharmonique V, un système de $n+1$ fonctions holomorphes F_j, $1 \leq j \leq n+1$, dont l'ensemble des zéros communs est exactement X. On reprend la méthode de Bombieri [2], utilisant les estimations L^2 d'Hörmander [7] et [8], et on raisonne par récurrence sur la dimension de certains sous-ensembles analytiques. On a besoin du lemme suivant, où $\mu(r)$ désigne l'une des fonctions majorantes des propositions 5.1, 6.1 ou 4.1 [majoration (4.12)] de sorte que

(8.1) $\quad V(z) \leqq C\,\mu(r),\quad$ où C est une constante.

Lemme 8.1. — *Soit $\{z_k\}_{k\geqq 0}$ une suite discrète, finie ou infinie, de points distincts de $\mathbf{C}^n$, n'appartenant pas à X, telle que si $n(r)$ désigne le nombre de points de la suite dans la boule de rayon r, on ait*

$$n(r) \leqq \nu(r).$$

Alors, il existe une fonction entière F, nulle sur X, telle que

$$F(z_0) = 1, \qquad F(z_k) \neq 0 \qquad \text{pour} \quad k \geqq 1,$$

(8.2) $$\int_{\mathbf{C}^n} |F(z)|^2 \exp[-C'\mu(|z|)]\,dz < +\infty,$$

C' désignant une constante.

Appliquons la proposition (5.1) [ou (6.1) ou (4.1)] à la suite de points z_k, il existe une fonction plurisousharmonique V_0 telle que $\exp(-V_0)$ soit non sommable aux points z_k, mais continue en dehors des points z_k, et qui vérifie une majoration semblable à celle de V [car $n(r) \leqq \nu(r)$]

(8.3) $$V_0(z) \leqq C_0\,\mu(r).$$

Considérons la fonction $V_1 = V + V_0$, on a $V_1(z) \leqq C_1\,\mu(r)$, V_1 est continu en dehors de X et de la suite z_k, e^{-V_1} est non sommable au voisinage de X et des points z_k. Pour chaque z_k, soit w_k une fonction de classe C^∞, égale à 1 au voisinage du point z_k et à support dans une boule de centre z_k et de rayon R_k assez petit pour que les boules de centre z_k et de rayon R_k soient disjointes et ne rencontrent pas X.

On utilise les notations d'Hörmander [8] pour les formes différentielles, en particulier si f est une forme de bidegré (0, 1), on pose

$$\|f\|_V^2 = \int_{\mathbf{C}^n} |f(z)|^2 [\exp[-V(z)]\,dz.$$

Soit $\varepsilon_k > 0$ une suite de nombres tels que

(8.4) $\quad \Sigma_{k=0}^{\infty}\,\varepsilon_k \|w_k\|_{C'\mu} < +\infty \qquad$ et $\qquad \varepsilon_0 = 1,$

(8.5) $\quad \Sigma_{k=0}^{\infty}\,\varepsilon_k \|d''\,w_k\|_{V_1} < +\infty$

($d'' w_k$ est nulle au voisinage de X, de z_k, et des z_j pour $j \neq k$). Soit f la forme différentielle définie par

$$(8.6) \qquad f = \Sigma_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \, d'' w_k.$$

On a

$$d'' f = 0 \qquad \text{et} \qquad \| f \|_{V_1} < +\infty, \quad \text{d'après (8.5).}$$

D'après Hörmander ([8], théorème 4.4.2), il existe une fonction u de classe C^∞ telle que

$$(8.7) \qquad d'' u = -f.$$

$$(8.8) \qquad \int_{\mathbf{C}^n} | u(z) |^2 \exp[-V_1(z)] (1 + |z|^2)^{-2} dz \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbf{C}^n} | f(z) |^2 \exp[-V_1(z)] \, dz.$$

D'après (8.7), u est holomorphe au voisinage de X et des z_k, il résulte de (8.8) que u s'annule sur X et aux points z_k.

Posons alors

$$(8.9) \qquad F = u + \Sigma_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \, w_k.$$

F est holomorphe d'après (8.7) et (8.6), F est nulle sur X et $F(z_k) = +\varepsilon_k \neq 0$. Comme $V_1(z) \leq C_1 \mu(r)$, on a d'après (8.8)

$$\int_{\mathbf{C}^n} | u(z) |^2 \exp[-C_1 \mu(|z|)] (1 + |z|^2)^{-2} dz < +\infty,$$

c'est-à-dire en augmentant la constante C_1

$$(8.10) \qquad \| u \|_{C' \mu} < +\infty.$$

Tenant compte de (8.4) et (8.10), on obtient

$$\| F \|_{C' \mu} < +\infty,$$

ce qui n'est autre que l'inégalité (8.2) du lemme 8.1.

Remarque 8.1. — D'après (8.9), (8.8) et (8.6), on a

$$\| F \|_{C' \mu} \leq \Sigma_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k (\| w_k \|_{C' \mu} + \| d'' w_k \|_{V_1}).$$

En choisissant les ε_k pour $k \geq 1$, assez petits, on a donc

$$\| F \|_{C' \mu} \leq 2 \| w_0 \|_{C' \mu} + 2 \| d'' w_0 \|_{V_1}.$$

La fonction μ étant fixée, on peut choisir w_0 de sorte que le second membre ne *dépende que de la distance de* z_0 *à* X, et aux z_k pour $k \geqq 1$ (cela résulte aussitôt de l'expression de V et V_0, *cf.* proposition 5.1). On peut d'autre part choisir C' de sorte que C' ne dépende que de la constante C et de la fonction μ. La possibilité de choisir $F(z_0) = 1$ et cette remarque ne seront exploitées qu'au paragraphe 10.

PROPOSITION 8.1. — *Soit X un ensemble analytique dans $\mathbf{C}^n$, soit V une fonction plurisousharmonique continue en dehors de X, telle que e^{-V} soit non sommable au voisinage de X et telle que*

$$V(z) \leqq C\mu(|z|),$$

μ désignant une fonction croissante. Il existe alors $n+1$ fonctions entières $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$ telles que X soit l'ensemble des zéros communs aux F_i et telles que

$$\log |F_i(z)| \leqq C(\varepsilon)\mu(|z| + \varepsilon)$$

pour tout $\varepsilon > 0$.

Appliquons le lemme à une suite z_k quelconque, il existe une fonction F_1 nulle sur X et non identiquement nulle. Raisonnons par récurrence, en supposant qu'il existe $F_1, F_2, \ldots, F_j$ nulles sur X (avec $1 \leqq j < n$), telles que, si X_j désigne l'ensemble des zéros communs aux F_j, X_j vérifie la condition suivante : les branches irréductibles de X_j, non contenues dans X, sont de dimension au plus $n-j$. Soit alors $X_{j,k}$ la suite (finie ou infinie) des branches irréductibles de X_j non contenues dans X. Construisons par récurrence sur k, une suite de points $z_k \in X_{j,k}$, mais n'appartenant pas à X, telle que la condition $n(r) \leqq \nu(r)$ soit vérifiée. C'est toujours possible en choisissant z_k « assez loin » sur $X_{j,k}$. D'après le lemme, il existe alors une fonction F_{j+1} nulle sur X telle que $F_{j+1}(z_k) \neq 0$. Soit

$$X_{j+1} = X_j \cap \{ z \in \mathbf{C}^n \mid F_{j+1}(z) = 0 \}.$$

Comme $F_{j+1}(z_k) \neq 0$, $X_{j,k} \cap \{ F_{j+1}(z) = 0 \}$ est de dimension au plus $n-j-1$ (*cf.* [5], théorème 14, p. 115), les branches irréductibles de X_{j+1}, non contenues dans X, sont donc de dimension au plus $n-j-1$. Pour $j = n-1$, on obtient n fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_n$ nulles sur X, telles que l'ensemble $X_n \setminus X$ se réduise à une suite de points $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Le lemme fournit de plus les estimations

$$(8.11) \qquad \| F_j \|_{C'\mu} < +\infty \qquad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

(C' constante assez grande).

On reprend alors la démonstration du lemme pour construire F_{n+1}, nulle sur X, mais non nulle aux points z_k. Comme la condition $n(r) \leqq \nu(r)$ n'est plus forcément vérifiée, on prend pour V_0 la fonction

$$V_0 = n \log (|F_1|^2 + |F_2|^2 + \ldots + |F_n|^2).$$

Posons, par définition,

$$\|F\|^2 = |F_1|^2 + |F_2|^2 + \ldots + |F_n|^2.$$

On considère la fonction

$$V_2 = C' \mu(|z|) + \log(1 + \|F\|^{2n}).$$

On impose aux $\varepsilon_k > 0$ les conditions

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \|w_k\|_{V_2} < +\infty,$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k \|d'' w_k\|_{V_1} < +\infty$$

(avec $V_1 = V + V_0$).

On a une solution u de l'équation $d'' u = -\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k d'' w_k$, vérifiant

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)|^2 \exp[-V(z)] \|F(z)\|^{-2n} (1 + |z|^2)^{-2} dz < +\infty.$$

u s'annule sur X et aux points z_k et vérifie

$$\int_{\mathbf{C}^n} |u(z)|^2 \exp[-C\mu(|z|)] \|F(z)\|^{-2n} (1 + |z|^2)^{-2} dz < +\infty.$$

En remplaçant C par C' assez grande, on obtient $\|u\|_{V_2} < +\infty$. La fonction $F_{n+1} = u + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon_k w_k$ répond à la question et vérifie

$$\|F_{n+1}\|_{V_2} < +\infty.$$

En définitive, les fonctions F_j vérifient les estimations

$$(8.12) \qquad \int_{\mathbf{C}^n} |F_j(z)|^2 \exp[-C'\mu(|z|)] dz < +\infty \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(8.13) \qquad \int_{\mathbf{C}^n} |F_{n+1}(z)|^2 \frac{\exp[-C'\mu(|z|)]}{1 + \|F\|^{2n}} dz < +\infty.$$

Pour obtenir l'estimation de la proposition, il suffit de majorer $|F_j(z)|$ pour la moyenne de $|F_j|$ sur la boule de centre z et de rayon ε

$$(8.14) \qquad |F_j(z)| \leqq C(\varepsilon) \int_{|\zeta| \leqq \varepsilon} |F_j(z + \zeta)| d\zeta.$$

Appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$(8.15)\quad |F_j(z)| \leq C(\varepsilon)\, \|F_j\|_{C'\mu} \left(\int_{|\zeta|\leq\varepsilon} \exp[C'\mu(|z+\zeta|)]\, d\zeta\right)^{1/2},$$

$$(8.16)\quad |F_j(z)| \leq C(\varepsilon)\, \|F_j\|_{C'\mu} \exp\left[\frac{C'}{2}\mu(|z|+\varepsilon)\right] \qquad (1 \leq j \leq n).$$

Une estimation semblable vaut pour F_{n+1}. L'inégalité de la proposition en résulte trivialement.

Tenant compte des propositions 8.1, 6.1, 5.1 et 4.1 et de la remarque 7.1, on a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 8.1. — *Soit X un sous-ensemble analytique de* $\mathbf{C}^n$; *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $n+1$ *fonctions entières* $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, *telles que X soit exactement l'ensemble des zéros communs* F_j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$ *et qui vérifient pour* $r = |z|$ *assez grand, l'une des majorations suivantes :*

1° $\log|F_j(z)| \leq C(\varepsilon)\, r^2\, \sigma(r+\varepsilon)$;

2° $\log|F_j(z)| \leq C(\varepsilon) \log^2 r\, \nu(r + \varepsilon r)$;

3° *On se donne en plus de* $\varepsilon > 0$, *un nombre* $d > 0$. *On peut alors choisir les* F_j *de sorte que*

$$\log|F_j(z)| \leq C(\varepsilon, d)\,(1+r)^d \int_1^{1+r} t^{-d-1}\, \nu(t+\varepsilon t)\, dt;$$

4° *Dans le cas particulier où* $0 \notin X$ *et* $\int_0^{+\infty} t^{-2}\,\nu(t)\, dt < +\infty$, *on a*

$$\log|F_j(z)| \leq C(\varepsilon)\left[\int_0^{r+\varepsilon} t^{-1}\,\nu(t)\, dt + (r+\varepsilon)\int_{r+\varepsilon}^{+\infty} t^{-2}\,\nu(t)\, dt\right].$$

$C(\varepsilon)$ désigne une constante qui dépend de ε, n et X.

Les majorations 1° et 2° sont intéressantes, d'une part pour leur simplicité, d'autre part pour les croissances rapides [lorsque $\nu(r)$ et $\sigma(r)$ sont d'ordre infini]; les termes en r^2 et en $\log^2 r$ sont alors sans importance.

Ce sont les majorations 3° et 4° qui semblent les plus utiles dans les applications. En particulier, 4° redonne le résultat de W. STOLL et E. BISHOP : si $\nu(r)$ est borné, X est algébrique. La majoration 3° permet de traiter le cas de l'ordre fini, on a le corollaire suivant (il suffit de choisir d assez petit).

COROLLAIRE 8.1. — *Si X est d'ordre fini* ρ, *de* ρ*-type nul, resp. fini, resp. maximal, on peut définir X par* $n+1$ *fonctions entières d'ordre au plus* ρ, *de* ρ*-type nul, resp. fini, resp. fini ou maximal.*

COROLLAIRE 8.2. — *Soit $L(r)$ une fonction numérique positive, telle que $r^{-d} L(r)$ soit fonction croissante de r, pour r assez grand, et pour un certain $d > 0$; on suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\nu(r) \leqq C L(r).$$

Alors X peut être défini par $n+1$ fonctions entières F_j, vérifiant

$$\log |F_j(z)| \leqq C(\varepsilon) L(r + \varepsilon r),$$

où $\varepsilon > 0$ est donné a priori.

Il suffit d'appliquer la majoration 3° du théorème 8.1, en y remplaçant d par $d/2$.

La condition sur L est trivialement vérifiée, par exemple lorsque $L(r) = r^{\rho(r)}$, où $\rho(r)$ est un ordre précisé de Valiron [c'est-à-dire $\lim_{r \to +\infty} \rho(r) = \rho > 0$ et $\lim_{r \to +\infty} r\rho'(r) \log r = 0$].

Dans le cas des hypersurfaces, on retrouve la totalité des résultats que nous avons démontré dans [21], théorème 2. Toujours dans le cas $p = n - 1$, B. A. TAYLOR [27] et R. O. KUJALA [10] ont démontré un résultat semblable au corollaire 8.2, avec les hypothèses suivantes :

$$\int_0^r \frac{\nu(t)}{t} dt \leqq C L(r), \tag{8.17}$$

et il existe $A > 1$, et $B > 0$ tel que, pour $r > 0$,

$$L(Ar) \leqq B L(r). \tag{8.18}$$

Les conditions imposées à L, par (8.18) et par le corollaire 8.2, sont évidemment distinctes, bien qu'ayant une « très large intersection ». Nous n'avons pas réussi à retrouver le résultat de B. A. TAYLOR et R. O. KUJALA, ni à déterminer d'où vient la difficulté (meilleure estimation du hessien de U, ou choix plus habile des fonctions ρ_j et η_j, ou meilleur choix de W).

Les méthodes de P. LELONG [12], de W. STOLL [24] et R. O. KUJALA [10] permettent (lorsque $p = n - 1$) de résoudre le second problème de Cousin à croissance (*cf.* aussi SKODA [20]).

9. Une généralisation aux ouverts de Stein de $\mathbf{C}^n$

Les méthodes de la proposition 5.1 et du théorème 8.1, se généralisent sans difficulté aux ouverts de Stein de $\mathbf{C}^n$. Comme les résultats ainsi obtenus n'ont sans doute qu'un caractère provisoire et devraient pouvoir être améliorés au moins dans le cas d'un ouvert strictement pseudoconvexe, nous ne donnons qu'une brève démonstration du résultat suivant, où $\delta(z)$ désigne la distance de z au complémentaire de l'ouvert Ω.

PROPOSITION 9.1. — *Soit X un ensemble analytique de dimension pure p, dans un ouvert Ω borné, pseudoconvexe, de $\mathbf{C}^n$. X est exactement l'ensemble des zéros communs à $n+1$ fonctions holomorphes dans Ω, $F_1, F_2, \ldots, F_{n+1}$, qui vérifient une majoration du type*

$$\log |F_j(z)| \leq C |\log \delta(z)| . [\delta(z)]^{-2p-2} \int_{\delta(x) > K\delta(z)} d\sigma(x),$$

pour un choix convenable des constantes $K < 1$ et $C > 0$.

Si de plus Ω est strictement pseudoconvexe, et si X vérifie une majoration du type

$$\int_{\delta(x) > \delta(z)} d\sigma(x) \leq A [\delta(z)]^{-\rho} \quad (\textit{où } A \textit{ est une constante}),$$

on peut trouver des F_j de sorte que

$$\log |F_j(z)| \leq C [\delta(z)]^{-2p-\rho-1}.$$

REMARQUE. — En remplaçant dans la démonstration qui suit 2^{-j} par $(1+\varepsilon)^{-j}$ et $|z|^2$ par $\varepsilon |z|^2$, il est facile de voir qu'on peut choisir la constante $K < 1$ aussi proche qu'on veut de 1 (mais les F_j dépendent alors du choix de K).

REMARQUE. — L'hypothèse que Ω est borné est uniquement destinée à simplifier l'énoncé des résultats.

Soit

$$\Omega_j = \{ z \in \Omega, \delta(z) > 2^{-j} \}$$

avec j entier ≥ 1, soit

$$\Omega'_j = \{ z \in \Omega, \delta(z) > 2^{-j-1} + 2^{-j-2} \};$$

soit χ une fonction de classe C^∞, à support dans la boule unité, positive, d'intégrale égale à 1. On désigne par χ_j la fonction de classe C^∞ définie par

$$\chi_j(z) = 2^{-n(j+2)} \int_{\Omega'_j} \chi[2^{j+2}(z-x)] \, dx. \tag{9.1}$$

χ_j est de classe C^∞, χ_j est égale à 1 sur Ω_j, et est nulle dans le complémentaire de Ω_{j+1}.

Un calcul immédiat montre qu'il existe une constante C indépendante de j et de z, telle que, pour tout k et l, on ait

$$\left|\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\chi_j(z)\right| \leq C\,2^{j+2} \tag{9.2}$$

et

$$\left|\frac{\partial^2}{\partial z_k\,\partial \bar{z}_l}\chi_j(z)\right| \leq C\,2^{2j+4}. \tag{9.3}$$

On pose encore $\rho_1 = \chi_1$ et $\rho_j = \chi_j - \chi_{j-1}$ et $\eta_j = \chi_{j+2}$. Il en résulte que lorsque z appartient au support de ρ_j et x au support de $d''\,\eta_j$, on a

$$|z - x| \geq 2^{-j-2}.$$

Les fonctions U_j et U sont toujours définies par les formules (5.2) et (5.4).

Des modifications évidentes dans (5.9), (5.15) et (5.21) conduisent à l'estimation suivante :

$$\mathcal{H}(U, \lambda) \geq -\,C(p, n)\,[\delta(z)]^{-2p-2}\int_{\delta(x)>2^{-4}\delta(z)} d\sigma(x)\,|\lambda|^2. \tag{9.4}$$

On est ramené à construire une fonction plurisousharmonique continue W telle que pour $z \in \Omega$, on ait

$$\mathcal{H}(W, \lambda) \geq C(p, n)\,[\delta(z)]^{-2p-2}\int_{\delta(x)>2^{-4}\delta(z)} d\sigma(x)\,|\lambda|^2, \tag{9.5}$$

ce qui est toujours possible lorsque l'ouvert Ω est pseudoconvexe. Il suffit de choisir pour W une fonction convexe, croissante, de $-\log\delta(z) + |z|^2$

$$W(z) = h(-\log\delta(z) + |z|^2). \tag{9.6}$$

On a

$$\mathcal{H}(W, \lambda) \geq h'(-\log\delta(z) + |z|^2)\,|\lambda|^2. \tag{9.7}$$

Il suffit de prendre, pour $t \in \mathbf{R}$:

$$h'(t) = C(p, n)\exp[(2p+2)\,t]\int_{\delta(x)\geq 2^{-4}e^{-t}} d\sigma(x). \tag{9.8}$$

On en déduit, pour W, la majoration

$$W(z) \leq C(p, n, \Omega)\,|\log\delta(z)|\,.\,[\delta(z)]^{-2p-2}\int_{\delta(x)\geq K\delta(z)} d\sigma(x), \tag{9.9}$$

où la constante K est égale à $2^{-4}(\sup_{z\in\Omega}|z|^2)^{-1}$.

Si l'ouvert Ω est strictement pseudoconvexe, on peut améliorer un peu (9.9). Supposons qu'il existe des constantes $C > 0$, et $\rho > 0$ telles que

$$(9.10)\qquad \int_{\delta(x) > \delta(z)} d\sigma(x) \leqq C[\delta(z)]^{-\rho}.$$

On suppose, d'autre part, que l'ouvert Ω est borné et défini par une condition du type

$$(9.11)\qquad \varphi(z) < 0,$$

où φ est une fonction de classe C^2, définie et strictement plurisousharmonique dans un voisinage de $\overline{\Omega}$, telle que $d\varphi \neq 0$ lorsque $\varphi(z) = 0$.

On choisit pour W une fonction convexe, croissante, de $-\log(-\varphi)$, soit

$$(9.12)\qquad W(z) = h[-\log(-\varphi)].$$

Comme φ est strictement plurisousharmonique au voisinage de $\overline{\Omega}$, un calcul facile montre qu'il existe une constante C_1 telle que

$$(9.13)\qquad \mathcal{H}(W, \lambda) \geqq -\frac{C_1}{\varphi} h'[-\log(-\varphi)].$$

Comme $d\varphi \neq 0$ lorsque $\varphi = 0$, $-\varphi(z)$ est équivalente à $\delta(z)$; tenant compte de (9.5) et de (9.10), on obtient la condition

$$h'[-\log(-\varphi)] \geqq C_2(-\varphi)^{-2p-1-\rho}$$

(C_2 désignant une constante). Il suffit de prendre

$$h'(t) = C_2 \exp[(2p + 1 + \rho)t],$$
$$h(t) = C_3 \exp[(2p + 1 + \rho)t]$$

[avec $C_3 = C_2(2p + \rho + 1)^{-1}$]. On obtient donc

$$(9.14)\qquad W(z) \leqq C_3[\delta(z)]^{-2p-\rho-1}.$$

Ce résultat est meilleur que celui qui résulte de l'application directe de (9.9).

La construction des fonctions F_j à partir de la fonction $V = U + W$ est identique à celle faite dans le paragraphe 8. Le passage de l'estimation L^2 à l'estimation de la proposition 9.1, se fait en majorant $|F(z)|$ par la moyenne de $|F|$ sur la boule de centre z et de rayon $(1/2)\,\delta(z)$, et la « perte de croissance » due à ce procédé est négligeable devant la croissance de W.

10. Familles bornées d'ensembles analytiques dans une variété de Stein

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille, indexée par un ensemble I, d'ensembles analytiques de dimension pure p, d'une variété de Stein Ω de dimension n. On munit Ω d'une structure hermitienne. La famille $(X_i)_{i\in I}$ est dite bornée, si, pour tout compact K de Ω, le volume de $X_i \cap K$ est borné indépendamment de $i \in I$. On vérifie que cette définition ne dépend pas du choix de la structure hermitienne (*cf.* W. Stoll [23], lemma 7.17). On munit l'espace $\mathcal{H}(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur Ω, de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts.

On a le résultat suivant :

Théorème 10.1. — *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille bornée d'ensembles analytiques de dimension pure p, dans une variété de Stein Ω de dimension n, soient $z_0 \in \Omega$ et K un voisinage compact de z_0; il existe une famille $(z_i)_{i\in I}$ de points de K et $n+1$ familles bornées*

$$(F_{1,i})_{i\in I}, \quad (F_{2,i})_{i\in I}, \quad \ldots, \quad (F_{n+1,i})_{i\in I}$$

de fonctions holomorphes dans Ω, telles que

$$F_{j,i}(z_i) = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

et telles que X_i soit exactement l'ensemble des zéros communs aux fonctions $F_{1,i}, F_{2,i}, \ldots, F_{n+1,i}$.

Autrement dit, on peut définir la famille bornée $(X_i)_{i\in I}$ à l'aide de $n+1$ familles bornées de fonctions holomorphes. La condition $F_{j,i}(z_i) = 1$ assure qu'on ne peut extraire de sous-suite de la famille $(F_{j,i})_{i\in I}$ convergeant vers zéro.

Le problème serait d'ailleurs trivial, sans cette condition, au moins lorsque la famille est dénombrable.

On peut considérer le théorème 10.1, comme une extension aux sous-ensembles analytiques de dimension pure p, d'un résultat de Siu Yum-Tong, relatif au cas $p = n-1$; Siu Yum-Tong [19] a démontré (dans un langage un peu différent) que, si la variété Ω vérifie de plus les conditions $H^2(\Omega, \mathbf{R}) = 0$ et $H^1(\Omega, \mathbf{R}/\mathbf{Z}) = 0$, on peut définir la famille $(X_i)_{i\in I}$ à l'aide d'une seule famille bornée $(F_i)_{i\in I}$ de fonctions holomorphes (*cf.* aussi W. Stoll [23]). Comme la variété de Stein Ω se plonge dans un espace $\mathbf{C}^N$ (on peut prendre $N = 2n+1$), on est ramené à la situation suivante : on a une famille bornée d'ensembles analytiques dans $\mathbf{C}^N$, situés sur une sous-variété Ω de $\mathbf{C}^N$, de dimension n. On a besoin du lemme suivant, qui donne la suite z_i du théorème.

LEMME 10.1. — *Il existe un nombre* $\varepsilon > 0$, *tel que, pour tout* $i \in I$, *il existe* $z_i \in K$ *telle* $d(z_i, X_i) \geqq \varepsilon$.

On raisonne par l'absurde. Il existe un recouvrement fini de K par des boules de centres $x_j \in K$, de rayon $\varepsilon < 1$, tel que les boules de centre x_j et de rayon $\varepsilon/2$ soient disjointes. Il existerait un $i \in I$, tel que X_i rencontre toutes les boules de centre x_j et de rayon $\varepsilon/4$. Si m désigne le nombre de ces boules, et si $K' = \{ z \in \Omega, d(z, K) \leqq 1 \}$, on aurait

$$\text{volume}\,(X_i \cap K') \geqq \frac{\pi^p}{p\,!}\, m \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^{2p}, \quad \text{d'après la proposition 1.2.}$$

D'autre part, puisque les boules de centre x_i et de rayon ε recouvrent K, il existe une constante $C(K)$ ne dépendant que de K, telle que :

$$m\, \varepsilon^{2n} \geqq C(K) \operatorname{vol}(K).$$

Il en résulte :

$$\operatorname{vol}(X_i \cap K') \geqq \frac{\pi^p}{p\,!}\, C(K)\, 4^{\;2p}\, \varepsilon^{2p-2n} \operatorname{vol}(K).$$

Cette inégalité contredit, pour ε assez petit, l'hypothèse sur le volume de X_i.

Pour démontrer le théorème, il suffit de reprendre la démonstration du théorème 8.1, en faisant les modifications qui s'imposent. Nous les indiquons brièvement. La proposition 5.1 fournit une famille $\{ V_i \}_{i \in I}$ de fonctions plurisousharmoniques dans $\mathbf{C}^N$, bornée supérieurement sur tout compact de $\mathbf{C}^N$, associée à la famille $(X_i)_{i \in I}$. On reprend ensuite la démonstration de la proposition 8.1, en faisant la construction pour tout i fixé dans I. Mais on considère au lieu de X_j, l'ensemble $X_{i,j}$ des zéros communs aux fonctions $F_{i,1}, F_{i,2}, \ldots, F_{i,j}$, *contenus dans la sous-variété* Ω. D'autre part, on utilise cette fois le lemme 8.1 avec la condition $F(z_0) = 1$, qui s'écrit alors $F_{i,j}(z_i) = 1$. On tient compte de la remarque 8.1 qui suit le lemme 8.1 pour en déduire que la famille $(F_{i,j})_{i \in I}$ est bornée [c'est là qu'intervient la propriété $d(z_i, X_i) \geqq \varepsilon$].

Pour la construction de la famille $(F_{i,n+1})_{i \in I}$, il faut remarquer que, comme la famille $(F_{i,j})_{i \in I}$ (avec $j \leqq n$) est bornée, et que $F_{i,j}(z_i) = 1$, il existe un nombre b, indépendant de $i \in I$, tel que, pour $| z - z_i | \leqq b$, on ait

$$| F_{i,j}(z) | \geqq \frac{1}{2}$$

[il suffit, par exemple, de remarquer que la famille $(F_{i,j})_{i \in I}$ est uniformément équicontinue sur tout compact].

11. Structure des courants positifs, fermés

Depuis l'introduction par P. Lelong (*cf.* [14]) de la notion de courant positif fermé, englobant comme cas particulier les courants d'intégrations sur des ensembles analytiques, un problème essentiel est de « comparer », sous certaines réserves, un courant positif fermé avec un courant d'intégration sur un ensemble analytique.

Le premier résultat décisif, dans cette direction, est dû à J. R. King [9] qui a démontré que si la densité $\nu(z)$ du courant est un entier pour H^{2p} presque tous les points z du support du courant θ (H^{2p} désignant la mesure de Hausdorff d'ordre $2p$), alors θ est de la forme $\sum_j c_j\, \theta(X_j)$, où les c_j sont des entiers > 0, et où $\theta(X_j)$ est le courant d'intégration sur un ensemble analytique X_j de dimension p (la sommation étant localement finie). Dans [6], F. R. Harvey et J. R. King ont démontré le résultat suivant :

Théorème 11.1 (F. R. Harvey et J. R. King). — *Soit θ un courant positif, fermé dans l'ouvert Ω de $\mathbf{C}^n$; on suppose que, pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\nu(z) \geqq c$ pour H^{2p} presque tous les points z du support de θ, situés dans K. Alors il existe un ensemble analytique X dans Ω, de dimension pure p, et, pour chaque branche irréductible X_j de X, un nombre réel positif c_j, tels que :*

$$\theta = \textstyle\sum_j c_j\, \theta(X_j),$$

$\theta(X_j)$ désignant le courant d'intégration sur X_j.

On considère maintenant un courant θ, positif, fermé, quelconque.

Soit c un nombre réel > 0, désignons par E_c l'ensemble fermé (*cf.* [14] et [15]) des $z \in \Omega$ tels que $\nu(z) \geqq c$.

Il est conjecturé que E_c est un ensemble analytique. On a le résultat suivant :

Théorème 11.2. — *Si Ω est un ouvert de Stein de $\mathbf{C}^n$, il existe un ensemble analytique X dans Ω, de dimension $\leqq p$, qui contient E_c et qui est contenu dans $E_{c'}$ avec $c' = [1 - (p/n)]\, c$.*

On pourrait démontrer le théorème de F. R. Harvey et J. R. King à partir du théorème 11.2, en remarquant qu'avec les hypothèses du théorème 11.1 on a

$$H^{2p}\,[(E_{c'} \setminus E_c) \cap K] = 0 \qquad \text{si } c \text{ est assez petit.}$$

Le théorème 11.2 est une conséquence de la proposition 7.1. En effet, d'après la proposition 7.1 et le paragraphe 9, il existe une fonction V, plurisousharmonique dans Ω, telle que e^{-V} soit non sommable au voisinage d'un point de E_c, mais sommable au voisinage d'un point du complémentaire de $E_{c'}$. D'après le théorème 2 d'HÖRMANDER (*voir* l'introduction), pour tout point z_0 n'appartenant pas à $E_{c'}$, il existe donc une fonction F_{z_0} holomorphe dans Ω, nulle sur E_c, mais différente de 0 au point z_0. Il suffit de prendre pour X l'ensemble des zéros communs aux fonctions F_{z_0} pour $z_0 \in E_{c'}$.

Comme X est contenu dans $E_{c'}$, il résulte de la propriété de la proposition 1.2 des courants positifs fermés, que X est localement de $2p$-mesure de Hausdorff finie, et donc que la dimension de X est au plus p.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BISHOP (E.). — Conditions for the analyticity of certain sets, *Mich. math. J.*, t. 11, 1964, p. 289-304.

[2] BOMBIERI (E.). — Algebraic values of meromorphic maps, *Inventiones Mathematicae*, Berlin, t. 10, 1970, p. 267-287.

[3] BOURBAKI (N.). — Éléments de Mathématique : *Algèbre*. Ch. 3 : *Algèbre multilinéaire*, 2e édition. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1044; *Bourbaki*, 7).

[4] CARTAN (H.). — *Formes différentielles*. — Paris, Hermann, 1967.

[5] GUNNING (R. C.) and ROSSI (H.). — *Analytic functions of several complex variables*. — Englewood Cliffs (N. J.), Prentice Hall, 1965.

[6] HARVEY (F. R.) and KING (J. R.). — On the structure of positive currents, *Inventiones Mathematicae*, Berlin, t. 15, 1972, p. 47-52.

[7] HÖRMANDER (L.). — L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta Math.*, Uppsala, t. 113, 1965, p. 89-152.

[8] HÖRMANDER (L.). — *An introduction to complex analysis in several variables*. — New York, Van Nostrand Company, 1966.

[9] KING (J. R.). — The currents defined by analytic varieties, *Acta Math.*, Uppsala, t. 127, 1971, p. 185-219.

[10] KUJALA (R. O.). — Functions of finite λ-type in several complex variable, *Trans. of Amer. math. Soc.*, t. 161, 1971, p. 327.

[11] LAVILLE (G.). — Résolution du $\partial\bar{\partial}$ avec croissance dans des ouverts pseudo-convexes étoilés de $\mathbf{C}^n$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 554-556.

[12] LELONG (P.). — Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans $\mathbf{C}^n$, *J. Analyse Math.*, Jerusalem, t. 12, 1964, p. 365-407.

[13] LELONG (P.). — *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*. — Montréal, Les Presses de l'Université de Montréal, 1968 (*Séminaire de Mathématiques supérieures*. Été 1967, no 28).

[14] LELONG (P.). — *Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives*. — Paris, Londres, New York, Gordon and Breach, Dunod, 1968.

[15] LELONG (P.). — Valeurs algébriques d'une application méromorphe, d'après E. Bombieri, *Séminaire Bourbaki*, vol. 1970-1971, no 384, 17 p. — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 244).

[16] LELONG (P.). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 239-262.

[17] PAN (Y. C.). — Analytic sets of finite order, *Math. Z.*, t. 116, 1970, p. 271-298.

[18] de RHAM (G.). — *Variétés différentielles*. — Paris, Hermann, 1960 (*Act. scient. et ind.*, 1222; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 3).

[19] SIU (Yum-Tong). — Normal families of Cousin I and II data, *Tohôku math. J.*, Series 2, t. 21, 1969, p. 548-557.

[20] SKODA (H.). — Solution à croissance du second problème de Cousin dans $\mathbf{C}^n$, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 21, 1971, p. 11-23.

[21] SKODA (H.). — Croissance des fonctions entières s'annulant sur une hypersurface donnée de $\mathbf{C}^n$, *Séminaire Pierre Lelong : Analyse*, 1971. — Berlin, Springer-Verlag (à paraître).

[22] SKODA (H.). — Croissance des fonctions entières s'annulant sur un sous-ensemble analytique de $\mathbf{C}^n$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 274, 1972, série A, p. 1347-1350.

[23] STOLL (W.). — The growth of the area of a transcendental analytic set, *Math. Annalen*, t. 156, 1964, p. 47-48 et 144-170.

[24] STOLL (W.). — Normal families of non negative divisors, *Math. Z.*, t. 84, 1964, p. 154-218.

[25] STOLL (W.). — About entire and meromorphic functions of exponential type, *Entire functions and related parts of analysis*, p. 392-430. — Providence, American mathematical Society, 1968 (Proc. Symp. in pure Math., 11).

[26] STOLZENBERG (G.). — *Volumes, limits and extensions of analytic varieties*. — Berlin, Heidelberg, New-York, Springer-Verlag, 1966 (*Lecture Notes in Mathematics*, 19).

[27] TAYLOR (B. A.). — The fields of quotients of some rings of entire functions, *Entire functions and related parts of analysis*, p. 468-474. — Providence, American mathematical Society, 1968 (Proc. Symp. in pure Math., 11).

[28] WEIL (A.). — *Variétés kählériennes*. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1267; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 6).

(Texte reçu le 19 juin 1972.)

Henri SKODA,
Mathématiques,
Université de Nice,
Campus Valrose,
06034 Nice Cedex.