

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PAUL BENZÉCRI

**Sur les variétés localement affines et
localement projectives**

Bulletin de la S. M. F., tome 88 (1960), p. 229-332

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1960__88__229_0

© Bulletin de la S. M. F., 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES VARIÉTÉS LOCALEMENT AFFINES
ET LOCALEMENT PROJECTIVES ;**

PAR

JEAN-PAUL BENZÉCRI ⁽¹⁾.

TABLE DES MATIÈRES.

	Pages.
INTRODUCTION.....	230

CHAPITRE 1.

VARIÉTÉS LOCALEMENT PROJECTIVES ET VARIÉTÉS LOCALEMENT AFFINES.

1. Géométrie affine et géométrie projective	233
2. Variétés coniques affines	239
3. Applications.....	242

CHAPITRE 2.

CONVEXITÉ DE CERTAINES VARIÉTÉS BALAYABLES.

1. Coques et poches.....	246
2. La pseudo longueur.....	248
3. Applications.....	253

CHAPITRE 3.

COMPLÉMENTS SUR LES CONVEXES.

1. Facettes et variétés d'appui.....	259
2. Sommes de convexes	262

(1) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1960.

	Pages.
3. Dualité des corps convexes	268
4. Contingent des ensembles convexes	272
5. Sur les convexes, réunions des deux convexes disjoints	276
6. Prolongement d'un convexe au-delà d'un hémisphère	281

CHAPITRE 4.

CORPS ET FORMES CONVEXES AFFINS.

1. Les corps convexes	284
2. Les formes convexes.....	292

CHAPITRE 5.

CORPS ET FORMES CONVEXES PROJECTIFS.

1. Les endomorphismes projectifs	297
2. Espaces de corps et espaces de formes.....	303
3. Formes adhérentes et application à la recherche des formes balayables	315

INTRODUCTION.

Sommaire. — Notre propos est l'étude des variétés localement affines et localement projectives [parfois appelées variétés affines et projectives sans courbure ni torsion, ou variétés affinement (resp. projectivement) plates]. Plus spécialement, nous étudions les variétés compactes.

Nous donnerons d'abord dans cette introduction, les résultats obtenus sur ces variétés en renvoyant au texte lorsque les énoncés comportent des termes dont les définitions ne se laissent pas condenser en peu de mots. Puis, dans un résumé des chapitres, nous indiquerons les méthodes de démonstration, ainsi que les résultats auxiliaires qui nous paraissent mériter mention. Nous terminerons en situant nos théorèmes par rapport à ceux démontrés antérieurement.

1. Les résultats. — Voici les trois principaux résultats concernant les variétés localement affines et projectives compactes.

A. Si une variété compacte V peut être munie d'une structure localement projective, le produit $V \times S_1$ peut être muni d'une structure localement affine (S_1 désigne le cercle; cf. chap. 1, § 3, prop. 1, corollaire).

Si chacune des p variétés compactes V_i peut être munie d'une structure localement projective, le produit $V_1 \times \dots \times V_i \times \dots \times V_p \times S_1^{(p-1)}$ peut être muni d'une structure localement projective (chap. 1, § 3, prop. 3, corollaire).

Les deux autres résultats concernent le revêtement universel d'une variété localement affine (resp. projective) compacte : ce revêtement est muni d'une

structure d'ouvert étalé au-dessus de l'espace affín (resp. de la sphère projective) (*cf.* chap. 1, § 1).

B. Si le revêtement universel d'une variété localement affine ou projective compacte possède une poche (resp. coque), ce revêtement s'identifie à un ouvert (resp. à un convexe) de l'espace affín, ou de la sphère projective (*cf.* chap. 2, § 3, théorème).

Si le revêtement universel W d'une variété localement projective compacte possède une coque stricte, ou si W considéré comme ouvert étalé, a une projection sur la sphère projective dont la fermeture est incluse dans un hémisphère ouvert, W s'identifie à l'intérieur d'un corps convexe de la sphère projective (*cf.* chap. 2, § 3, théorème et prop. 2).

Le revêtement universel d'une variété localement affine compacte, considérée comme ouvert étalé au-dessus de l'espace affín, a une projection non bornée (*cf.* chap. 2, § 3 : la proposition 1 énonce un résultat plus fort).

Poche, coque, coque stricte, sont définis au chapitre 2, paragraphe 1, définitions 1, 2, 3. Corps convexe est défini au chapitre 1, paragraphe 1, définition 11. Sans répéter ces définitions, disons qu'un ouvert étalé qui possède une poche (resp. coque) est univalent (resp. convexe) au voisinage d'un point de sa frontière.

C. Supposons que le revêtement universel d'une variété localement projective compacte soit l'intérieur d'un corps convexe W : si W possède, en un point de sa frontière, un ellipsoïde osculateur, W est un ellipsoïde ; si W possède sur sa frontière un point conique, W est un cône (i. e. W est l'enveloppe convexe d'un point et d'une base hyperplane convexe) (*cf.* chap. 5, § 3, théorème final et prop. 3, 9, 10).

2. Le plan adopté. — Exposons maintenant notre plan.

Le chapitre 1, paragraphe 1, donne les définitions générales ; au paragraphe 2 est construit un isomorphisme fonctoriel entre la catégorie des variétés localement projectives et la catégorie des cônes « affíns » (i. e. une sous-catégorie de la catégorie des variétés localement affíns dont les objets sont munis d'un groupe d'homothétie compatible avec la structure affine, *cf.* définition 2) ; au paragraphe 3 on démontre A.

Le chapitre 2, paragraphe 1, définit les notions de coques et poches, le paragraphe 2 introduit un invariant projectif analogue à une distance utilisée au paragraphe 3 pour démontrer B.

Le chapitre 3 contient des résultats auxiliaires sur les convexes de l'espace affín et projectif. Sans répéter la table des matières, donnons un exemple de ces résultats : le paragraphe 2 démontre qu'un polycylindre convexe peut se décomposer de façon unique en facteurs convexes irréductibles (*cf.* théorèmes 1, 2, 3, cas affín et projectif).

Le chapitre 4 étudie le quotient de l'espace des corps convexes affíns (i. e. convexes compacts d'intérieur non vide) de dimension donnée par le groupe

affin : ce quotient est appelé espace des formes convexes affines : c'est un compact. Le paragraphe 1 contient notamment un lemme (cf. déf. 4 et prop. 17) sur les corps convexes dont l'ellipsoïde d'inertie est une sphère de rayon unité : la distance d'un point frontière d'un tel corps à son centre de gravité est comprise entre deux bornes qui ne dépendent que de la dimension. Le paragraphe 2 contient un énoncé sur les relations d'équivalence par un groupe (cf. prop. 1).

Le chapitre 5 se termine par la démonstration de C. Le paragraphe 1 étudie les limites de transformations projectives : on définit des endomorphismes projectifs dégénérés qui, à la différence des transformations linéaires dégénérées, ne sont pas partout définis (cf. théorème 1 et prop. 2). Le paragraphe 2 définit de nombreux espaces de formes projectives, par exemple l'espace $\mathcal{X}(n;0)$ des formes projectives pointées; c'est le quotient par le groupe projectif de l'espace des couples formés d'un corps convexe et d'un point de son intérieur; $\mathcal{X}(n;0)$ est isomorphe à l'espace des formes convexes affines. Le paragraphe 3 étudie $\mathcal{X}(n)$, l'espace des formes projectives convexes (i. e. quotient par le groupe projectif de l'ensemble des corps convexes). $\mathcal{X}(n)$ n'est pas séparé. On étudie les espaces non séparés; on définit : un point P' est adhérent à P si $P' \in \overline{\{P\}}$; un point P est stable si $\{P\} = \overline{\{P\}}$. Il se trouve que la notion de forme adhérente (étudiée au chapitre 5, § 3, prop. 7, 8, 9, 10) est une notion de géométrie infinitésimale directe des corps convexes projectifs (cf. prop. 7, 8).

Sans détailler, nous rapprocherons ce résultat du suivant : une courbe \mathcal{C} admet une tangente au point M , si la limite des courbes \mathcal{C}_n transformées de \mathcal{C} par l'homothétie de centre M de rapport n est une droite; de même, si la forme d'un corps convexe W' est adhérente à celle de W , W' est limite de transformés projectifs de W .

Soit W un corps convexe dont l'intérieur est revêtement universel d'une variété linéaire projective compacte : la forme de W est stable (prop. 3); c'est ce qui permet de démontrer C.

3. Les résultats antérieurs. — K. KODAIRA et S. S. CHERN nous ont invité à l'étude de notre objet, défini par C. EHRESMANN (cf. *Enseignement mathématique*, 1936).

Sur le conseil de C. EHRESMANN, L. AUSLANDER a construit des variétés localement affines compactes qui n'admettent pas pour revêtement le tore (*Annals of maths.*, t. 64, 1956, p. 255-259). Nos résultats décrits en A permettent d'en construire de nombreux autres exemples.

N. KUIPER a démontré que, si le revêtement universel d'une surface localement projective compacte est un domaine D du plan dont la frontière contient un arc convenable, en particulier, continûment différentiable, convexe (cf. *Convegno internazionale di geometria*, 1953), D est une ellipse. B et C généralisent ce résultat.

Les démonstrations du chapitre 2 doivent beaucoup au chapitre 3 du livre

de É. CARTAN sur la géométrie des espaces de Riemann; les considérations de géométrie infinitésimale directe des chapitres 3 et 5 au traité de G. BOULIGAND.

Cette thèse a été préparée sous la direction de M. le Professeur H. CARTAN; si les démonstrations ont quelque solidité, nous le devons à notre Maître qui, après N. BOURBAKI, nous a patiemment incité à poursuivre la concision et la rigueur. Françoise LE ROY nous a aidé dans cette recherche.

A tous, nous exprimons ici notre gratitude, et singulièrement à M. C. EHRESMANN et à M. G. BOULIGAND qui nous a fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

CHAPITRE 1.

VARIÉTÉS LOCALEMENT PROJECTIVES ET VARIÉTÉS LOCALEMENT AFFINES.

Dans ce chapitre, on définit les variétés localement projectives et localement affines, objets de toute l'étude (§ 1). Un isomorphisme fonctoriel est construit entre la catégorie des variétés localement projectives, et une sous-catégorie de la catégorie des variétés localement affines (§ 2). Cet isomorphisme est utilisé pour construire des exemples de variétés compactes munies de structures affines ou projectives (§ 3).

1. Géométrie affine et géométrie projective. — Ce paragraphe contient surtout des définitions et des notations relatives à la géométrie affine d'un espace vectoriel E et à la géométrie projective de la sphère $S(E)$ associée à E . La fin du paragraphe concerne le cas particulier où $E = R^n$.

DÉFINITION 1. — On définit sur A une structure d'espace *affin* par la donnée d'un espace vectoriel $T(A)$ et d'une opération de $T(A)$ sur A par laquelle $T(A)$, considéré comme groupe abélien, opère simplement et transitivement sur A .

$T(A)$ est appelé *espace vectoriel de translation* de A . L'opération de $T(A)$ sur A est notée $+$.

Soit M et N deux éléments de A . On note MN l'unique élément de $T(A)$ tel que $M + MN = N$.

EXEMPLE. — Soit E un espace vectoriel. E est muni canoniquement d'une structure d'espace *affin* dont le groupe des translations est E : on fait opérer E sur lui-même par l'addition.

DÉFINITION 2. — Soit A et B deux espaces affins; $T(A)$ et $T(B)$ les espaces vectoriels définis sur un même corps, des translations de A et B respectivement. Une application l de A dans B est appelée *application affine* s'il existe une

application l' de $T(A)$ dans $T(B)$ telle que, quels que soient $M \in A$ et $m \in T(A)$, on ait

$$l(M + m) = l(M) + l'(m).$$

EXEMPLE. — Soit A un espace affín, $T(A)$ l'espace vectoriel sur R des translations de A . Une application l de A dans R est appelée application affine de A dans R , ou fonction linéaire sur A , s'il existe un élément l' du dual de $T(A)$ tel que, quels que soient M et N dans A , on ait

$$l(N) - l(M) = l'(MN).$$

DÉFINITION 3. — Soit E un espace vectoriel sur R . Le groupe multiplicatif R^+ (resp. $R^* = R - \{O\}$) opère sur E comme groupe des homothéties positives (resp. des homothéties non nulles).

Nous appellerons *sphère* associée à E , et noterons $S(E)$ (resp. *espace projectif*, $P(E)$, associé à E), le quotient de $E - \{O\}$ par R^+ (resp. R^*), O étant l'origine de E .

Quand aucune autre structure topologique ne sera spécifiée sur E , nous supposerons E muni de la topologie localement convexe la plus fine.

Une structure d'espace vectoriel topologique sur E induit une topologie sur $E - \{O\}$: $S(E)$ [resp. $P(E)$] sera muni de la topologie quotient.

Nous noterons s la projection canonique de $E - \{O\}$ sur $S(E)$; nous noterons F la correspondance qui, à une partie de $S(E)$, associe son image réciproque dans $E - \{O\}$.

DÉFINITION 4. — Soit L un sous-espace vectoriel de E ; $s(L - \{O\})$ sera appelé *sous-variété linéaire* de $S(E)$.

EXEMPLES. — Si L est de dimension 1, $s(L - \{O\})$ est formé de deux points que nous appellerons *diamétralement opposés*.

Si L est de dimension 2, $s(L - \{O\})$ sera appelé une *droite* de $S(E)$. Deux points diamétralement opposés divisent une droite en deux *demi-droites*.

Si L est de co-dimension 1, $s(L - \{O\})$ sera appelé un *hyperplan* de $S(E)$.

DÉFINITION 5. — On dit qu'une partie ouverte H de $S(E)$ est un *hémisphère ouvert* de $S(E)$ s'il existe une forme linéaire $l \in E^*$ telle que

$$F(H) = l^{-1}(R^+).$$

La forme linéaire l est définie à un multiplicateur positif près. On l'appelle *équation* de l'hémisphère H .

La frontière de H est l'hyperplan fermé h défini par

$$F(h) \cup \{O\} = l^{-1}(O).$$

La fermeture $H \cup h$ de H est appelée *hémisphère fermé*.

Réciproquement, soit h un hyperplan fermé de $S(E)$; $\bigcup h$ est réunion de deux hémisphères ouverts disjoints de frontière h : en effet, désignons par l une forme linéaire continue sur E telle que

$$F(h) \cup \{O\} = l^{-1}(O).$$

l est défini à un multiplicateur non nul près. $\bigcup h$ est réunion de deux hémisphères ouverts d'équations l et $-l$.

DÉFINITION 6. — Sur tout hémisphère ouvert H de $S(E)$, nous allons définir une structure d'espace affín.

Soient l une équation de H et N le sous-espace vectoriel $l^{-1}(O)$; le groupe des translations de H sera l'espace vectoriel $L(E/N, N)$ opérant sur H comme suit :

Soient $m \in H$, $u \in L(E/N, N)$, $M \in F(m)$, q l'application de E sur son quotient E/N

$$m + u = s(M + u(q(M)))$$

Il est clair que cette expression est indépendante du choix de m .

DÉFINITION 7. — Soient m, m' deux points *non diamétralement opposés* de $S(E)$, nous allons définir le segment de droite fermé (m, m') .

Soient M, M' deux points de $E - \{O\}$ appartenant à l'image réciproque de m et m' respectivement; on pose

$$(m, m') = s(M, M').$$

Il est clair que le choix de M et M' est indifférent.

On définit de même le segment ouvert $]m, m'[$.

DÉFINITION 8. — On appelle *partie convexe* $k \subset S(E)$ une partie k telle que $F(k) + \{O\}$ soit un convexe de E .

Une partie convexe de $S(E)$ est une partie k de $S(E)$ telle que, quels que soient m et m' non diamétralement opposés dans k , le segment (m, m') soit inclus dans k .

DÉFINITION 9. — Une partie convexe de $S(E)$ est dite *stricte* si elle ne contient pas de couples de points diamétralement opposés.

DÉFINITION 10. — Soient L un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et l l'image de $L - \{O\}$ dans $S(E)$ par s ; la sphère $S(E/L)$ sera aussi notée $S(E)/l$ et appelée quotient de $S(E)$ par l .

De même que les convexes de E contenant L s'identifient aux convexes de E/L , les convexes de $S(E)$ contenant l s'identifient aux convexes de $S(E)/l$.

Soit E un espace vectoriel, nous désignerons par $K(E)$ [resp. $C(E)$]

l'ensemble des parties convexes (resp. convexes fermés) de E . Nous désignerons par $K(S(E))$ [resp. $C(S(E))$] l'ensemble des parties convexes (resp. convexes fermés) de $S(E)$.

Nous désignons par $GL(n, R)$ le groupe des automorphismes de l'espace vectoriel R^n ; par $GA(n, R)$ le groupe des automorphismes de la structure d'espace affine de R^n : $GA(n, R)$ est engendré par $GL(n, R)$ et par le groupe des translations.

$S(R^n)$ sera appelée la sphère projective de dimension $(n - 1)$ et notée $S(n - 1)$.

Un hémisphère ouvert de $S(n)$ est muni d'une structure affine isomorphe à celle de R^n (cf. déf. 6).

$P(R^n)$ sera appelé espace projectif de dimension $(n - 1)$ et notée $P(n - 1)$.

DÉFINITION 11. — On appelle *corps convexe* de R^n [resp. $S(n)$] un convexe de R^n [resp. un convexe strict de $S(n)$] qui est compact et d'intérieur non vide.

On note $EA(n)$ [resp. $E(n)$] l'ensemble des corps convexes de R^n [resp. de $S(n)$].

On note $CA(n)$ l'ensemble des parties convexes compactes de R^n .

Le quotient $GS(n - 1, R)$ de $GL(n, R)$ par le sous-groupe des homothéties positives opère sur $S(n - 1)$: c'est le groupe des automorphismes de la structure projective de $S(n - 1)$. De même, le quotient $GP(n - 1, R)$ de $GL(n, R)$ par le sous-groupe de toutes les homothéties opère sur $P(n - 1)$ et c'est le groupe des automorphismes de sa structure projective.

$GL(n, R)$ est le produit direct du sous-groupe, isomorphe à R^+ , des homothéties positives, et du sous-groupe, $GU(n, R)$ des automorphismes de R^n dont le déterminant a pour valeur absolue 1; la projection de $GL(n, R)$ sur son quotient $GS(n - 1, R)$ définit donc un isomorphisme (noté i) de $GS(n - 1, R)$ sur $GU(n, R)$,

DÉFINITION 12. — Sur une variété V , convexe, de dimension n , on définit une structure de *variété localement projective* (resp. *affine*), par la donnée d'un ensemble ouvert $J(V)$ de jets d'isomorphismes de V dans $S(n)$ (resp. R^n) appelé ensemble de jets projectifs (resp. affins) et jouissant des propriétés suivantes :

1° L'image de $J(V)$ par la projection source est V tout entier;

2° $GS(n, R)$ [resp. $GA(n, R)$] opère transitivement sur chaque fibre de $J(V)$, composée des jets de source donnée.

Il est clair que $J(V)$, muni de la projection source sur V est un revêtement de V .

REMARQUE. — Soit j un isomorphisme, compatible avec la structure affine de R^n sur un hémisphère $\overset{\circ}{H}$ de $S(n)$. Soit V une variété localement affine, $J(V)$ l'ensemble des jets affins de V dans R^n . Désignons par $J'(V)$ l'ensemble

des jets d'isomorphismes de V dans $S(n)$ obtenus en composant J et un jet de $J(V)$. Désignons par $J''(V)$ l'ensemble des jets d'isomorphismes de V sur $S(n)$ obtenus en composant un automorphisme de $GS(n, R)$ et un jet de $J(V)$. Il est clair que $J''(V)$ définit sur V une structure de variété localement projective canoniquement associée à la structure localement affine définie par $J(V)$.

DÉFINITION 13. — Une *carte* d'un ouvert U d'une variété localement projective (resp. affine) sur un ouvert de $S(n)$ (resp. R^n) est dite *compatible avec la structure projective* (resp. *affine*) si tous ses jets appartiennent à $J(V)$.

Si aucune confusion n'est à craindre, nous parlerons de *carte compatible*, sans préciser la structure.

PROPOSITION 1. — Soit V une variété localement affine (resp. projective); soit U un ouvert de V .

1° Soient φ_1, φ_2 deux cartes compatibles de U : il existe un automorphisme unique $g \in GA(n, R)$ [resp. $GS(n, R)$] tel que

$$\varphi_1 = g \circ \varphi_2.$$

2° Soit φ_1 une carte compatible de U ; soit $x \in U$; soit j_x un jet de $J(V)$ de source x : il existe une carte compatible unique φ_2 dont le jet en x soit j_x .

La démonstration résulte facilement de la condition du 2° de la définition 12.

PROPOSITION 2. — Soit V une variété localement projective (resp. affine) simplement connexe: il existe une application p de V dans $S(n)$ (resp. R^n) dont tous les jets appartiennent à $J(V)$; p est défini à une multiplication à gauche près par un élément de $GS(n, R)$ [resp. $GA(n, R)$]; V , muni de la projection p , est un ouvert étalé au-dessus de $S(n)$ (resp. R^n).

En effet, $J(V)$, revêtement d'une variété simplement connexe, est topologiquement isomorphe au produit de la base V par la fibre $GS(n, R)$ [resp. $GA(n, R)$], munie de la topologie discrète. Une composante connexe, de $J(V)$ est isomorphe à V , et définit l'application p .

PROPOSITION 3. — Soit $\{U_i\}$ un recouvrement d'une variété V par un système d'ouverts; soit $\{f_i\}$ un système de cartes des U_i sur des ouverts de $S(n)$ (resp. R^n), tel que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on ait sur $U_i \cap U_j$,

$$f_i = g_{ij} \circ f_j, \quad \text{avec } g_{ij} \in GS(n, R) \quad [\text{Resp. } GA(n, R)];$$

alors il existe sur V une structure localement projective (resp. affine) unique, avec laquelle les cartes f_i sont compatibles.

Cette deuxième définition, à l'aide de cartes, d'une structure localement affine ou projective est bien connue.

Dans ce qui suit, nous énoncerons propriétés et définitions dans le cas

projectif : les énoncés équivalents du cas affín s'obtiennent en remplaçant $S(n)$ par R^n , et $GS(n, R)$ par $GA(n, R)$.

Les variétés localement projectives sont les objets d'une catégorie, où l'on définit ainsi les morphismes : soient V_1, V_2 localement projectives; $J(V_2)$, $J(V_2)$ les ensembles correspondants de jets projectifs; f une application de V_1 dans V_2 . Notons $J(V_2) \circ f$, l'ensemble des jets de V_1 dans $S(n)$ obtenus en composant un jet de f et un jet de $J(V_2)$: f est un morphisme de la structure localement projective, si et seulement si $J(V_2) \circ f \subset J(V_1)$.

En particulier, on définit les automorphismes d'une variété localement projective. Soit G un groupe proprement discontinu sans point fixe, d'automorphismes de la structure localement projective de V : l'espace quotient V/G est muni canoniquement d'une structure localement projective : c'est l'unique structure pour laquelle la projection de V sur V/G soit un morphisme. Tout ouvert étalé E au-dessus d'une variété localement projective V est muni canoniquement d'une structure localement projective : l'unique structure telle que la projection soit un morphisme. En particulier, tout revêtement R de V est une variété localement projective, et si R est galoisien, V est le quotient de R par un groupe d'automorphismes de sa structure projective. Au revêtement universel de V , s'applique la proposition 2 : il peut être muni d'une projection sur $S(n)$ qui est isomorphisme local des structures projectives.

DÉFINITION 14. — Soit V une variété localement projective (resp. affine). Une partie S de V est appelée *segments d'extrémités* les deux points M et N de V , s'il existe un voisinage ouvert O de S , et une carte compatible φ de O , telle que

$$\varphi(S) = (\varphi(M), \varphi(N))$$

(sur la notion de segment, cf. déf. 7).

DÉFINITION 15. — Une variété projective V est dite *homogène*, si le groupe G des automorphismes projectifs de V opère transitivement dans V ; elle est dite *balayable* (resp. balayable pour un sous-groupe $G_1 \subset G$) s'il existe un compact $K \subset V$, appelé *domaine générateur* pour G (resp. G_1), tel que

$$V = \bigcup_{g \in G} gK \quad \left(\text{resp. } V = \bigcup_{g \in G_1} gK \right),$$

V est dit *divisible* s'il existe un sous-groupe G_1 de G , proprement discontinu, sans point fixe, et tel que V/G_1 soit compact.

Dans la suite, nous étudierons les ouverts étalés W au-dessus de $S(n)$, qui sont homogènes, divisibles ou balayables. Si V est une variété localement projective et compacte, son revêtement universel est divisible.

Il est clair que toute variété divisible (ou homogène) est balayable. Nous donnerons plus loin des conditions nécessaires pour qu'un ouvert étalé soit balayable : ces conditions sont *a fortiori* nécessaires pour qu'il soit divisible.

Tous les exemples connus d'ouverts étalés divisibles sont des ouverts homogènes : en dimension 2, dans le cas affín, les seuls ouverts étalés divisibles sont le plan, le demi-plan, le quart de plan, et le revêtement universel du plan privé d'un point (cf. BENZÉCRI, *Thèse*, Princeton, 1955, et Exposé, *Séminaire C. Ehresmann*, 1958-1959).

Remarquons que l'intérieur d'une parabole dans le plan est homogène pour le groupe des automorphismes affíns, mais n'est pas divisible : l'homogénéité n'est donc pas une condition suffisante de divisibilité ; on peut seulement conjecturer que c'est une condition nécessaire.

Voici un ouvert étalé qui, sans être homogène, admet un groupe d'automorphismes tel que les images d'un point convenable forment un ensemble partout dense : c'est le plan privé des points de coordonnées entières. Le groupe des automorphismes est engendré par les transformations entières unimodulaires, et les translations entières. Considérons un point (x, y) , où x et y sont irrationnels, et tels qu'aucune combinaison linéaire entière $nx + py$ ne soit rationnelle : nous allons montrer que l'ensemble des transformés du point (x, y) est dense dans le plan. Montrons d'abord qu'il est dense sur la droite d'ordonnée y : en effet, sur cette droite sont les points d'abscisse $x + ny + p$ (x, y entiers), transformés de (x, y) par les transformations d'équations

$$\begin{aligned} X' &= X + nY + p, \\ Y' &= Y. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses faites, ces points forment un ensemble partout dense de points irrationnels. Il est facile de montrer que chacun de ces points $(x + ny + p, y)$ a des transformés denses sur la droite d'abscisse $(x + ny + p)$, ce qui achève la démonstration.

L'étude des variétés localement projectives non compactes paraît difficile à aborder : pour les variétés localement euclidiennes, sous l'hypothèse qu'elles ne possèdent pas de points frontières à distance finie, on démontre que ce sont des quotients de R^n . Pour éviter des situations par trop pathologiques, il faut, dans le cas projectif, une autre hypothèse ; sans nous arrêter plus longtemps, proposons la

DÉFINITION 16. — Une variété V localement projective et connexe est dite *maximale* s'il n'existe pas de variété U connexe localement projective, de même dimension que V , et telle que V soit isomorphe à un ouvert de U , distinct de U .

Une variété compacte est évidemment maximale.

2. Variétés coniques affíns.

DÉFINITION 1. — On appelle cône ouvert de R^n , une partie ouverte de $R^n - \{O\}$, réunion de demi-droites ouvertes issues de l'origine.

DÉFINITION 2. — Sur une variété V de dimension n , une structure de variété conique affine de dimension n est définie par la donnée d'un ensemble ouvert $J_1(V)$ de jets d'isomorphismes de V dans $R^n - \{O\}$ tel que

1° L'image de $J_1(V)$ par la projection source est V tout entier;

2° $GU(n, R)$ opère transitivement sur chaque fibre des jets de source donnée;

3° Comme dans le paragraphe 1, définition 2, appelons carte compatible, toute carte dont les jets appartiennent à J_1 : tout point de V possède un voisinage dont il existe une carte compatible sur un cône ouvert de R^n .

Comme dans le cas localement projectif ou localement affine, il est possible de définir la structure conique affine par un système de cartes: on a la

PROPOSITION 1. — Soit $\{V_i\}$ un recouvrement d'une variété V par un système d'ouverts; f_i un système de cartes des U_i sur des cônes ouverts de R^n , tel que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, on ait, sur $U_i \cap U_j$,

$$f_i = g_{ij} \circ f_j, \quad \text{avec } g_{ij} \in GU(n, R).$$

Alors il existe sur V une structure conique affine, et une seule, avec laquelle les cartes f_i soient compatibles.

Sur une variété conique affine V , est canoniquement définie une structure de variété localement affine: c'est l'unique structure affine dont l'ensemble $J(V)$ des jets affins contienne $J_1(V)$.

Les variétés coniques affines de dimension n sont les objets d'une catégorie, dont les morphismes sont les applications f de V_1 dans V_2 telles que $J_1(V_2) \circ f \subset J_1(V_1)$ (mêmes notations qu'au paragraphe 1).

DÉFINITION 3. — Le groupe R^+ des réels positifs opère sur un cône affine V de la façon suivante: soit $m \in V$; soit U un voisinage de m dont il existe une carte compatible f sur un cône ouvert de R^n ; on pose $\lambda m = f^{-1}(\lambda f(m))$, où $\lambda \in R^+$ opère sur R^n comme une homothétie de centre O et de rapport λ . Cette définition est indépendante de la carte f choisie.

V est ainsi munie d'une structure d'espace fibré R^+ -principal: cet espace fibré est topologiquement trivial, puisque R^+ est homéomorphe au segment ouvert, et nous en construirons plus loin une section. R^+ opère sur V comme un groupe d'automorphismes de sa structure localement affine (mais non de sa structure conique affine), que nous appellerons le groupe des homothéties positives de V .

PROPOSITION 2. — Sur le quotient $B = V/R^+$, appelé *base* de l'espace fibré V , est définie canoniquement une structure localement projective: soit j un jet de $J_1(V)$, on en déduit par passage au quotient par le groupe des homothéties positives, un jet de B dans $S(n-1)$, que nous noterons $p(j)$: la structure localement projective de B est l'unique structure telle que les $p(j)$ soient des jets projectifs de B .

Tout fibré localement trivial, dont la fibre est contractile, et dont la base est un espace normal, à base dénombrable d'ouverts, possède une section; si V est supposé para-compact, on peut donc construire une section de V au-dessus de B .

Nous nous proposons de montrer que la correspondance établie entre une variété conique affine et sa base, définit un isomorphisme fonctoriel entre la catégorie des variétés coniques affines de dimension n , et celle des variétés localement projectives de dimension $n - 1$.

Étant donnée une variété localement projective B de dimension $(n - 1)$, nous allons construire une variété conique affine $F(B)$ de dimension n dont la base soit B .

Soit $J(B)$ l'espace des jets projectifs de B dans $S(n - 1)$. Désignons par $FJ(B)$ l'ensemble des couples (j, m) d'un jet j de $J(B)$ et d'un point m de $R^n - \{O\}$ dont l'image sur le quotient $S(n - 1)$ de $R^n - \{O\}$ soit le but du jet j . $FJ(B)$ est muni de la topologie induite par celle du produit $J(B) \times R^n$. Nous allons définir $F(B)$ comme un quotient de $FJ(B)$, et $FJ(B)$ s'identifiera avec $J_1(F(B))$. Sur $FJ(B)$, définissons la relation d'équivalence \mathcal{R} suivante :

$$(j, m) \approx (j_1, m_1)$$

si

1° j et j_1 ont la même source : on a alors

$$j = g \circ j_1, \quad \text{où } g \in GS(n - 1, R);$$

2° $m = i(g) m_1$, où $i(g)$ est l'homologue de g dans l'isomorphisme i entre $GS(n - 1, R)$ et $GU(n, R)$.

Définissons de plus le produit d'un couple (j, m) de $FJ(B)$ par un nombre $\lambda \in R^+$. On a

$$\lambda(j, m) = (j, \lambda m),$$

où λm désigne l'homothétique du point M dans l'homothétie de centre O et de rapport λ .

Le quotient $F(B)$ de $FJ(B)$ par \mathcal{R} est un espace fibré principal de base B et de groupe structural R^+ .

En effet, la projection source de $FJ(B)$ sur B ainsi que la multiplication par un nombre λ de R^+ sont compatibles avec la relation d'équivalence \mathcal{R} .

Définissons maintenant la structure conique affine de $F(B)$.

On appellera carte compatible d'un ouvert u de $F(B)$ dans $R^n - \{O\}$ une application composée d'un relèvement de u dans $FJ(B)$ et de la projection $(j, m) \rightarrow m$ de $FJ(B)$ sur $R^n - \{O\}$.

Étant donnés (j, m) dans $FJ(B)$, p le projeté de (j, m) dans $F(B) = FJ(B)/\mathcal{R}$, on peut trouver une carte compatible et une seule d'un voisinage convenable de p qui soit composée d'un relèvement de ce voisinage sur un voisinage de (j, m) et de la projection sur $R^n - \{O\}$.

$FJ(B)$ s'identifie donc avec l'espace des jets de cartes compatibles de $F(B)$.

Montrons maintenant que le système des cartes compatibles définit sur $F(B)$ une structure conique affine.

En effet, soient p un point de $F(B)$, p' sa projection sur B , (j, m) un point de $FJ(B)$ au-dessus de p ; on peut trouver un voisinage u' de p' dont il existe une carte sur $S(n-1)$ compatible avec la structure projective de B et dont le jet dans B' soit j . Du relèvement correspondant de u' sur un ouvert v' de $J(B)$ on déduit un relèvement de l'image réciproque u de u' dans $F(B)$ sur l'ouvert v image réciproque de v' dans $FJ(B)$, donc une carte compatible d'un voisinage de p sur un cône ouvert de $R^n - \{O\}$.

De plus, deux cartes compatibles d'un même ouvert de $F(B)$ diffèrent l'une de l'autre par une transformation de $GU(n, R)$.

En effet, soit (j, m) , (j_1, m_1) deux points de $FJ(B)$ équivalents pour la relation \mathcal{R} , on a

$$j = g \circ j_1,$$

où

$$g \in GS(n-1, R)$$

et le jet (j, m) de $F(B)$ dans $R^n - \{O\}$ est composé de $i(g)$ et du jet (j_1, m_1) .

Pour achever de construire l'isomorphisme fonctionnel F entre la catégorie des variétés localement projectives de dimension $n-1$ et celles des variétés coniques affines de dimension n , il faut construire l'image $F(\varphi)$ d'un morphisme.

Soit φ un morphisme de variété projective de source B_1 , de but B_2 . Nous allons construire $F(\varphi)$ de source $F(B_1)$, de but $F(B_2)$ tel que

$$J_1(F(B_2)) \circ F(\varphi) \in J_1(F(B_1)).$$

Pour cela, nous allons définir une application φ' de $FJ(B_1)$ dans $FJ(B_2)$.

Soient (j_1, m) dans $FJ(B_1)$, s_1 la source de j_1 dans B_1 , on peut trouver un jet et un seul j_2 de $J(B_2)$ tel que $\varphi \circ j_2 = j_1$.

Nous poserons

$$\varphi'(j_1, m) = (j_2, m).$$

L'application φ' étant compatible avec la relation \mathcal{R} définit une application de $F(B_1)$ dans $F(B_2)$. Comme φ' est un isomorphisme de l'image réciproque dans $FJ(B_1)$ d'un voisinage convenable de s_1 sur un ouvert de $FJ(B_2)$, $F(\varphi)$ est aussi un isomorphisme local de $F(B_1)$ dans $F(B_2)$, d'où l'on déduit facilement qu'il est un morphisme de la catégorie des variétés coniques affines.

Dans ce qui suit, nous noterons F^{-1} le foncteur inverse de F qui à une variété conique affine associe la variété localement projective qui est sa base.

3. Applications.

PROPOSITION 1. — *Si B est une variété localement projective homogène (resp. balayable, resp. divisible), $F(B)$ considérée comme variété localement affine est homogène (resp. balayable, resp. divisible).*

A tout automorphisme projectif φ de B correspond un automorphisme $F(\varphi)$ de la structure conique affine de $F(B)$, donc aussi de sa structure localement affine. De plus, R^+ , groupe des homothéties de $F(B)$, est un groupe d'automorphismes de sa structure localement affine.

Montrons que si B est homogène, $F(B)$ est homogène. Il faut montrer que, si m, m' sont deux points quelconques de $F(B)$, il existe un automorphisme transformant m en m' . Soient b, b' les projections de m et m' sur B ; par hypothèse, il existe un automorphisme φ tel que $\varphi b = b'$. L'automorphisme cherché qui transforme m en m' s'obtiendra en composant $F(\varphi)$ et une homothétie de rapport convenable.

Supposons maintenant B balayable.

Soit K un domaine générateur (cf. § 1, déf. 2). Soit K_1 un compact section de $F(B)$ au-dessus de K . Il est clair que K_1 est un domaine générateur pour $F(B)$ qui est donc affinement balayable.

Supposons enfin que B soit divisible. Et soit G un groupe proprement discontinu d'automorphismes projectifs de B , sans point fixe, tel que B/G soit une variété localement projective compacte.

On construira une variété localement affine compacte, quotient de $F(B)$, en prenant le quotient de $F(B)$ par un groupe d'automorphismes, produit de $F(G)$ par un sous-groupe cyclique infini du groupe R^+ des homothéties. En particulier, si B est une variété localement projective compacte, le quotient de $F(B)$ par un sous-groupe infini discret du groupe R^+ est une variété localement affine topologiquement isomorphe au produit de B par le cercle S_1 .

Nous énoncerons donc le

COROLLAIRE. — *Si B peut être muni d'une structure localement projective, $B \times S_1$ peut être muni d'une structure localement affine.*

EXEMPLE. — Le tore à p trous peut être muni d'une structure localement projective, en prenant le quotient de l'intérieur d'une conique par un sous-groupe convenable d'automorphismes projectifs.

En effet, soient D l'intérieur du disque unité, G le groupe des automorphismes de la structure de variété complexe à une dimension de D . Il existe un homéomorphisme de D sur l'intérieur d'une ellipse E et un isomorphisme de G sur le groupe H des automorphismes de la structure projective réelle à deux dimensions de E , compatible avec les opérations des groupes. Or il est bien connu que les courbes algébriques sont des quotients de D par des sous-groupes de G .

Il résulte du corollaire de la proposition 1 qu'une variété localement affine homéomorphe au produit du tore à p trous par le cercle peut être obtenue comme quotient de l'intérieur d'un cône du second degré.

Dans ce qui suit, nous noterons R^{+p} le groupe produit de p groupes identiques à R^+ et R^{+p}/R^+ le quotient de R^{+p} par son sous-groupe diagonal.

DÉFINITION 1. — Soient p variétés localement projectives $B_1, \dots, B_i, \dots, B_p$; et soit

$$F(B_1) \times F(B_2) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p)$$

le cône affiné produit des cônes affines de bases les B_i . Nous munirons ce produit d'un : structure d'espace fibré R^{+p} principal de base $B_1 \times B_2 \times \dots \times B_p$ en faisant opérer R^{+p} sur $F(B_1) \times \dots \times F(B_p)$ suivant la formule

$$(\lambda_1 \dots \lambda_i \dots \lambda_p) \times (m_1 \dots m_p) = (\lambda_1 m_1, \dots, \lambda_i m_i, \dots, \lambda_p m_p),$$

où $\lambda_i \in R^+$, $m \in F(B_i)$ et $\lambda_i m_i$ désigne l'homothétique de m_i dans le rapport λ .

PROPOSITION 2. — Le quotient R^{+p}/R^+ opère sur

$$F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p))$$

et définit sur cette variété localement projective une structure d'espace fibré principal de base $(B_1 \times \dots \times B_i \times \dots \times B_p)$.

En effet, la base du produit des $F(B_i)$ n'est autre que le quotient de ce produit par la diagonale de R^{+p} . On peut encore remarquer que R^{+p}/R^+ se relève suivant le sous-groupe de R^{+p} formé des systèmes de p nombres réels positifs dont le produit est égal à 1. Un élément de ce sous-groupe définit un automorphisme de la structure conique affine du produit des $F(B_i)$ qui se projette donc suivant un automorphisme projectif de la structure de la base

Un élément quelconque de R^{+p} est seulement un automorphisme affine de la structure du cône produit.

PROPOSITION 3. — Soient $B_1, \dots, B_i, \dots, B_p$ des variétés localement projectives homogènes (resp. balayables, resp. divisibles); la variété localement projective $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p))$ est homogène (resp. balayable, resp. divisible).

En effet, à un automorphisme φ_i de la structure localement projective de B_i correspond fonctoriellement un automorphisme $F(\varphi_i)$ de la structure conique affine $F(B_i)$ qui définit un automorphisme que nous noterons $F_i(\varphi_i)$ de la structure conique affine du produit

$$F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p).$$

$F^{-1}(F_i(\varphi_i))$ est un automorphisme de la structure localement projective de

$$F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p)).$$

La proposition 3 va en résulter.

Démontrons par exemple que, si les B_i sont projectivement balayables,

$$F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$$

est projectivement balayable.

Soit G_i un groupe d'automorphismes projectifs de B_i tel que B_i/G_i soit une variété localement projective compacte.

Soit H un sous-groupe discret de R^{+p}/R^+ tel que le quotient de R^{+p}/R^p par H soit compact et topologiquement isomorphe à $S_1^{(p-1)}$.

Le quotient de $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$ par

$$F^{-1}(F_1(G_1) \times \dots \times F_i(G_i) \times \dots \times F_p(G_p)) \times H$$

est une variété localement projective compacte topologiquement homéomorphe à

$$B_1/G_1 \times \dots \times B_i/G_i \times \dots \times B_p/G_p \times S_1^{(p-1)}.$$

COROLLAIRE. — Si p variétés B_i peuvent être munies chacune d'une structure localement projective, le produit $B_1 \times \dots \times B_i \times \dots \times B_p \times S_1^{(p-1)}$ peut être muni d'une structure localement projective.

Nous nous proposons de démontrer une réciproque partielle de la proposition 3. Pour cela, posons la

DÉFINITION 2. — Soient p variétés localement projectives $B_1, \dots, B_i, \dots, B_p$; un automorphisme projectif f de $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p))$ est dit compatible s'il peut s'exprimer de la façon suivante : il existe une permutation σ des entiers $(1, \dots, i, \dots, p)$, un système $\{\varphi_i\}$ de p isomorphismes coniques affins entre $F(B_{\sigma(i)})$ et $F(B_i)$, tels que, si l'on définit un automorphisme φ de la structure conique affine du produit

$$F(B_1) \times \dots \times F(B_i) \times \dots \times F(B_p)$$

par la formule

$$(m_1, \dots, m_i, \dots, m_p) \xrightarrow{\varphi} (m'_1, \dots, m'_i, \dots, m'_p),$$

avec

$$m_i \in F(B_i), \quad m'_i \in F(B_i) \quad \text{et} \quad m'_i = \varphi_i m_{\sigma(i)},$$

on ait

$$f \in \{F^{-1}(\varphi)\} \times (R^{+p}/R^+).$$

L'automorphisme f sera dit associé à la permutation σ .

PROPOSITION 4. — Soient p variétés localement projectives $B_1, \dots, B_i, \dots, B_p$; si le groupe des automorphismes compatibles opère transitivement sur $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$, les B_i sont projectivement homogènes.

Si $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$ est balayable par le groupe de ces automorphismes compatibles, les B_i sont projectivement balayables.

Désignons par G le groupe des automorphismes compatibles de $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$, par G_I le sous-groupe des automorphismes compatibles associés à la permutation identique.

Il est clair que, si $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$ est balayable par G_I , chacun des B_i est projectivement balayable. Mais G_I est un sous-groupe de G

d'indice fini au plus égal à $p!$, donc, balayable par G entraîne balayable par G_I , ce qui démontre la deuxième assertion.

Montrons maintenant que, si G opère transitivement sur

$$F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p)),$$

B_1 est projectivement homogène.

Étant donnés deux points b_1 et b'_1 de B_1 , nous allons construire un automorphisme projectif de B_1 qui transforme b_1 en b'_1 .

Pour cela, choisissons deux points m et m' de $F^{-1}(F(B_1) \times \dots \times F(B_p))$ dont les projections sur $B_1 \times \dots \times B_p$ soient respectivement $(b_1, b_2, b_i, \dots, b_p)$ et $(b'_1, b_2, b_i, \dots, b_p)$, les (b_2, \dots, b_p) étant quelconques.

Soit f un automorphisme compatible tel que $f(m) = m'$.

Soient σ la permutation et φ_i les isomorphismes dont la définition 2 affirme l'existence.

Désignons par σ' la permutation inverse de σ , par h le plus petit entier tel que $\sigma^h(1) = 1$.

On obtient un automorphisme projectif φ de B , transformant b_1 en b'_1 en composant h isomorphismes comme indiqué ci-dessous

$$\varphi = F^{-1}(\varphi_{\sigma^h(1)}) \circ F^{-1}(\varphi_{\sigma^{h-1}(1)}) \circ \dots \circ F^{-1}(\varphi_{\sigma(1)}).$$

La première assertion de la proposition est ainsi établie. La deuxième est évidente.

CHAPITRE 2.

CONVEXITÉ DE CERTAINES VARIÉTÉS BALAYABLES.

Voici le plan de ce chapitre :

On définit au paragraphe 1 la notion de poche pour les variétés localement projectives (resp. affines).

Au paragraphe 2, on définit, sur l'ensemble des segments d'une variété localement projective, un invariant projectif, positif ou nul, appelé pseudo-longueur.

Cet invariant est utilisé au paragraphe 3 pour démontrer le théorème 1 sur les variétés balayables possédant une poche; deux autres résultats, où la notion de poche n'intervient pas, sont ensuite démontrés (prop. 1 et 2).

1. Coques et poches. — Nous distinguerons, pour plus de clarté, le cas affín du cas projectif.

DÉFINITION 1 (dans le cas affín). — Soit V une variété localement affine de dimension n : on définit une *poche* de V par la donnée :

— d'un ouvert connexe P de V ;

- d'une carte φ de P dans R^n compatible avec la structure affine de P ;
- d'une fonction linéaire z sur R^n appelée cote.

Le triple (P, φ, z) doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

a. Sur l'image $\varphi(P)$ la cote z a pour borne inférieure 0 et est majorée par 1;

b. Soit (M, N) un segment de V dont l'extrémité M appartient à P . Soit $\tilde{\varphi}$ une carte compatible d'un voisinage de (M, N) dans R^n (cf. chap. 1, § 1, déf. 14) ayant en M même germe que φ (cf. chap. 1, § 1, prop. 1, 2°). Alors, si $z(\tilde{\varphi}(N))$ est inférieur à 1, N appartient à P .

DEFINITION 1' (dans le cas projectif). — Soit V une variété localement projective de dimension n : on définit une *poche* de V par la donnée :

- d'un ouvert connexe P de V ;
- d'un hémisphère ouvert $\overset{\circ}{H}$ de $S(n)$;
- d'une carte φ de P dans $S(n)$ compatible avec la structure projective, et telle que

$$\varphi(P) \subset \overset{\circ}{H};$$

- d'une fonction linéaire z , appelée cote, sur $\overset{\circ}{H}$ considéré comme espace affín (cf. chap. 1, § 1, déf. 6).

(Le système $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

a. Sur l'image $\varphi(P)$, la cote z a pour borne inférieure 0 et est majorée par 1;

b. Soit (M, N) un segment de V dont l'extrémité M appartient à P . Soit $\tilde{\varphi}$ une carte compatible d'un voisinage de (M, N) dans $S(n)$ ayant en M même germe que φ . Alors,

$$\tilde{\varphi}(M, N) \subset \overset{\circ}{H}$$

et, si $z(\tilde{\varphi}(N))$ est inférieur à 1, N appartient à P .

REMARQUE. — Soient V une variété localement affine de dimension n , (P, φ, z) une poche de V , j un isomorphisme compatible avec la structure affine de R^n sur un hémisphère ouvert $\overset{\circ}{H}$ de $S(n)$: le système $(P, \overset{\circ}{H}, j \circ \varphi, z \circ j^{-1})$ définit une poche de V considérée comme variété localement projective (cf. chap. 1, § 1, déf. 12, remarque).

Exemple dans le cas affín. — Soient W un ouvert étalé au-dessus de R^n et p la projection de W sur R^n ; soit z une forme linéaire sur R^n ; soit P une composante connexe de l'image réciproque par p du demi-espace ouvert : $z < 1$.

Si, sur $p(P)$, z a pour borne inférieure 0, le triple (P, p, z) définit une poche de W .

Il suffit de vérifier qu'est satisfaite la condition b. Soient $M \in P$ et (M, N) un segment de W ; supposons $z(p(N)) < 1$. Démontrons que N appartient

à P ; $p(M, N)$ est inclus dans le demi-espace ouvert $z < 1$, donc (M, N) est inclus dans une composante connexe de l'image réciproque par p de ce demi-espace ouvert, donc dans P , composante connexe de M .

Exemple dans le cas projectif. — Soient W un ouvert étalé au-dessus de $S(n)$, p la projection de W sur $S(n)$, $\overset{\circ}{H}$ un hémisphère ouvert de $S(n)$, z une forme linéaire sur $\overset{\circ}{H}$ muni de sa structure affine et P une composante connexe dans W de l'image réciproque par p du demi-espace ouvert $z < 1$.

Si, sur $p(P)$, z a pour borne inférieure 0, et si, de plus, pour tout segment (M, N) de W d'origine M dans P , on a $p(MN) \subset \overset{\circ}{H}$, le système $(P, \overset{\circ}{H}, p, z)$ définit une poche de W . On vérifie, dans le cas affine, qu'est satisfaite la condition *b*.

Nous verrons (§ 3, théorème) que, si V est une variété localement projective (resp. affine) connexe balayable, possédant une poche $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ [resp. (P, φ, z)], on est toujours dans la situation considérée en exemple. φ se prolonge en une application projective (resp. affine) de V sur $S(n)$ (resp. R^n) et P n'est autre qu'une composante connexe de l'image réciproque par φ du demi-espace ouvert de $\overset{\circ}{H}$ (resp. R^n) d'équation $z < 1$.

DÉFINITION 2. — Une poche $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ [resp. (P, φ, z)] est appelée *coque* si $\varphi(P)$ est un convexe.

DÉFINITION 3. — Une coque (P, φ, z) [resp. $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$] d'une variété localement affine (resp. projective) est appelée une *coque stricte* si le convexe $\varphi(P)$ de R^n [resp. si $\varphi(P)$ considéré comme convexe de l'espace affine $\overset{\circ}{H}$] ne contient pas de droite.

REMARQUE 1. — Il importe de distinguer entre droite de $\overset{\circ}{H}$, espace affine, et droite de $S(n)$: une droite de $\overset{\circ}{H}$ est une demi-droite de $S(n)$, ou portion de droite comprise entre deux points diamétralement opposés.

REMARQUE 2. — Dire que la coque $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ est une coque stricte équivaut à dire que $\overline{\varphi(P)}$ est un corps convexe de $S(n)$.

2. La pseudo-longueur. — On définit sur l'ensemble des segments d'une variété localement projective un invariant projectif appelé *pseudo-longueur*. Nous avons vu (chap. 1, § 1, déf. 12, remarque) que toute variété localement affine est munie canoniquement d'une structure localement projective. La pseudo-longueur est ainsi définie pour les variétés localement affines : c'est un invariant affine.

Nous allons énoncer les principales propriétés de la pseudo-longueur avant d'en donner la définition.

La pseudo-longueur d'un segment (M, N) relativement à la variété localement projective V est notée :

$$l_V(M, N).$$

$l_V(M, N)$ possède les propriétés suivantes :

$$1^\circ \quad l_V(M, N) \geq 0; \quad l_V(M, M) = 0;$$

2° Soit g un automorphisme projectif de V , on a

$$l_V(gM, gN) = l_V(M, N);$$

3° Soit $(M, N) \subset (M', N')$, on a

$$l_V(M, N) \leq l_V(M', N');$$

4° Soit V' un ouvert de V considéré comme variété localement projective, on a

$$l_V(M, N) \leq l_{V'}(M, N)$$

pour tout segment (M, N) inclus dans V' ;

5° La pseudo-longueur est une fonction semi-continue supérieurement du segment, c'est-à-dire que, si un segment (M_i, N_i) tend vers (M, N) , on a

$$\overline{\lim} l_V(M_i, N_i) \leq l_V(M, N);$$

6° Si V est l'intérieur d'un corps convexe, $l_V(M, N)$ est une fonction continue en M et N sur le produit $V \times V$; $l_V(M, N)$ est nulle si et seulement si $M = N$;

7° Soit $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, \varepsilon)$ une poche de V ; soit $M \in P$ un point de V tel que $\varepsilon(\varphi(M)) < \frac{1}{K}$ (où K désigne un nombre réel supérieur à 1); soit (M, N) un segment de V dont la pseudo-longueur $l_V(M, N)$ soit inférieure à $\log K$; alors, $N \in P$ et $\varepsilon \varphi(N) < K \varepsilon(\varphi(M))$.

La définition de la pseudo-longueur utilise la

DÉFINITION 1. — Soient A, A', B', B quatre points d'un segment (AB) de $S(n)$ écrits comme ils se rencontrent si l'on ordonne de A vers B : on appelle *mesure projective* de $A'B'$ relativement à AB le logarithme du rapport anharmonique (A', B', B, A) . Ce rapport anharmonique est une quantité supérieure ou égale à l'unité; la notion de mesure projective est invariante par les automorphismes de $GS(n, R)$.

PROPOSITION 1. — La mesure projective décroît si l'on remplace le segment (A', B') par un segment contenu dans (A', B') ; elle décroît encore si l'on remplace le segment AB par un segment le contenant.

DÉFINITION 2. — Soit (A', B') un segment d'une variété localement projective V ; on dit que (A', B') est *majoré par k dans V* s'il existe un segment (A, B) de V contenant (A', B') tel que, si φ est une carte compatible d'un voisinage de (A, B) sur un ouvert de $S(n)$, on ait : mesure projective de $\varphi(A', B')$ relativement à $\varphi(A, B) < k$.

DÉFINITION 3. — La *pseudo-longueur* $l_V(M, N)$ d'un segment (M, N) d'une variété localement projective est la borne inférieure des nombres k qui majorent (M, N) dans V .

Nous allons vérifier que la pseudo-longueur ainsi définie possède les propriétés 1° à 7°.

Les propriétés 1° et 2° résultent trivialement de la définition.

Les propriétés 3° et 4° résultent de la proposition 1.

La propriété 6° résulte de la

PROPOSITION 2. — Soient \bar{V} un corps convexe de $S(n)$ d'intérieur V ; A, B deux points de V ; F, F' les points d'intersection de la droite AB avec la frontière de \bar{V} :

$l_V(A, B)$ n'est autre que la mesure projective de AB relativement à FF' ;

$l_V(A, B)$ est une fonction continue sur $V \times V$ qui ne s'annule que sur la diagonale.

La proposition résulte de ce que F, F' dépendent continûment de A, B .

Pour démontrer 5°, nous démontrerons que, si MN est un segment borné par k dans V , il en est de même de tout segment assez voisin de MN . Soient (A, B) (cf. déf. 2) un segment de V et φ une carte compatible d'un voisinage U de (A, B) sur l'intérieur d'un corps convexe de $S(n)$ tels que la mesure projective de $\varphi(M, N)$ relativement à $\varphi(A, B)$ soit inférieure à k . Il suffit de montrer, d'après 4°, que la pseudo-longueur l_U de tout segment suffisamment voisin de MN est inférieure à k . Or, cela résulte aisément de la proposition 2.

Pour démontrer 7°, nous calculerons en considérant la structure affine de \hat{H} .

Soient F, F' les points extrémités d'un segment contenant (A, B) tel que

$$1 < (\varphi(A), \varphi(B), \varphi(F'), \varphi(F)) < K,$$

où φ désigne l'extension à un voisinage de (F, F') de la carte φ de P . Posons

$$\varphi(A) = a, \quad \varphi(B) = b, \quad \varphi(F) = f, \quad \varphi(F') = f'.$$

Considérons dans l'espace affn de \hat{H} le rapport de mesures algébriques de segments

$$1 < \frac{af' \times bf}{af \times ff'} < K;$$

les quatre points a, b, f, f' ont une cote z positive.

Si la cote de b est inférieure ou égale à la cote de a , d'après la propriété b de la définition d'une poche, $B \in P$, et la propriété 7° est démontrée.

Si la cote de b est supérieure à celle de a , on a les inégalités

$$0 < z(f) < z(a) < z(b) < z(f').$$

On en déduit que $\frac{af'}{bf}$ est supérieur à l'unité, en sorte que le quotient $\frac{bf}{af}$ est inférieur à K ; d'où résulte l'inégalité

$$z(b) < K \times z(a) < 1$$

et, d'après la propriété b de la définition 1' du paragraphe 1, on a $B \in P$.

DÉFINITION 4. — Soit C une partie d'une variété localement projective V : on dit que C est majoré par k dans V , si deux points quelconques de C peuvent être joints par un segment qui est inclus dans C et est majoré par k dans V .

PROPOSITION 3. — Soit V une variété localement projective, k un nombre réel strictement positif. Tout point M de V possède un voisinage qui est majoré par k .

Si V est l'intérieur d'un corps convexe, la propriété est une conséquence facile de la sixième propriété de la pseudo-longueur.

Si V n'est pas l'intérieur d'un corps convexe, choisissons un voisinage U de M dont il existe une carte compatible dans l'intérieur d'un corps convexe. On peut, d'après ce qui précède, trouver un voisinage W de M , borné par k dans U . D'après la quatrième propriété de la pseudo-longueur, W est *a fortiori* majoré par k dans V .

DÉFINITION 5. — Soit E une partie compacte d'une variété localement projective V ; soit k un nombre réel strictement positif. On désigne par $n(E, k)$ le plus petit entier n , tel qu'il existe un recouvrement de E , formé de n ouverts majorés par k .

PROPOSITION 4. — Soit E une partie compacte connexe d'une variété localement projective V . Deux points M et N quelconques de E peuvent être joints par une ligne brisée formée d'au plus $n(E, k)$ segments majorés par k dans V .

Pour $n(E, k) = 1$, la proposition 4 est équivalente à la définition : nous allons démontrer la proposition par récurrence sur $n(E, k)$. Supposons la démonstration faite pour $n(E, k) < p$, et supposons $n(E, k) = p$. Soient $O_1, \dots, O_i, \dots, O_p, p$ ouverts majorés par k dont la réunion contienne E .

Soit $M \in O_j$; $N \in O_k$; soit $O_Q = \bigcup_{i \in Q} O_i$, la composante connexe contenant N , de la réunion des ouverts O d'indice différent de j : O_Q est recouvert à

l'aide d'au plus $p - 1$ ouverts bornés par k ; donc deux points quelconques de O_Q peuvent être joints par une ligne brisée formée d'au plus $p - 1$ segments majorés par k (hypothèse de récurrence). D'autre part, puisque O_a est composante connexe de la réunion des O d'indice différent de j , un tel ouvert est inclus dans O_Q , ou a avec O_Q une intersection vide. E étant connexe, il en résulte que $O_Q \cap O_j$ n'est pas vide; il suffira donc de joindre M à un point de cette intersection, puis ce point à N , pour relier M à N par une ligne brisée d'au plus p segments majorés par k .

DÉFINITION 6. — Soient V une variété localement projective, $M \in V$, r un nombre réel positif. On appelle pseudo-boule de centre M et de rayon r l'ensemble des points N de V tels qu'il existe au moins un segment fermé d'extrémités M, N , majoré par r .

La pseudo-boule de centre M et de rayon r , est un ouvert connexe (cf. 3°, 5°).

Si V est l'intérieur d'un corps convexe, il résulte du 6° que les pseudo-boules de centre M et de rayon quelconque forment une base de voisinages de M .

PROPOSITION 5. — Soient V une variété localement projective connexe, U un ouvert non vide de V et r un nombre réel, tels que, quel que soit $M \in U$, la pseudo-boule de centre M et de rayon r soit incluse dans U . Alors $U = V$.

Soit $M \in U$; $N \in V$: nous allons montrer que $N \in U$. En effet, M et N peuvent être joints par une ligne brisée formée de segments tous majorés par r : on démontre de proche en proche à partir de M que tous les sommets de cette ligne appartiennent à U .

PROPOSITION 6. — Soit V une variété localement projective, possédant une poche $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$. Soient A et B deux points de V , L une ligne brisée joignant A à B , et formée de p segments tous majorés dans V par $k = \log K$. Supposons que $A \in P$; $z(\varphi(A)) < 1/K^p$: alors B est aussi dans P , ainsi que L , et l'on a

$$z(\varphi(B)) < K^p z(\varphi(A)).$$

La proposition se démontre par récurrence sur p : pour $p = 1$, c'est la septième propriété de la pseudo-longueur, le passage de p à $p + 1$ est immédiat.

PROPOSITION 7. — Soit V une variété localement projective connexe et balayable pour un groupe G d'automorphismes projectifs (cf. chap. 1, § 1, déf. 15). Soit $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ une poche de V . Soit E un compact de V . Il existe un automorphisme projectif $g \in G$, tel que $gE \subset P$.

DÉMONSTRATION. — Nous allons d'abord montrer que tout compact E de V est inclus dans un domaine générateur connexe (pour le groupe G); nous

démontrerons alors la proposition en supposant que E est un domaine générateur compact connexe. Soit K un domaine générateur compact. $E \cup K$ est aussi un domaine générateur compact; puisque V est localement compact et localement connexe, on peut recouvrir $E \cup K$ au moyen d'un nombre fini de compacts connexes; soit E' , la réunion de ces compacts: puisque V est connexe, E' est inclus dans un compact connexe E'' ; il suffit, pour obtenir E'' , d'ajouter à E' un nombre fini de lignes brisées reliant les composantes connexes de E' .

Soit donc E un domaine générateur compact connexe. Soit k un nombre strictement positif ($k = \log K$). Soit M^0 un point de P de cote $z \varphi(M^0)$ inférieure à $1/K^{n(E,k)}$. Puisque E est un domaine générateur pour G , il existe $g \in G$ automorphisme projectif de V et $N^0 \in E$, tels que $gN^0 = M^0$. Soit N un point quelconque de E : nous allons montrer que $gN \in P$.

En effet (prop. 4), il existe une ligne brisée L reliant N^0 à N , et formée d'au plus $n(E, k)$ segments tous bornés par k . Il résulte de la proposition 6 que $gN \in P$.

COROLLAIRE. — Soit V une variété localement projective, connexe balayable pour un groupe G d'automorphismes projectifs; soit $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ une poche de V ; soient M et N deux points de V . Il existe un automorphisme projectif $g \in G$ de V tel que $gM \in P$; $gN \in P$.

En effet, $\{M, N\}$ est une partie compacte de V .

REMARQUE. — Soit V une variété localement affine balayable pour un groupe G d'automorphismes affins. Supposons que V possède une poche (P, φ, z) . Pour la structure localement projective de V (cf. chap. 1, § 1, déf. 12, remarque), G est un groupe d'automorphismes projectifs; de plus (cf. chap. 2, § 1, déf. 1', remarque), si j désigne un homéomorphisme de R^n sur un hémisphère $\overset{\circ}{H}$ de $S(n)$ (j compatible avec les structures affines), $(P, \overset{\circ}{H}, j \circ \varphi, z \circ j^{-1})$ est une poche de la variété localement projective de V . La proposition 7 et son corollaire sont donc vrais aussi dans le cas affín: on a l'énoncé:

PROPOSITION 7'. — Soit V une variété localement affine, connexe et balayable pour un groupe G d'automorphismes affins; soit (P, φ, z) une poche de V . Soit E un compact de V . Il existe $g \in G$ tel que $gE \subset P$. Si M et N sont deux points de V , il existe $g \in G$ tel que: $gM \in P$; $gN \in P$.

3. Applications.

THÉORÈME. — Soit V une variété localement projective connexe balayable. Soit $(P, \overset{\circ}{H}, \varphi, z)$ une poche de V .

1° Il existe une carte compatible $\tilde{\varphi}$ de V sur un ouvert de $S(n)$, induisant φ sur P . P n'est autre que l'image réciproque par $\tilde{\varphi}$ de l'ensemble des points de \mathring{H} où $z < 1$.

2° Si P est simplement connexe, il en est de même de V .

3° Si $\varphi(P)$ est convexe (i. e. si $(P, \mathring{H}, \varphi, z)$ est une coque), $\tilde{\varphi}(V)$ est un convexe.

4° Si $(P, \mathring{H}, \varphi, z)$ est une coque stricte, $\tilde{\varphi}(V)$ est l'intérieur d'un corps convexe.

La démonstration du 1° va se décomposer en trois points.

a. Il existe une application $\tilde{\varphi}$ de V sur $S(n)$, coïncidant avec φ sur P , et dont le germe en tout point de V appartient à $J(V)$ (cf. chap. 1, § 1, déf. 12).

Il faut montrer que le revêtement $J(V)$ de V est isomorphe à un produit : $\tilde{\varphi}$ a pour germes la composante connexe dans $J(V)$ des germes de φ .

Soit $[j, j']$ un chemin de $J(V)$, dont la projection sur V par l'application source soit un lacet $[M, M]$. Nous allons montrer que $j = j'$. D'après la proposition 7 du paragraphe 2, il existe un automorphisme projectif g de V , tel que l'image par g du lacet $[M, M]$ soit dans P ,

$$g[M, M] \subset P.$$

Considérons maintenant le lacet de $J(V)$ obtenu à partir du lacet $[j, j']$ et composant chaque jet avec l'automorphisme g^{-1} : on obtient un lacet de $J(V)$ se projetant par l'application source sur le lacet $g[M, M]$, inclus dans P . Mais P est isomorphe par φ à un ouvert de $S(n)$: donc la restriction à P de $J(V)$ est un produit, et tout chemin de $J(V)$ se projetant sur le lacet $g[M, M] \subset P$ est fermé. Le chemin $[j, j']$ dont l'image par l'automorphisme g^{-1} de $J(V)$ est fermé est donc fermé. L'assertation a en résulte immédiatement.

b. L'application définie en a de V sur $S(n)$ est une carte compatible.

$\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme local : il faut montrer que $\tilde{\varphi}$ est un homéomorphisme global, c'est-à-dire que deux points distincts M et N de V ont par $\tilde{\varphi}$ des images distinctes.

Soit g un automorphisme projectif de V : nous désignerons par γ l'automorphisme de $S(n)$ ($\gamma \in G S(n, R)$) tel que

$$\tilde{\varphi} \circ g = \gamma \circ \tilde{\varphi}$$

[l'ensemble des jets de $\tilde{\varphi} \circ g$ est une section de $J(V)$ au-dessus de V : puisque $G S(n, R)$ opère transitivement sur la fibre des jets de même source, il existe γ transformant $\tilde{\varphi}$ en la section $\tilde{\varphi} \circ g$].

Choisissons g tel que $gM \in P$; $gN \in P$. Puisque $M \neq N$, on a $gM \neq gN$; et, puisque la restriction de $\tilde{\varphi}$ à P est un homéomorphisme, on a

$$\tilde{\varphi} \circ gM \neq \tilde{\varphi} \circ gN.$$

Mais il en résulte que

$$\gamma \circ \tilde{\varphi} M \neq \gamma \circ \tilde{\varphi} N$$

et donc que

$$\tilde{\varphi} M \neq \tilde{\varphi} N.$$

ce que nous voulions démontrer.

c. P est l'image réciproque par $\tilde{\varphi}$ de l'ensemble D des points de \mathring{H} , où $z < 1$.

Montrons que

$$P = \tilde{\varphi}^{-1}(D \cap \tilde{\varphi}(V)).$$

Soit $M \in \tilde{\varphi}^{-1}(D \cap \tilde{\varphi}(V))$ nous : allons montrer que $M \in P$. Soit $N \in P$; on peut construire dans $D \cap \tilde{\varphi}(V)$ une ligne brisée allant de $\tilde{\varphi}(M)$ à $\tilde{\varphi}(N)$. De la condition *b* de la définition des poches, il résulte que M appartient à P .

Dans la suite, nous supposons, pour simplifier les notations, que $\tilde{\varphi}$ est l'identité, et donc que P et V sont des parties de $S(n)$.

Démontrons 2°. — Soit L un lacet de V : il faut montrer que L est homotope à un point. Or il existe un automorphisme de V qui envoie le compact L dans P : comme P est simplement connexe, L est homotope à un point.

Démontrons 3°. — Soit M et N deux points de V : il faut montrer que, dans V , il existe un segment fermé d'extrémités M, N . Or, soit g un automorphisme projectif tel que $gM \in P, gN \in P$: il existe un segment (gM, gN) puisque $\varphi(P)$ est convexe; donc il existe un segment (M, N) .

Démontrons 4°. — Si V n'est pas l'intérieur d'un corps convexe, on peut trouver dans V une demi-droite L , c'est-à-dire une portion de droite limitée à deux points diamétralement opposés de la frontière de V .

Soit g un automorphisme projectif de V qui envoie dans P un point M de L : il résulte de la condition *b* de la définition des poches que gL est une demi-droite incluse dans \mathring{H} , c'est-à-dire une droite de la géométrie affine de \mathring{H} : nous allons montrer que cette inclusion est incompatible avec l'hypothèse faite que P ne contient pas de droite de \mathring{H} .

En effet (§ 1, déf. 1', *b*), tout point de gL de cote z inférieure à 1 appartient à P : donc tous les points de gL ont une cote supérieure ou égale à 0, puisque la borne inférieure de z sur P est 0. Mais alors, gL est une droite (pour la géométrie affine de \mathring{H}) de cote constante égale à $z(M)$ et gL est incluse dans P , ce qui contredit l'hypothèse faite sur P .

La démonstration du théorème est achevée.

Dans le cas affin, on a le

THÉORÈME. — Soit V une variété localement affine connexe balayable. Soit (P, φ, z) une poche de V .

1° Il existe une carte compatible $\tilde{\varphi}$ de V sur un ouvert de R^n . P n'est autre que l'image réciproque par $\tilde{\varphi}$ de l'ensemble des points où $z < 1$.

2° Si P est simplement connexe, il en est de même de V .

3° Si (P, φ, z) est une coque, $\tilde{\varphi}(V)$ est un convexe.

4° Si (P, φ, z) est une coque stricte, $\tilde{\varphi}(V)$ ne contient pas de droite.

Le théorème se démontre comme le précédent : il suffit de remplacer projectif par affiné, et $S(n)$ ou \hat{H} par R^n .

PROPOSITION 1. — Soit V une variété localement affine balayable munie d'une projection p sur R^n compatible avec la structure affine (V est un ouvert étalé au-dessus de R^n). Soit E un domaine générateur compact de V ; soit K un compact de R^n . Il existe un segment (M, N) de V , tel que

$$M \in E, \quad p(N) \notin K.$$

a. La proposition est évidente si V contient un fermé L homéomorphe par p à une droite de R^n .

En effet, il existe un automorphisme affiné g de V tel que $gL \cap E \neq \emptyset$. On a évidemment $p \circ gL \cap \bigcup K \neq \emptyset$. Il suffit de prendre

$$M \in gL, \quad p(N) \in p \circ gL \cap \bigcup K.$$

b. Supposons maintenant que V ne contienne pas de fermé L homéomorphe par p à une droite de R^n .

Nous décomposerons la démonstration de la proposition en une suite de points.

1° Soit k un nombre réel positif. Il existe un segment (A, B) de V jouissant de la propriété suivante :

Soit (M, B) un segment de V tel que

$$(A, B) \subset (M, B).$$

Alors on a

$$\frac{\overline{ma}}{ab} < k,$$

où $m = p(M)$; $a = p(A)$; $b = p(B)$.

Démonstration du 1°. — Soit l une droite de R^n telle que $p(V) \cap l \neq \emptyset$. Une composante connexe S de $p^{-1}(l)$ se projette suivant un ouvert connexe de l qui pourra être un segment ouvert $]f, g[$ (ou une demi-droite $]f, \infty[$).

Soit (a, b) un segment fermé de l tel que

$$\frac{\overline{fa}}{fb} < k.$$

L'image réciproque par p dans S du segment (a, b) est un segment (A, B) de V qui possède les propriétés demandées.

2° Supposons désormais R^n muni d'une métrique euclidienne. Il existe un nombre r positif tel que tout point de E admette un voisinage U , tel que la restriction de p à U définisse une carte sur une boule fermée de rayon r .

L'assertion résulte de la compacité de E .

3° Il existe un segment (A', B') de V dont l'origine A' appartient à E et qui se projette par p sur un segment de longueur supérieure à r/k .

Soit g un automorphisme affine de V tel que $gA = A' \in E$. Le segment $(gA, gB) = (A', B')$ de V possède la propriété 1° de (A, B) . D'autre part, d'après 2°, il existe un segment (M, B') de V tel que

$$(A', B') \subset (M, B'); \quad |p(M), p(A')| = r.$$

Posons

$$p(M) = m; \quad p(A') = a'; \quad p(B') = b',$$

on a

$$\frac{\overline{ma'}}{a'b'} < k,$$

d'où

$$\frac{r}{k} < |a'b'|.$$

4° La démonstration va pouvoir s'achever. Soit R le diamètre du compact $p(E) \cup K$ de R^n .

Choisissons k tel que $\frac{r}{k} > R$.

Le segment (A', B') construit dans 3° vérifie la propriété

$$A' \in E; \quad p(B') \notin K.$$

D'où la proposition.

PROPOSITION 2. — Soit V une variété localement projective connexe balayable munie d'une projection p sur $S(n)$ compatible avec la structure projective [V est un ouvert étalé sur $S(n)$]. Supposons de plus qu'il existe un hémisphère ouvert $\overset{\circ}{H}$ de $S(n)$ tel que

$$\overline{p(V)} \subset \overset{\circ}{H}.$$

Alors p est une carte de V sur l'intérieur d'un corps convexe de $S(n)$.

L'enveloppe convexe de $p(V)$ [i. e. le plus petit convexe de $\overset{\circ}{H}$ contenant $p(V)$] est un convexe W , intérieur d'un corps convexe : nous allons montrer que p est une carte de V sur W .

La démonstration se décompose en cinq points.

1° Soit g un automorphisme projectif de V , il existe un élément unique $\gamma \in GS(n, R)$ tel que

$$p \circ g = \gamma \circ p.$$

γ est un automorphisme projectif de W .

L'élément γ a déjà été considéré en b dans la démonstration du théorème; que γ soit un automorphisme de W résulte immédiatement de ce que γ est un automorphisme de $p(V)$ dont W est l'enveloppe convexe.

2° Tout point $M \in V$ possède un voisinage O_M tel que la restriction de p à O_M soit une carte sur une pseudo-boule (cf. § 2, déf. 5) de centre $p(M)$ et de rayon r convenable. O_M est le lieu des points N de V tels qu'il existe un segment (M, N) et que la pseudo-longueur du segment $(p(M), p(N))$ dans W soit inférieure à r . Par abus de langage, O_M sera appelé une pseudo-boule de centre M et de rayon r .

L'existence de O_M résulte de ce que les pseudo-boules de centre $p(M) = m$ forment une base de voisinage de m . Il est clair que tout point N de O_M possède la propriété énoncée; réciproquement, si $n = p(N)$ appartient à la pseudo-boule de centre m et que N peut être joint à M par un segment de V , ce segment n'est autre que le relevé de (m, n) dans O_M .

3° Il existe un nombre r positif, tel que tout point M de V possède un voisinage O_M pseudo-boule de centre M et de rayon r .

Remarquons d'abord que, si E est un compact de V , il existe $r(E)$ tel que tout point de E soit centre d'une pseudo-boule de rayon $r(E)$: cela résulte de 2°, de la continuité de la pseudo-longueur sur W , et de la compacité de E .

Soit E un domaine générateur compact de V : nous allons montrer que tout point de V est centre d'une pseudo-boule de rayon $r(E)$.

Soit $M \in V$: il existe un automorphisme projectif g de V tel que $gM \in E$; soit O' la pseudo-boule de centre gM et de rayon $r(E)$: il résulte de 1° que $g^{-1}O'$ est une pseudo-boule O de centre M et de rayon $r(E)$.

$$4^\circ p(V) = W.$$

En effet, $p(V)$ est un ouvert de W tel que, si $m \in p(V)$, la pseudo-boule de centre m et de rayon r est incluse dans $p(V)$. Donc $p(V) = W$ (cf. § 2, prop. 5).

5° V est un revêtement de W .

Soit $m \in W$: nous allons montrer que l'image réciproque par p de la pseudo-boule O de centre m et de rayon r n'est autre que la réunion des pseudo-boules de rayon r centrées aux points de $p^{-1}(m)$, et que ces pseudo-boules sont deux à deux disjointes.

Que les pseudo-boules soient deux à deux disjointes résulte d'un résultat

général de la théorie des ouverts étalés : deux sections d'un ouvert étalé (ici V) au-dessus d'une même partie connexe de la base (ici la pseudo-boule de centre m et de rayon r) sont identiques ou d'intersection vide.

Soit $N \in p^{-1}(O)$: nous allons montrer qu'il existe $M \in p^{-1}(m)$ tel que N soit inclus dans la pseudo-boule de centre M et de rayon r .

En effet, soit O' la pseudo-boule de centre N et de rayon r (une telle pseudo-boule existe dans V d'après 4°) : on a $m \in p(O')$: donc O' contient un point M de $p^{-1}(m)$: il est clair que N est inclus dans la pseudo-boule de centre M et de rayon r .

Le point 5° une fois établi, la proposition résulte trivialement de ce que V est connexe, et W simplement connexe.

CHAPITRE 3.

COMPLÉMENTS SUR LES CONVEXES.

Ce chapitre contient la démonstration de propriétés des convexes affins et projectifs dont il sera fait usage au chapitre 5 dans l'étude des convexes balayables.

1. Facettes et variétés d'appui. — Dans ce paragraphe, les notions de facettes et de variétés d'appui sont définies pour les convexes d'un espace affín et de la sphère projective associée.

DÉFINITION 1. — Sur un ensemble convexe W , dans un espace vectoriel, on définit la relation de préordre $\alpha(W) : A \alpha(W) B$ s'il existe un segment $(A', B) \subset W$ tel que $A \in]A', B[$, ou si $A = B$.

On peut simplifier l'énoncé de la définition 1 en faisant la convention suivante : on appelle intérieur d'un segment AB , l'intérieur de ce segment, muni de la topologie induite par la variété linéaire support de l'ensemble $\{A, B\}$; cet intérieur se note $]A, B[$ ou $]B, A[$; si $A \neq B$, on retrouve la définition habituelle de l'intervalle ouvert $]A, B[$; si $A = B$, le support de $\{A\}$ n'est autre que la variété à 0 dimension $\{A\}$, et l'on a

$$]A, A[= (A, A) = \{A\}.$$

L'énoncé de la définition 1 devient :

$A \alpha(W) B$ s'il existe un segment $(A', B) \subset W$ tel que $A \in]A', B[$.

Pour $A = B$ on pose $A' = A$ et l'on a $A \in]A, A[$.

Dans ce qui suit, nous écrirons toujours α pour $\alpha(W)$ si aucune confusion n'en peut résulter.

Pour montrer qu'on a bien une relation de préordre, il faut démontrer

que $A \alpha B$ et $B \alpha C$ impliquent $A \alpha C$. En effet, si l'on a dans W , A' et B' tels que

$$\begin{aligned} A \in) A', B(\\ B \in) B', C(\end{aligned}$$

A' , B' , C engendrent un convexe : A est intérieur à ce convexe supposé muni de la topologie de la variété linéaire support, et le support de AC le coupe suivant un segment auquel A est intérieur.

DÉFINITION 2. — La relation d'équivalence associée à la relation de préordre $\alpha(W)$ se note $F_W(A, B)$: les classes d'équivalence correspondantes sont appelées W -facettes (W ne sera noté que si une confusion est à craindre).

La relation de préordre α définit canoniquement sur l'ensemble des facettes une relation d'ordre que nous noterons aussi α .

REMARQUE. — On peut donner de la définition de $F_W(A, B)$ l'énoncé suivant : n points A_1, \dots, A_n de W appartiennent à une même facette si, pour la topologie de la variété linéaire L support de $\{A_1, \dots, A_n\}$, A_1, \dots, A_n sont intérieurs à $L \cap W$.

PROPOSITION 1. — Soit F une facette d'un convexe W , et soit L la variété linéaire support de F ; F est un ouvert de L , supposé muni de sa topologie localement convexe la plus fine.

Il suffit de démontrer que si $A \in F$, et si l est une sous-variété linéaire de dimension finie telle que $A \in l$ et $l \subset L$, alors A est intérieur à $l \cap F$ pour la topologie de l . Or, cela résulte de la remarque ci-dessus.

PROPOSITION 2. — Soient F une facette de W , L son support, et soient $A \in F$, $B \in W$; alors $A \alpha B$ si et seulement si $B \in L$.

En effet, si $B \in L$, la variété linéaire engendrée par A et B coupe W suivant une partie convexe, qui contient B et à laquelle A est intérieur, donc $A \alpha B$; si $A \alpha B$, la variété linéaire engendrée par A et B est coupée par F , donc par L suivant une partie convexe d'intérieur non vide, donc $B \in L$.

PROPOSITION 3. — Soit F, F' deux facettes de W de supports L et L' ; on a $F \alpha F'$ si et seulement si $L' \subset L$; on a $L = L'$ si et seulement si $F = F'$.

PROPOSITION 4. — L'ensemble des facettes muni de la relation d'ordre α est filtrant à gauche.

En effet, soient F et F' deux facettes $A \in F$, $A' \in F'$, B un point intérieur au segment AA' dans son support : $B \alpha A$; $B \alpha A'$. La facette F'' de B est donc telle que $F'' \alpha F$; $F'' \alpha F'$.

COROLLAIRE. — L'ensemble des variétés linéaires supports de facettes du convexe W est filtrant à droite pour la relation d'inclusion.

DÉFINITION 3. — Une variété linéaire S est dite *variété d'appui* de W si $S \cap W$ est non vide et saturé pour la relation d'équivalence F_W (cette définition équivaut à celle de BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. II, p. 83).

D'après la proposition 3, il est équivalent de dire que $A \in S \cap W$ et $A \alpha B$ impliquent $B \in S \cap W$.

L'espace tout entier est une variété d'appui, le support d'une facette est une variété d'appui; la réciproque n'est pas vraie : on trouve facilement, dans un espace de dimension finie, un convexe W et une variété d'appui S telle que $S \cap W$ ait un support distinct de S ; nous allons donner un exemple en dimension infinie d'un convexe W et d'une variété d'appui S de W telle que $S \cap W$ engendre S , mais qu'il n'existe aucune facette dont le support soit S . Considérons dans un espace vectoriel de dimension $> \aleph_0$ un système dénombrable de vecteurs linéairement indépendants OA_i issus de l'origine O : l'enveloppe convexe de O et de A_i est un \aleph_0 simplexe S dont le support est de dimension infinie : chaque facette cependant est de dimension finie; tout point M de S est en effet barycentre d'un nombre fini de points de l'ensemble $\{O, A, \dots\}$ affectés de masses non nulles dont la somme est 1; ces points en nombre fini engendrent le support de la facette de M . En dimension finie, on a toutefois la

PROPOSITION 5. — Si W est un convexe dont le support E est de dimension finie, pour toute variété d'appui L à W il existe une facette F dont le support S est tel que $S \cap W = L \cap W$.

Désignons par S le support de $L \cap W$; alors $S \cap W = L \cap W \neq \emptyset$; de plus, $S \cap W$ est un convexe de support S qui, pour la topologie de l'espace S de dimension finie, admet donc au moins un point interne dont la facette F aura S pour support.

REMARQUE. — 1° E est le support d'une facette de W qui n'est autre que son intérieur;

2° Si W est un convexe compact de dimension finie, $L \cap W$ n'est autre que la fermeture compacte E de F .

PROPOSITION 6. — Soit L une variété linéaire, W un convexe

$$W' = W \cap L = \emptyset.$$

Alors la relation $\alpha(W')$ est induite par la relation $\alpha(W)$.

Cela résulte immédiatement de la définition de α . Des propositions 3 et 6 il résulte que, si L est une variété d'appui à W , la facette d'un point $M \in L \cap W$, relativement au convexe W n'est autre que sa facette relativement au convexe $L \cap W$.

Nous allons maintenant étudier le cas des convexes de la sphère.

DÉFINITION 4. — Soit k une partie convexe de $S(E)$; $k' = F(k) + \{O\}$ est un convexe de E ; $\alpha(k')$ (cf. § 1, déf. 1) induit sur $F(k)$ une relation de préordre compatible avec la projection sur k . Nous noterons $\alpha(k)$ la relation de préordre ainsi définie sur k .

La relation d'équivalence associée à la relation $\alpha(k)$ se note $F(\alpha(k))$; les classes d'équivalence correspondantes sont appelées k -facettes et la relation de préordre α définit canoniquement sur l'ensemble des facettes une relation d'ordre que nous noterons aussi α .

La relation $\alpha(k)$ peut être définie directement :

$$a \alpha(k) b$$

s'il existe un segment $(a', b) \subset k$ tel que $a \in]a', b[$ ou si a et b sont identiques ou diamétralement opposés.

DÉFINITION 5. — Soit L le sous-espace vectoriel facette de O dans le convexe $k' = F(k) + \{O\}$; la projection sur k de $L - \{O\}$ est une sous-variété linéaire, éventuellement vide, ensemble de tous les points de $S(E)$ qui appartiennent à k avec leur point diamétralement opposé. Cette sous-variété est appelée le *noyau* de k . Un convexe strict est un convexe de noyau vide (cf. § 1, déf. 9).

Les propositions 2, 3, 4 et le corollaire sont valables pour les convexes de $S(E)$. La proposition 1 aussi, si l'on convient d'appeler topologie localement convexe la plus fine sous-variété l de $S(E)$ la topologie quotient de celle induite sur $F(l)$ par la topologie localement convexe la plus fine de $F(l) + \{O\}$.

DÉFINITION 6. — Une variété linéaire l est dite *variété d'appui pour k* s'il existe un sous-espace vectoriel L de E , variété d'appui de $F(k) + \{O\}$, et

$$l = F^{-1}(L - \{O\}).$$

En particulier, le noyau de k est une variété d'appui de k . Si ce noyau est vide, il constitue une variété d'appui, ou encore une facette, de k de dimension (-1) .

Les propositions 5 et 6 sont également valables pour les convexes de $S(E)$.

2. Sommes de convexes. — Comme au précédent paragraphe, on étudie le cas affín, puis le cas projectif.

DÉFINITION 1. — Soient E un espace vectoriel, W un convexe de E , $V_i (i \in I)$ une famille finie de convexes de E , p l'application de $\prod_{i \in I} V_i$ dans E défini par

$$\{x_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i, \quad p(\{x_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} x_i,$$

W est dit *somme des convexes* V_i si p est un isomorphisme de $\prod_{i \in I} V_i$ sur W (pour les structures affines). Nous noterons

$$W = \sum_{i \in I} V_i \quad \text{ou} \quad W = V_1 + V_2 + \dots + V_n.$$

Si $x \in W$, $x_i \in V_i$, $x = \sum x_i$, nous dirons que x_i est la composante de x dans V_i

REMARQUE. — E opère par translation sur l'ensemble $K(E)$ des parties convexes de E ; on peut définir le quotient $K(E)/E$; nous dirons qu'une classe $\omega \in K(E)/E$ est somme de n classes ν_i si l'on peut trouver W, V_i de classes ω, ν_i tels que W soit la somme des V_i : dans ce cas, à tout système de n convexes V'_i de classes ν_i correspond un convexe et un seul W' de classe ω , qui en est la somme; à tout convexe W' de classe ω , on peut (et ce d'une infinité de façons si $n \neq 1$) faire correspondre une famille de n convexes V'_i de classe ν_i dont W' soit la somme.

On a le résultat plus précis suivant :

PROPOSITION 1. — Soient $\omega, \nu_i \in K(E)/E$; $\sum_{i=1}^n \nu_i = \omega$ et W de classe ω contenant l'origine de E ; alors il existe un système et un seul de n convexes V_i de classes ν_i contenant chacun l'origine, et tels que

$$W = \sum_{i=1}^n V_i.$$

En effet, supposons déterminés des V'_i tels que

$$W = \sum_{i=1}^n V'_i,$$

On a une décomposition unique de O comme somme de n vecteurs $x'_i \in V_i$. Les seuls convexes V_i , de somme W , contenant l'origine et de classe ν_i ne sont autres que les

$$V_i + \{-x'_i\}.$$

Dans ce qui suit, nous considérerons toujours, pour la commodité des démonstrations, les décompositions de convexes contenant l'origine en somme de convexes contenant l'origine.

Aux théorèmes 1 et 2 qui suivent correspondront des énoncés analogues pour l'espace $K(E)/E$.

REMARQUE. — Pour I infini, on peut encore définir la notion de convexe W somme d'une famille de convexes V_i : on supposera que W et les V_i contiennent l'origine, et l'on dira que $W = \sum_{i \in I} V_i$ si tout $x \in W$ s'écrit d'une façon et d'une seule comme une somme finie,

$$x = \sum_{i \in N \subset I} x_i \quad (x \neq 0)$$

(où N désigne une partie finie de I).

La composante de x dans V_j ($j \notin N$) est 0.

REMARQUE. — Soient $W = E$, $V_i = E_i$ sous-espace vectoriel de E , $W = \sum V_i$ au sens ci-dessus défini : alors on a $E = \sum E_i$, somme directe des E_i , pour les sous-espaces vectoriels la notion de somme de convexes coïncide avec celle de somme directe ordinaire.

PROPOSITION 2. — Soit

$$W = \sum_{i \in I} V_i \quad \left(x, y \in W; x_i, y_i \in V_i; x = \sum x_i, y = \sum y_i \right).$$

on a $x \alpha(W) y$ (cf. déf. 1) si et seulement si l'on a pour tout i : $x_i \alpha(V_i) y_i$.

La démonstration est évidente à partir des définitions.

Dans ce qui suit, nous étudierons des corps convexes comme polycylindre, c'est-à-dire comme somme de deux ou plusieurs convexes contenus dans des sous-espaces supplémentaires.

DÉFINITION 2. — Soient E un espace vectoriel, W un convexe de E contenant l'origine; on dit qu'un sous-espace vectoriel L de E fibre W si l'intersection de tout translaté L' de L avec W est, soit \emptyset , soit un translaté de $L \cap W$.

DÉFINITION 3. — Soit W un convexe de E , engendrant E , et contenant l'origine; on dit qu'un sous-espace L de E fibre W cylindriquement, ou encore que L est distingué relativement à W , s'il existe un sous-espace L' de E , supplémentaire de L , et tel que

$$W = L \cap W + L' \cap W.$$

REMARQUE. — Si L fibre W (resp. fibre cylindriquement W), L fibre (resp. fibre cylindriquement) tout translaté de W contenant l'origine.

PROPOSITION 3. — 1° Si W ne contient aucune demi-droite, tout sous-espace L qui fibre W le fibre cylindriquement;

2° Si W ne contient aucune droite, à tout L qui fibre cylindriquement W correspond un L' et un seul qui soit supplémentaire de L et tel que

$$W = L \cap W + L' \cap W.$$

La correspondance entre L et L' est une involution sur l'ensemble des sous-espaces distingués relativement à W .

Cette proposition légitimera la

DÉFINITION 4. — On dit que deux sous-espaces L et L' sont conjugués relativement au convexe W si

$$W = L \cap W + L' \cap W.$$

Démontrons maintenant la proposition :

1° Désignons par U' l'ensemble des homologues de l'origine dans tous les translatsés de $U = L \cap W$ contenus dans W . Puisque L fibre W par hypothèse, il est clair que $U + U' = W$ et que U' est convexe. Reste à montrer que le support L' de U' est supplémentaire du support L de U : cela va résulter de ce que tout vecteur de W s'écrit d'une manière unique comme somme d'un vecteur de U et d'un vecteur de U' .

En effet, si un convexe C ne contient aucune demi-droite, il n'existe pas de translation t autre que la translation nulle, qui transforme C en un convexe $t(C) \subset C$.

Soit $w \in W$: il existe donc un translaté et un seul $U(w)$ de U tel que $w \in U(w) \subset W$.

2° Soit $w \in W$: il existe un translaté et un seul $L(w)$ de L tel que $w \in L(w)$.

$L(w) \cap W$ est un translaté $U(w)$ de $U = L \cap W$; nous allons montrer qu'il existe une translation unique faisant passer de U à $U(w)$: il en résultera qu'un convexe U' de support L' supplémentaire de L et tel que $U' + U = W$, ne peut être que l'ensemble des homologues de l'origine dans les translations $U(w)$ de U .

Or, si un convexe C ne contient aucune droite, il n'existe pas de translation t non nulle qui transforme C en un convexe $t(C) = C$.

Soit $w \in W$, il existe une translation et une seule qui transforme U en $U(W)$.

THÉORÈME 1. — Soient W un convexe de E contenant l'origine O , engendrant E , et ne contenant aucune droite, L et L' , D et D' deux couples de sous-espaces distingués conjugués relativement à W . Alors $L \cap D$ et $L' \cap D$ sont conjugués relativement à $W \cap D$.

Désignons par P_L (resp. $P_{L'}$, P_D , $P_{D'}$) la projection sur L (resp. L' , D , D') parallèlement à L' (resp. L , D' , D) ; la démonstration repose sur le

LEMME. — Soient a et b deux éléments tels que b et $a + b$ appartiennent à W . Alors

$$u = P_L(a) + b \in W.$$

En effet, on a

$$P_L(u) = P_L(a) + P_L(b) = P_L(a + b) \in W,$$

$$P_{L'}(u) = P_{L'}(b) \in W,$$

d'où

$$u = P_L(u) + P_{L'}(u) \in W.$$

Soit $a \in W \cap D$, nous allons montrer que $P_L(a)$ et $P_{L'}(a)$ appartiennent à D , ce qui prouvera que

$$W \cap D = P_L(W \cap D) + P_{L'}(W \cap D)$$

d'où le théorème.

On a

$$P_{D'} P_L(a) + P_{D'} P_{L'}(a) = P_{D'}(a) = 0.$$

Nous allons montrer que $D' \cap W$ est stable par les translations opposées $P_{D'} P_L(a)$ et $P_{D'} P_{L'}(a)$, d'où résultera la nullité de ces translations.

En effet, soit $w \in D' \cap W$; on a

$$a + w \in D \cap W + D' \cap W = W,$$

d'où, d'après le lemme,

$$P_{L'}(a) + w \in W$$

et, en appliquant le lemme cette fois à $P_{D'}$,

$$P_{D'} P_{L'}(a) + w \in D' \cap W.$$

On voit de même que

$$P_{D'} P_L(a) + w \in D' \cap W,$$

ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE. — Soient W un convexe de E contenant O , engendrant E , ne contenant aucune droite, (L, L') , (D, D') deux couples de sous-espaces conjugués relativement à W , P_L (resp. $P_{L'}$, P_D , $P_{D'}$) la projection sur L (resp. L' , D , D') parallèlement à L' (resp. L , D' , D) : P_L , $P_{L'}$, P_D , $P_{D'}$ commutent deux à deux, et l'on a

$$\text{Identité} = P_L P_D + P_L P_{D'} + P_{L'} P_D + P_{L'} P_{D'}.$$

D'après le théorème 1, tout point de $V = D \cap W$ s'écrit d'une façon et d'une seule comme somme d'un point de $L \cap D \cap W$ et d'un point de $L' \cap D \cap W$. De même, tout point de V' s'écrit d'une manière et d'une seule comme

somme d'un point de $L \cap D' \cap W$ et d'un point de $L' \cap D' \cap W$. Tout point de W s'écrit de manière unique comme somme de points de

$$L \cap D \cap W; \quad L' \cap D \cap W; \quad L \cap D' \cap W; \quad L' \cap D' \cap W.$$

La projection correspondante sur $L \cap D \cap W$ n'est autre que $P_L P_D$ ou $P_D P_L$ par raison de symétrie. D'où le corollaire.

De là on déduit aussitôt le

THÉORÈME 2. — *Soit W un convexe de E contenant l'origine, engendrant E et ne contenant aucune droite: l'ensemble des sous-espaces distingués relativement à W peut être considéré comme une algèbre de Boole, dont l'élément 1 est E et l'élément 0 l'origine (considéré comme sous-espace de dimension 0); on prend comme complémentaire le conjugué; comme inf l'intersection, comme sup le produit.*

COROLLAIRE. — Si E est de dimension finie n , l'algèbre de Boole des sous-espaces distingués relativement à W n'est autre que l'algèbre des parties d'un ensemble fini dont le cardinal est compris entre 1 et n (1 correspond à la sphère, n au cube).

Tout sous-espace distingué est obtenu d'une façon et d'une seule comme somme d'une famille de sous-espaces distingués simples [c'est-à-dire minimaux parmi ceux différents de 0].

Nous allons maintenant étudier la notion de somme pour les convexes de la sphère projective $S(E)$ associée à l'espace vectoriel E .

DÉFINITION 5. — Soient ω un convexe de $S(E)$, de noyau vide, $\{\nu_i\}$ une famille finie de convexes de $S(E)$; ω est dit *somme* des convexes ν_i si les $F(\nu_i)$ sont convexes et si $F(\omega)$ est somme des convexes $F(\nu_i)$.

En particulier, soient ω, ν_1, ν_2 trois convexes non vides de $S(E)$. Soit l_1, l_2 les supports de ν_1, ν_2 , c'est-à-dire les plus petites variétés linéaires contenant ν_1 et ν_2 respectivement. ω est somme de ν_1 et ν_2 si $l_1 \cap l_2$ est vide et si ω est réunion de l'ensemble de tous les segments ouverts joignant un point de ν_1 à un point de ν_2 . On convient que ω est somme de ω et du convexe vide.

DÉFINITION 6. — Soit ω un convexe de $S(E)$ dont le support est $S(E)$ et le noyau \emptyset . Un sous-espace l est *distingué relativement à ω* s'il existe un sous-espace l' tel que ω soit somme de deux convexes ν et ν' de supports l et l' .

La donnée du sous-espace distingué l détermine complètement le sous-espace distingué l' ; l et l' sont dits *conjugués* relativement à ω .

THÉORÈME 3. — *Soit ω un convexe de $S(E)$ de support $S(E)$, de noyau vide; l'ensemble des sous-variétés distinguées relativement à ω peut être considéré comme une algèbre de Boole dont l'élément (1) est $S(E)$ et l'élément (0) la partie vide. On prend comme complémentaire la conjuguée, comme inf l'intersection, comme sup l'enveloppe convexe.*

COROLLAIRE. — Si E est de dimension finie ($n + 1$), l'algèbre de Boole des sous-variétés distinguées relativement à ω n'est autre que l'algèbre des parties d'un ensemble fini dont le cardinal est compris entre 1 et $(n + 1)$. [1 correspond au cas où il n'existe pas de décomposition non triviale, $(n + 1)$ au cas du n -simplexe ouvert de la sphère à n dimensions $S(E)$].

Toute sous-variété distinguée est obtenue d'une façon et d'une seule comme enveloppe convexe d'une famille de sous-variétés distinguées simples, c'est-à-dire minimales parmi celles distinctes de la partie vide.

Pour justifier la définition 6 et démontrer le théorème 3 et son corollaire, il suffit de se reporter aux énoncés correspondants formulés dans le cas affín.

PROPOSITION 4. — Soient ω un ouvert convexe de $S(R^{n+1}) = S(n)$, de noyau vide, l_i les p sous-variétés distinguées simples relatives à ω , v_i les convexes de l_i dont ω est la somme; on peut écrire avec les notations du chapitre 1, paragraphes 1 et 2

$$\omega = F^{-1}(F(v_1) \times \dots \times F(v_p))$$

tout automorphisme projectif de ω est un automorphisme compatible au sens du chapitre 1, paragraphe 3, définition 2.

En effet, un automorphisme projectif de ω est un élément de $GP(n, R)$ qui permute entre elles les variétés distinguées simples.

PROPOSITION 5. — Avec les notations de la proposition 4, ω est balayable (resp. homogène) si et seulement si les v_i le sont.

Cette proposition résulte de la précédente et de la proposition 4 du chapitre 1, paragraphe 3.

COROLLAIRE. — Soit ω un ouvert convexe de $S(R^{n+1})$ de noyau vide, somme de p convexes $v_1, \dots, v_i, \dots, v_p$. ω est balayable (resp. homogène) si et seulement si les v_i le sont.

DÉMONSTRATION. — On se ramène à une décomposition de ω en somme de convexes contenus dans des variétés distinguées simples et l'on applique la proposition précédente.

3. Dualité des corps convexes — Nous allons définir cette dualité en introduisant successivement les hypothèses nécessaires :

a. Soient E, E' deux espaces vectoriels. Supposons définie sur $E \times E'$ une forme bilinéaire que nous noterons

$$\langle m, m' \rangle, \quad m \in E, \quad m' \in E'$$

Nous allons définir au moyen de cette forme bilinéaire une application D de $K(S(E))$ dans $K(S(E'))$ et une application D' de $K(S(E'))$ dans $K(S(E))$.

Soit $W \in K(S(E))$; nous poserons (pour la définition de s , voir § 1, chap. 1, déf. 3)

$$D(W) = s \{ m' \mid \langle m, m' \rangle \geq 0, \forall m \in F(W); m' \neq 0 \}.$$

et, de même pour $W' \in K(S(E'))$,

$$D'(W') = s \{ m' \mid \langle m, m' \rangle \geq 0, \forall m' \in F(W'); m \neq 0 \}.$$

Il est clair que $F \circ D(W)$ est un cône convexe de sommet origine dans E' et l'on a bien défini une application de $K(S(E))$ dans $K(S(E'))$.

Soit $W_1 \subset W_2$ deux éléments de $K(S(E))$; on a $D(W_2) \subset D(W_1)$.

b. Supposons maintenant que E (resp. E') soit muni d'une topologie localement convexe séparée et que la forme bilinéaire introduite en (*a*) soit séparément continue en chacune des variables.

Désignons par $C(S(E))$ l'ensemble des convexes fermés de la sphère $S(E)$ d'un espace vectoriel topologique E : D envoie $C(S(E))$ dans $C(S(E'))$ et, de même, D' envoie $C(S(E'))$ dans $C(S(E))$.

c. Supposons vérifiées les hypothèses de (*a*) et (*b*) et supposons de plus que la forme bilinéaire définie sur $E \times E'$ permette d'identifier E' à l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel topologique E . Alors $D' \circ D$ induit l'identité sur $C(S(E))$.

En effet, soit $W \in C(S(E))$; $F(W) \cup \{O\}$ est un cône convexe fermé de E , il est donc l'intersection des demi-espaces fermés qui le contiennent (*cf.* BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. II, § 3, corollaire 1 de la proposition 4). On voit facilement que $F(W)$ est l'intersection d'une famille de demi-espaces fermés limités à un hyperplan contenant l'origine, c'est-à-dire définis par une équation

$$\langle m, m' \rangle \geq 0$$

[si un demi-espace fermé contient $F(W)$, l'intersection de tous les homothétiques de ce demi-espace par rapport à l'origine dans un rapport positif contient $F(W)$].

Le résultat annoncé en résulte.

d. Nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 1. — Soient E, E' deux espaces vectoriels topologiques semi-réflexifs mis en dualité par une application bilinéaire notée $\langle m, m' \rangle$, $m \in E$, $m' \in E'$. la correspondance D définie en (*a*) est une application biunivoque de $C(S(E))$ sur $C(S(E'))$, et D' est l'application réciproque.

Cela résulte de la

PROPOSITION 2.

1° Sous les hypothèses de (*b*), on a $D(W) = D(\overline{W})$;

2° Sous les hypothèses de (*d*), on a $D' \circ D(W) = \overline{W}$.

DÉMONSTRATION. — 1° Il suffit de montrer que $D(W) \subset D(\overline{W})$: cela résulte de ce que toute forme linéaire positive ou nulle sur $F(W)$ est positive ou nulle sur sa fermeture ;

2° On a $D(W) = D(\overline{W})$ et $D' \circ D = \text{identité}$ pour tout convexe de $C(S(E))$ tel que \overline{W} .

PROPOSITION 3. — Soient E un espace vectoriel topologique, E' l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E , $\langle M, M' \rangle$ la forme bilinéaire sur $E \times E'$ qui à $M' \in E'$, $M \in E$ associe la valeur sur M de la forme linéaire M' . D' met en correspondance biunivoque les hémisphères fermés de $S(E)$ et les points de $S(E')$.

En effet, soit $m \in S(E')$; soit $M \in F(m) \subset E'$. $D'M$ n'est autre que l'hémisphère fermé de E , fermeture de l'hémisphère ouvert d'équation M (cf. chap. 1, § 1, déf. 5).

Réciproquement, soit H un hémisphère ouvert de $S(E)$, soit $M \in E'$ une équation de H , on a

$$\overline{H} = D' \circ sM.$$

La proposition ci-dessus permet de donner une définition géométrique de D : c'est l'objet de la

PROPOSITION 4. — Supposons vérifiées les hypothèses de (d) : soit $W \in C(S(E))$: $D(W)$ n'est autre que l'ensemble des points M' de $S(E')$ tels que W soit contenu dans l'hémisphère fermé $D(\{M'\})$.

PROPOSITION 5. — Plaçons-nous sous les hypothèses de (a) : Soit W une variété linéaire ; alors D est une variété linéaire.

La proposition résulte facilement de la définition de D .

Nous supposons maintenant que $E = R^{n+1}$; $S(E) = S(n)$. R^{n+1} est muni d'un produit scalaire qui permet de l'identifier à son dual. Soit $M = (m_0, \dots, m_i, \dots, m_n)$, avec $m_i \in R$, $N = (n_0, \dots, n_i, \dots, n_n)$.

On pose $\langle M, N \rangle = \sum_{i=0}^n m_i n_i$.

PROPOSITION 6. — Soit L une sous-variété linéaire de dimension p de $S(n)$ ($-1 \leq p \leq n$), $D(L)$ est une sous-variété linéaire de dimension $(n - p - 1)$.

En effet, $F(L) \cup \{O\}$ est un sous-espace R^{n+1} de dimension $(p + 1)$, et $F(DL) \cup \{O\}$ un sous-espace de dimension $(n - p)$.

PROPOSITION 7. — Soit $W \in C(S(n))$; désignons par $\nu(W)$ la dimension de son noyau, par $\sigma(W)$ la dimension de son support (c'est-à-dire de la plus

petite variété linéaire contenant W). D transforme le noyau (resp. support) de W dans le support (resp. noyau) de $D(W)$ et l'on a

$$\begin{aligned}\sigma(W) + \nu(D(W)) &= n - 1, \\ \nu(W) + \sigma(D(W)) &= n - 1.\end{aligned}$$

la proposition résulte facilement de ce que D inverse les relations d'inclusion et de la proposition précédente.

PROPOSITION 8. — Le dual d'un corps convexe de $S(n)$ est un convexe.

Un corps convexe de $S(n)$ (cf. chap. 1, § 1, déf. 11) est un convexe formé W tel que $\sigma(W) = n$; $\nu(W) = -1$.

Les corps convexes ne sont autres que les convexes fermés d'intérieur non vide, et de noyau vide.

La proposition résulte immédiatement de la proposition 7.

PROPOSITION 9. — Soit $A \in \mathcal{C}(S(n))$ un convexe fermé de $S(n)$, $H = D(\{M\})$ un hémisphère fermé de $S(n)$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{aligned}1^\circ \quad A &\subset \overset{\circ}{H}; \\ 2^\circ \quad M &\in \overset{\circ}{DA}.\end{aligned}$$

La sphère de rayon 1 de R^{n+1} est une section de $R^{n-1} - \{O\}$ au-dessus de $S(n)$.

Pour démontrer la proposition, nous identifierons $S(n)$ avec cette sphère munie de sa métrique géodésique.

La propriété 1° peut s'énoncer ainsi : A est contenu dans une boule B de centre M et de rayon $\frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. La propriété 1° est équivalente à

$$D(B) \subset A.$$

Or $(D(B))$ n'est autre que la boule du centre M et de rayon ε . Donc, la propriété 1° est équivalente à la propriété 2°.

COROLLAIRE. — Si A est un corps convexe de $S(n)$, on peut trouver un hémisphère ouvert de $S(n)$ contenant A .

PROPOSITION 10. — Soient A, B des convexes fermés : $A, B \in \mathcal{C}(S(n))$.

$$A \subset \overset{\circ}{B} \quad \text{entraîne} \quad D(B) \subset \overset{\circ}{D(A)}$$

et réciproquement.

Puisque $D \circ D = \text{Identité}$, la réciproque se change en la proposition en posant

$$D(A) = B', \quad D(B) = A'.$$

Démontrons que $A \subset \overset{\circ}{B}$ entraîne $D(B) \subset \overset{\circ}{D(A)}$. On a

$$D(A) = \bigcap_{M \in A} D(\{M\}),$$

$$\overset{\circ}{D(A)} = \bigcap_{M \in A} \overset{\circ}{D(\{M\})}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit donc d'établir que pour tout $M \in A$, $D(B) \subset D(\{M\})$. Or cela résulte de la proposition précédente.

Quand, au chapitre suivant (*cf.* chap. 4. § 1, prop. 9 et 11), nous aurons défini la topologie de $E(n)$, de la proposition 10 résultera la

PROPOSITION 11. — D est un automorphisme topologique de $E(n)$.

REMARQUE. — Puisque R^n est canoniquement identifié à son dual, la représentation duale de $GL(n, R)$ est un automorphisme de $GL(n, R)$: la transposition. Cet automorphisme induit un automorphisme de $GS(n-1, R)$, que nous noterons Δ ; Δ peut s'exprimer au moyen de la dualité D des parties convexes fermées de $S(n-1)$.

Soit $g \in (GS(n-1, R))$, $\Delta(g) \in GS(n-1, R)$; $W \in \mathcal{C}(S(n-1))$; on a

$$\Delta(g)W = D \circ g \circ DW.$$

En effet, cette formule est équivalente à la définition de Δ , quand W est un point ou un hémisphère.

4. Contingent des ensembles convexes.

DÉFINITION 1. — Soient E un espace vectoriel, $W \in \mathcal{K}(S(E))$, $a \in W$, a' le point diamétralement opposé à a . On appelle *cône d'appui* en a à W le plus petit convexe de $S(E)$ contenant W et a' : on le note W_a .

On peut donner de cette définition deux autres énoncés équivalents.

DÉFINITION 1'. — W_a est la réunion des demi-droites de $S(E)$ qui joignent a au point diamétralement opposé a' et rencontrent W en un point distinct des extrémités a et a' .

DÉFINITION 1''. — Soit A un point de $F(W)$ se projetant sur W suivant a : $F(W_a) \cup \{O\}$ est l'ensemble des vecteurs de E qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de $F(W)$ et d'un vecteur multiple de A par un nombre réel

$$F(W_a) \cup \{O\} = \{M : \exists \lambda \in R; \exists P \in F(W); M = \lambda A + P\}.$$

DÉFINITION 2. — On appelle *contingent* à un convexe fermé W en un de ses points a la fermeture du cône d'appui W_a .

PROPOSITION 1. — Soient $W \in K(S(E))$, $a, b \in W$, a', b' les points diamétralement opposés à a et b .

Si $b \neq a, b' \neq a'$, les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $a \alpha(W)b$;

(2) Sur la droite qui joint a et b , chacune des deux demi-droites délimitées par a et a' rencontre W ;

(3) $b' \in W_a$;

(4) $W_b \subset W_a$.

Si $b = a$ ou $b = a'$, les propriétés (1), (3), (4) sont équivalentes.

Supposons d'abord $b \neq a, b' \neq a'$. L'équivalence des propriétés (1) et (2) résulte immédiatement de la définition de $\alpha(W)$ (cf. § 2 déf. 3).

L'équivalence des propriétés (2) et (3) apparaît si l'on utilise la définition (1') de W_a .

L'équivalence des propriétés (3) et (4) apparaît si l'on utilise la définition (1) de W_a .

Dans les cas $b = a$ ou $b = a'$, l'assertion de la proposition est évidente.

PROPOSITION 2. — Soient E, E' deux espaces vectoriels. On suppose définie une forme bilinéaire sur le produit $E \times E'$ [cf. § 3, a)]. Soit $W \subset K(S(E))$, $a \in W$, on a

$$D(W_a) \subset D(W),$$

et si

$$m'_1 \in D(W_a), \quad m'_2 \in D(W) \quad \text{et} \quad m'_1 \alpha(D(W)) m'_2,$$

alors

$$m'_2 \in D(W_a).$$

DÉMONSTRATION. — Soit A un point de $F(W)$ se projetant en a . On peut trouver M'_1, M'_2 se projetant en m'_1, m'_2 tels que $M'_1 = M'_2 + M'_3$, où $M'_3 \in F \circ D(W)$. $F \circ D(W_a)$ peut être ainsi défini

$$F \circ D(W_a) \cup \{O\} = \{M' \mid \langle AM' \rangle = 0; \langle MM' \rangle \geq 0, \forall M \in F(W)\}.$$

Rappelons la définition de $F \circ D(W)$

$$F \circ D(W) \cup \{O\} = \{M' \mid \langle MM' \rangle \geq 0, \forall M \in F(W)\}.$$

Pour démontrer la proposition, il suffit d'établir que $\langle AM'_2 \rangle = 0$. Or on a

$$\begin{aligned} \langle AM'_2 \rangle &\geq 0, \\ \langle AM'_3 \rangle &\geq 0, \\ \langle AM'_2 \rangle + \langle AM'_3 \rangle &= \langle AM'_1 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte

$$\langle AM'_2 \rangle = 0,$$

d'où la proposition.

Nous supposons maintenant que l'espace E est R^{n+1} , canoniquement identifié à son dual au moyen de la forme $\sum_i x_i y_i$.

DÉFINITION 3. — Soient m, p deux points de $S(n)$; M, P deux points de $R^{n+1} - \{O\}$ se projetant sur m et p . Si $\langle M, P \rangle = 0$, nous écrirons encore $\langle m, p \rangle = 0$. Il est clair que cette définition ne dépend pas du choix de M et de P et qu'elle est symétrique en m et p .

On peut encore l'énoncer :

$\langle m, p \rangle = 0$ si et seulement si $D(\{p\})$ contient m et le point diamétralement opposé à m .

PROPOSITION 3. — Soit a un point de $S(n)$; $W \in K(S(n))$; alors

$$D(W_a) = \{m \mid m \in D(W), \langle m, a \rangle = 0\}.$$

En effet,

$$D(W_a) = D(\overline{W}_a)$$

et le contingent \overline{W}_a n'est autre que l'intersection de la famille des hémisphères fermés contenant W et le point diamétralement opposé à a .

PROPOSITION 4. — Soient m, m', p, p' quatre points de $S(n)$, entre lesquels on suppose vérifiées les relations

$$m \alpha(W)m'; \quad p \alpha(D(W))p'; \quad \langle m, p \rangle = 0.$$

Alors

$$\langle m', p' \rangle = 0.$$

Par raison de symétrie, il suffit de démontrer

$$\langle m', p \rangle = 0.$$

Or cela résulte immédiatement des propositions 1 et 3.

La proposition 3 permet d'ailleurs d'établir l'équivalence entre la proposition 2 et l'assertion $\langle m, p' \rangle = 0$.

Sur $S(n)$, la proposition 2 peut donc être démontrée comme un corollaire de la proposition 1.

DÉFINITION 4. — Soient F une facette de W , F' une facette de $D(W)$, nous dirons qu'est vérifiée la relation

$$\langle F, F' \rangle = 0$$

si pour tout point m de F et tout point m' de F' on a

$$\langle m, m' \rangle = 0.$$

D'après la proposition précédente, s'il existe m dans F et m' dans F' tels que $\langle m, m' \rangle = 0$, on a $\langle F, F' \rangle = 0$.

PROPOSITION 5. — Soient F_1, F_2 (resp. F'_1, F'_2) deux facettes de W [resp. de $D(W)$] telles que soient vérifiées les relations

$$F_1 \alpha(W) F_2; \quad F'_1 \alpha(D(W)) F'_2;$$

$$\langle F_1, F'_1 \rangle = 0.$$

Alors, on a

$$\langle F_2, F'_2 \rangle = 0.$$

La proposition 5 est un corollaire de la proposition 4.

PROPOSITION 6. — Soient $W \in K(S(n))$, F une facette de W , $a \in F$, $D(W_a)$ est la fermeture d'une facette de $D(W)$ qui ne dépend pas du choix de a et que nous noterons $\omega(F)$.

En effet, considérons un point a' intérieur au convexe $D(W_a)$ muni de la topologie induite par celle de son support, $\omega(F)$ n'est autre que la facette de a' .

PROPOSITION 7. — Soient F une facette de W , F' une facette de $D(W)$ telles que

$$\langle F, F' \rangle = 0.$$

Alors, on a

$$\omega(F) \alpha(D(W)) F'.$$

Nous dirons que $\omega(F)$ est la facette minimale (au sens de α) parmi celles F' qui vérifient $\langle F, F' \rangle = 0$. Du point de vue ensembliste, notons que $\overline{\omega(F)}$ contient toutes les facettes F' telles que $\langle F, F' \rangle = 0$.

La correspondance ω n'est pas nécessairement biunivoque, mais voici quelques propriétés de ω :

PROPOSITION 8.

$$\omega \circ \omega \circ \omega = \omega.$$

DÉMONSTRATION. — $\omega \circ \omega(F)$ n'est autre que la facette de W minimale au sens de α parmi celles F_i qui vérifient $\langle F_i, \omega(F) \rangle = 0$.

$\omega \circ \omega \circ \omega(F)$ est la facette de $D(W)$ minimale parmi celles F' qui vérifient $\langle \omega \circ \omega(F), F' \rangle = 0$.

Or, $\omega(F)$ est minimale parmi celles F' vérifiant $\langle F, F' \rangle = 0$, donc *a fortiori* parmi celles vérifiant $\langle \omega \circ \omega(F), F' \rangle = 0$.

PROPOSITION 9. — Une facette F vérifie $\omega \circ \omega(F) = F$ si et seulement si \overline{F} est l'intersection de W avec un hyperplan.

DÉMONSTRATION. — Si $\omega \circ \omega(F) = F$, soit $p \in \omega(F)$, \overline{F} n'est autre que l'intersection de W avec l'hyperplan frontière de $D(\{p\})$.

Réciproquement, si $\overline{F} = W \cap h$, où h est l'hyperplan frontière de $D(\{p\})$, $p \in W$, F est transformée par ω de la facette F' de p , donc

$$\omega \circ \omega(F) = \omega \circ \omega \circ \omega(F') = \omega(F') = F.$$

Donnons un exemple de corps convexe possédant une facette qui n'est pas l'intersection du corps avec un hyperplan.

Nous nous placerons sur $S(2)$ identifié à la sphère unité de R^3 et muni de la métrique géodésique.

Soient a, b deux points dont la distance est 1; nous prendrons pour W le plus petit convexe fermé contenant les deux cercles de centres a et b et de rayon $\frac{1}{4}$.

La frontière de W se compose de deux arcs de cercle et de deux segments de droite, soit p un des quatre points où se raccordent un segment et un arc, $\{p\}$ une facette qui ne peut être obtenue comme intersection de W et d'une droite.

DÉFINITION 5. — Une facette F d'un convexe fermé W est dite *conique* si le noyau du contingent en un point de cette facette n'est autre que le support de la facette.

PROPOSITION 10. — Soient W un corps convexe, F une facette conique de W , L son support; le contingent à W en un point de F s'identifie à un corps convexe de $S(n)/L$.

Parce que W est d'intérieur non vide, il en est de même du contingent considéré comme partie de $S(n)/L$; que le noyau de cette partie soit vide résulte de ce que F est conique.

DÉFINITION 6. — Soit F une facette conique de support L d'un corps convexe de W ; soit L' une sous-variété linéaire de $S(n)$ telle que $S(n)$ soit somme de L et de L' au sens de la définition 6 du paragraphe 2 [$L \cap L' = E$, $S(n)$ enveloppe convexe de L et L']. L'intersection de L' avec le contingent à W en un point de F est appelée base dans L' de la facette conique F .

REMARQUE. — Supposons données p sous-variétés linéaires $L_1, \dots, L_i, \dots, L_p$ dont $S(n)$ soit la somme. Soient $W_1, \dots, W_i, \dots, W_p$ des corps convexes de $L_1, \dots, L_i, \dots, L_p$ (W_i convexe fermé d'intérieur non vide pour la topologie de L_i). La fermeture de la somme des W_i est un corps convexe de $S(n)$ dont les W_i sont des facettes coniques.

5. Sur les convexes, réunions de deux convexes disjoints. — Le but de ce paragraphe et de démontrer les théorèmes 1 et 1' qui concernent l'espace affín et la sphère projection de dimension finie.

Plusieurs des résultats intermédiaires sont indépendants de la dimension; nous les démontrons donc sans faire d'hypothèses restrictives.

DÉFINITION 1. — Soit W un convexe dans un espace vectoriel; $V \subset W$: on dit que V possède relativement à W la propriété I si V et $W - V$ sont tous deux convexes, et l'on écrira: $I(V, W)$.

PROPOSITION 1. — Si la réunion W de deux convexes U et V est convexe, l'une des variétés support est contenue dans l'autre.

D'une façon plus précise : ou bien tout point de U est aligné avec deux points distincts de V , ou bien tout point de V est aligné avec deux points distincts de U .

DÉMONSTRATION. — Si l'on écarte la première éventualité, il existe $a \in U$ tel que pour tout point $b \in V$ le segment demi-ouvert $]a, b]$ soit contenu dans U ; donc b est aligné avec deux points distincts de U .

PROPOSITION 2. — Soient W un convexe dans un espace vectoriel, V une partie convexe non vide de W telle que $I(V, W)$; la variété linéaire L engendrée par V est une variété d'appui de W .

Soit B un point de $L \cap W$; nous allons montrer qu'il existe un point A de V tel que $A \alpha B$: en effet, B appartient à une sous-variété linéaire de dimension finie engendrée par des points $A_1, \dots, A_i, \dots, A_n$ de V : si A est un point intérieur à l'enveloppe convexe des A_i pour la topologie de son support, il est clair que $A \in V$ et $A \alpha B$.

Soit maintenant $B \in W$ tel qu'il existe $A \in L \cap W$, avec $A \alpha B$: d'après ce qui vient d'être démontré, on peut supposer que $A \in V$: pour démontrer la proposition, il faut établir que $B \in L$; ceci est évident si $B \in V$; nous considérons sur la droite AB un point A' tel que $A \in]A', B[$; on a certainement $A' \in V$: en effet, si A' appartient à $W - V$, (A', B) est contenu dans $(W - V)$, puisque cet ensemble est convexe, et A ne peut appartenir à V . Il en résulte que la droite AB est contenue dans L .

PROPOSITION 3. — Soit L une variété d'appui de W : $\bigcup L \cap W$ est convexe.

Soit C une partie convexe de $L \cap W$: $(W \cap \bigcup L) \cup C$ est convexe.

Il suffit de montrer que quels que soient

$$A \in (W \cap \bigcup L) \cup C \quad \text{et} \quad B \in W \cap \bigcup L,$$

l'ensemble $]A, B[\cap L$ est vide : en effet, si $C \in]A, B[\cap L$, on a $C \alpha B$, donc, d'après la définition de la variété d'appui L , $B \in L$.

PROPOSITION 4. — Soit V une partie convexe non vide de W convexe : il est équivalent de dire que V possède la propriété I relativement à W , ou de dire que le support L de V est une variété d'appui de W et que V possède la propriété I relativement à $L \cap W$.

PROPOSITION 5. — Soient V, W convexes de même support L , V fermé, $V \subset W$, $I(V, W)$: alors, ou bien $V = W$, ou bien le support de $W - V$ est L .

Montrons que si $W - V$ contient un point C , son support contient tout

point A de V . En effet, la droite CA coupe V suivant un segment fermé ($A'A''$) ou une demi-droite (A', ∞) ne contenant pas C et le plus petit des segments ouverts non vides $]C, A'[,]C, A''[$ appartient à $W - V$.

DÉFINITION 2. — Soient U, V deux convexes tels que $U \cap V = \emptyset$. On appelle *ensemble de contact* de U et V l'ensemble F des points A tels qu'il existe deux points B et C alignés avec A , et tels que $]B, A[\subset U;]A, C[\subset V$ (comme dans § 1, déf. 1, $]A, A[$ désigne $\{A\}$).

PROPOSITION 6. — L'ensemble de contact F de deux convexes est convexe.

Il suffit, pour le démontrer, de considérer deux points A et A' de F , et des points B, C ou B', C' , correspondant à la définition 2 : ABC (resp. $A'B'C'$) alignés; $]B, A[\subset U;]A, C[\subset V;]B', A'[\subset U;]A', C'[\subset V$. L'enveloppe convexe des segments $]BA[,]B'A'[($ resp. $]AC[,]A'C'[($) est contenu dans U (resp. V); et le segment (AA') est contenu dans l'ensemble de contact de ces deux enveloppes convexes, donc dans F .

PROPOSITION 7. — Soient V, W deux convexes non vides de même support L , qu'on suppose muni de la topologie localement convexe la plus fine; supposons V fermé, $V \neq W, I(V, W)$. Il existe alors un hyperplan et un seul séparant V de $W - V = U$.

L'ensemble de contact de V et de $(W - V)$ est l'ensemble F des points A de V tels qu'il existe un $B \in W$ avec $]A, B[\subset \bigcap V$; si un hyperplan H sépare V de $W - V$, on doit avoir $F \subset H$. Nous allons montrer que le support H de F est un hyperplan qui sépare V de $W - V$, et que $H \cap W = F$. Établissons d'abord le théorème dans le cas où L est de dimension finie : d'après la proposition 5, L est engendré par U (resp. V) et comme la dimension est finie, \hat{U} (resp. \hat{V}) n'est pas vide; il en est de même de l'intérieur de F pour la topologie de son support H .

Soit $B \in \hat{U}; C \in \hat{V} :]B, C[$ coupe F au point A ; et il en est de même de toute parallèle à BC suffisamment voisine de cette droite : la codimension de H est donc au plus 1. Or H ne peut être tout l'espace L , car l'intérieur de F dans L est manifestement vide : donc H est un hyperplan.

H qui contient l'ensemble de contact de U et V , dont la réunion est convexe, sépare U et V : car tout segment joignant un point de U à un point de V doit couper F , donc H . Enfin, $H \cap W = F$: soit $A' \in H \cap W$; nous allons montrer que $A' \in F$. En effet, soient $C \in \hat{V}; B \in \hat{V} :]A', C[\subset \hat{V}$, et donc, puisque V est fermé, $A' \in V;]A', B[\subset \hat{U}$, donc $A' \in F$.

Supposons maintenant que L soit de dimension infinie : la démonstration est analogue à celle du cas fini : il faut essentiellement établir que H est un hyperplan. Montrons que la co-dimension de H est au plus 1. Soit Δ une droite non parallèle à H : il faut établir que Δ coupe H . Soit $B \in U$, nous nous plaçons dans un sous-espace de dimension finie, P , engendré par n

points $C_1, \dots, C_n \in V$ et contenant Δ et B : un tel P existe, parce que V engendre L . Dans P on retrouve la situation de dimension finie :

$$\begin{aligned} P \cap V & \text{ convexe fermé d'intérieur non vide,} \\ P \cap W & = (P \cap V) \cup (P \cap U), \\ P \cap U, & \text{ convexe non vide, et d'intérieur non vide,} \\ & \text{d'après la proposition 5.} \end{aligned}$$

Il est clair que l'ensemble de contact F_P de $P \cap V$ et $P \cap U$ dans P est contenu dans F , ensemble de contact de U et V : l'hyperplan P' support de F_P est donc contenu dans H et il coupe Δ , ne pouvant lui être parallèle.

Pour établir que H est effectivement de co-dimension 1, il suffit de montrer que $U \cap H$ est vide; il en résultera de plus que $H \cap W \subset V$. En effet, soit $B \in U$, supposons que $B \in H$: nous allons montrer que cette hypothèse a des conséquences absurdes : B appartiendrait à un sous-espace de dimension finie de H engendré par m points A_1, \dots, A_m de F . Ces points A_i sont extrémités de segments $]A_i B_i[\subset V$: considérons un sous-espace P de dimension finie contenant PA_i et PB_i , donc aussi B , et engendré par un nombre fini de points C_1, \dots, C_n de V : dans P on retrouve encore la situation de dimension finie : P engendré par $P \cap V$; $P \cap U$ non vide; l'hyperplan de P qui sépare $P \cap U$ et $P \cap V$ ne peut contenir $B \in P \cap U$, et d'autre part il contient les A_i qui appartiennent à l'ensemble de contact de $P \cap U$ et $P \cap V$: C n'appartient donc pas à la variété engendrée par PA_i , contrairement à l'hypothèse.

Enfin, il est évident que $H \cap W$ n'est autre que F : soit $B \in U$; $A \in H \cap W$, on a $]A, B[\subset U$ et $A \in V$. Cela achève la démonstration.

PROPOSITION 8. — Soit W un convexe compact d'un espace vectoriel topologique E localement convexe séparé, V une partie compacte convexe non vide de W ; alors les deux propriétés ci-dessous sont équivalentes :

I (V, W) : $(W - V)$ est convexe;

II (V, W) : les demi-espaces ouverts contenant V coupent W suivant un système fondamental de voisinages de V considéré comme partie de W .

II (V, W) peut encore s'énoncer : Pour tout voisinage O de V considéré comme partie de E , il existe un demi-espace ouvert H tel que

- 1° $V \subset H$;
- 2° $H \cap W \subset O \cap W$.

Montrons que II implique I. En effet, soient b, b' deux points de $W - V$, O un voisinage de V ne contenant ni b ni b' (par exemple tout l'espace privé des deux points b et b'). Soit H un demi-espace ouvert vérifiant les conditions 1° et 2°; alors, d'après 2°,

$$b \in \bigcap H, \quad b' \in \bigcap H, \quad \text{d'où} \quad (b, b') \in \bigcap H,$$

puisque $\bigcap H$ est convexe; et, de plus, $(b, b') \in W - V$: en effet, $(b, b') \subset W$ parce que W est convexe, et aucun point de (b, b') n'est dans V , sinon il serait dans H d'après 1°.

Montrons que I implique II. Il suffit d'établir que les $H \cap W$ (où H désigne un demi-espace ouvert contenant V) forment une base de filtre: cette base étant formée de voisinages de V relativement à W compact, dont l'intersection est V , le filtre sera le filtre de voisinages de V . Soit donc, en passant aux complémentaires, H_1 et H_2 deux demi-espaces fermés tels que

$$H_1 \cap V = H_2 \cap V = \emptyset;$$

nous allons montrer qu'il existe un demi-espace fermé H_3 tel que

$$H_3 \cap V = \emptyset \quad \text{et} \quad H_3 \cap W \supset (H_1 \cap W) \cup (H_2 \cap W).$$

Or, $H_1 \cap W$ et $H_2 \cap W$ sont deux compacts convexes contenus dans $W - V$; leur enveloppe convexe C est compacte et contenue dans $W - V$ d'après l'hypothèse I; on peut alors séparer strictement C et V par un hyperplan (BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. II, § 3, prop. 4).

COROLLAIRE 1. — Soient W, V convexes compacts $V \subset W$; si le support L de V est une variété d'appui de W , il est équivalent d'affirmer II (V, W) ou II ($V, W \cap L$) (cf. prop. 4).

COROLLAIRE 2. — Soit W convexe compact, L une variété d'appui fermée de W , alors on a II ($L \cap W, W$).

Des propositions 7, 8 et 4 résulte le

THÉORÈME 1. — Soit W un convexe compact dans un espace vectoriel de dimension finie, V une partie non vide compacte convexe de W ; alors les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :

I (V, W);

II (V, W);

III (V, W): le support de V est une variété d'appui L de W , et V est l'intersection de W avec un demi-espace H de L (éventuellement, $H \cap W$ peut être égal à $L \cap W$).

Dans le cas projectif, on a le

THÉORÈME 1. — Soit W un corps convexe de $S(n)$, V une partie compacte convexe non vide de W ; alors les trois propriétés ci-dessous sont équivalentes :

I' (V, W): $W - V$ est convexe;

II' (V, W): les hémisphères ouverts contenant V coupent W suivant un système fondamental de voisinages de V considéré comme partie de W ;

III' (V, W): le support de V est une variété d'appui L de W , et V est l'intersection de W avec un hémisphère H de L .

En effet, le corps convexe W appartient à un hémisphère ouvert de $S(n)$ muni canoniquement d'une structure d'espace affine à n dimensions. Dans cet espace, le théorème 1' est un corollaire du théorème 1.

6. Prolongement d'un convexe au-delà d'un hémisphère.

DÉFINITION. — Soit W un convexe contenu dans un hémisphère fermé H de $S(E)$; on dit qu'un convexe V *prolonge* W au-delà de \hat{H} si $V \cap \hat{H} = W \cap \hat{H}$. Si $\hat{H} \cap W \neq \emptyset$ et si V et W sont fermés, on a de plus : $W \cap H = V \cap H$.

PROPOSITION 1. — Soit W un convexe fermé de noyau vide (cf. § 2, déf. 4), et soit H un hémisphère fermé de frontière h , tel que $W \subset H$, $W \cap \hat{H} \neq \emptyset$; alors il existe un plus grand convexe V prolongeant W au-delà de \hat{H} ; V est appelé *saturé de W au-delà de \hat{H}* . Le noyau de V est vide, sauf si W est l'enveloppe convexe d'un point de \hat{H} et de $W \cap h$; ce point de \hat{H} est alors unique.

DÉMONSTRATION :

1° La famille des convexes prolongeant W au-delà de \hat{H} est filtrante croissante.

En effet, soient V' , V'' deux convexes prolongeant W au-delà de \hat{H} ; l'enveloppe convexe V''' de V' et V'' prolonge W au-delà de \hat{H} [V''' est réunion de V' , de V'' et de l'ensemble des segments (ρ', ρ'') joignant un point ρ' de V' à un point ρ'' de V'' non diamétralement opposé à ρ' ; or $(\rho', \rho'') \cap \hat{H} \subset W$: en effet, si (ρ', ρ'') rencontre \hat{H} , on a $\rho' \in \hat{H}$ ou $\rho'' \in \hat{H}$; dans le premier cas, par exemple, on a aussi $\rho' \in V''$, donc

$$(\rho', \rho'') \subset V'' \quad \text{et} \quad (\rho', \rho'') \cap \hat{H} \subset V'' \cap \hat{H} = W \cap \hat{H}].$$

2° Si V' prolonge W au-delà de \hat{H} , il en est de même de \bar{V}' .

Cela résulte de ce que \bar{V}' est convexe et du fait que $\bar{V}' \cap \hat{H}$ est l'adhérence, dans \hat{H} , de $V' \cap \hat{H} = W \cap \hat{H}$, qui est fermé dans \hat{H} .

3° Il existe un convexe maximal V prolongeant W au-delà de \hat{H} , et V est fermé.

Pour construire V , ordonnons par inclusion l'ensemble des convexes prolongeant W au-delà de \hat{H} . L'ensemble ordonné ainsi obtenu est inductif parce que la réunion d'une famille croissante de convexes prolongeant W au-delà de \hat{H} est un convexe prolongeant W au-delà de \hat{H} .

Qu'un convexe V maximal parmi ceux qui prolongent W au-delà de \hat{H} soit le plus grand convexe jouissant de la propriété et qu'il soit fermé résulte de 1° et 2°.

4° Si V contient un couple de points diamétralement opposés v et v' , l'un de ces deux points, v , appartient à \hat{H} , et W est l'enveloppe convexe de v et de $W \cap h$.

En effet, il est impossible que v et v' appartiennent à h , car autrement, si w désigne un point de $W \cap \hat{H}$, on aurait

$$\begin{aligned} &) w, v \subset W, \\ &) w, v' \subset W, \end{aligned}$$

d'où, puisque W est fermé,

$$\begin{aligned} v & \in W, \\ v' & \in W, \end{aligned}$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Si $v \in \hat{H}$, V est réunion de demi-droites fermées joignant v et v' , et W n'est donc autre que le cône de sommet v et de base $W \cap h$. Le point v est unique; en effet, supposons qu'il existe, dans \hat{H} , $u \neq v$ tel que W soit le cône de sommet u et de base $W \cap h$; la droite joignant u et v couperait h en deux points diamétralement opposés qui devraient être tous deux dans $W \cap h$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite que le noyau de W est vide.

COROLAIRE. — Soit W un corps convexe de $S(n)$, H un hémisphère fermé de frontière h contenant W ; si W n'est pas l'enveloppe convexe d'un point et de $W \cap h$, le saturé de W au-delà de \hat{H} est un corps convexe.

PROPOSITION 2. — Soit W un corps convexe de $S(n)$, H_i une suite d'hémisphères fermés telle que $H_i \cap W$ tende vers un point frontière f de W .

Posons $H_i = \bigcup \hat{H}_i$; alors le saturé V_i de $W \cap H_i$ au-delà de \hat{H}_i tend vers W .

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi; on pourrait trouver une sous-suite $\{V_j\}$ de la suite $\{V_i\}$ et dans chaque V_j un point v_j de sorte que v_j tende vers v n'appartenant pas à W , et que H_j tende vers H de frontière h . Nous allons montrer que cela est absurde. Soit h_j la variété frontière de H_j . L'enveloppe convexe de v_j et de $W \cap H_j$ coupe h_j suivant un ensemble F_j qui est inclus dans

$$V_j \cap h_j = W \cap h_j;$$

F_j tend vers l'intersection de h et de l'enveloppe convexe de v et de W ; cependant, $W \cap h_j$ tend vers le point f , d'où la contradiction annoncée, car l'enveloppe convexe de v et de W contient un ouvert dont l'intersection avec h ne peut se réduire à un seul point.

PROPOSITION 3. — Soit W_1 (resp. W_2) un corps convexe de $S(n)$; H_1 (resp. H_2) un hémisphère fermé tel que $W_1 \subset H_1$ (resp. $W_2 \subset H_2$) et que le saturé V_1 (resp. V_2) de W_1 (resp. W_2) au-delà de \hat{H}_1 (resp. \hat{H}_2) soit dis-

tinct de W_1 (resp. W_2). On peut trouver un corps convexe W' et deux hémisphères fermés H_1, H_2 tels que :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad H_1 \cap W' &= W'_1; \\ H_2 \cap W' &= W'_2, \quad W'_1 \cap W'_2 = \emptyset, \end{aligned}$$

W' étant l'enveloppe convexe de W'_1 et de W'_2 .

2° Il existe deux transformations projectives g_1, g_2 de l'espace telles que

$$\begin{aligned} g_1 H_1 &= H'_1; & g_1 W_1 &= W'_1; \\ g_2 H_2 &= H'_2; & g_2 W_2 &= W'_2. \end{aligned}$$

Nous dirons que W' est obtenu en *raccordant* W_1 et W_2 suivant les intersections de ces corps avec les hyperplans h_1, h_2 frontières de H_1, H_2 ; si g_1 est l'identité, nous dirons que W' est obtenu en *accolant* W_2 à W_1 suivant $h_1 \cap W_1, h_2 \cap W_2$.

DÉMONSTRATION. — Soit a'_1 un point de V_1 , $a'_1 \notin W_1$; soit a_1 le point diamétralement opposé à a'_1 ; W_1 est contenu dans l'enveloppe convexe C_1 du point a_1 et de $F_1 = h_1 \cap W_1$. En effet, soit m un point de W_1 , le segment $(a'_1 m)$ coupe F_1 en un point f et m appartient au segment $(a_1 f)$.

On pose $F_2 = W_2 \cap h_2$ et l'on choisit de même a_2 en sorte que l'enveloppe convexe C_2 de a_2 et de F_2 contienne W_2 .

Nous allons raccorder C_1 et C_2 suivant F_1, F_2 . Il est clair que les transformations g_1, g_2 utilisées permettront de raccorder W_1 et W_2 , d'où la proposition.

Faisons choix d'un hémisphère ouvert \hat{H} muni canoniquement d'une structure d'espace affine. Soit h'_1, h'_2 deux hyperplans parallèles; F'_1 (resp. F'_2) un convexe de h'_1 (resp. h'_2) projectivement équivalent à F_1 (resp. F_2). Choisissons $a'_1 \notin h'_1$ (resp. $a'_2 \notin h'_2$) de sorte que la réunion de toutes les demi-droites issues de a'_1 (resp. a'_2) et rencontrant F'_1 (resp. F'_2) contiennent F'_2 (resp. F'_1). L'enveloppe convexe C' de a'_1, a'_2, F'_1, F'_2 , raccorde C_1 et C_2 suivant F_1 et F_2 .

PROPOSITION 4. — Sur tout corps convexe W de $S(n)$ ($n \geq 1$), on peut trouver deux facettes distinctes dont chacune est réduite à un point.

Remarquons que la notion de facette réduite à un point s'identifie à celle de point extrémal. La proposition va résulter du théorème de Krein-Milman (cf. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. II, § 4, théorème 1) dont nous rappelons l'énoncé : « Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe séparé; tout convexe compact de E est l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble de ses points extrémaux ».

Soit \hat{H} un hémisphère ouvert de $S(n)$ contenant W , \hat{H} est muni canoniquement d'une structure d'espace affine, il peut être muni d'une structure d'espace vectoriel à n dimensions E . Il suffit d'appliquer au convexe compact W de E le théorème de Krein-Milman.

CHAPITRE 4.

CORPS ET FORMES CONVEXES AFFINES.

L'objet principal de ce chapitre est l'étude de l'espace quotient $\mathcal{A}(n)$ de $EA(n)$ par la relation d'équivalence définie par le groupe $GA(n, R)$ opérant sur lui. Cette étude prépare celle du quotient $\mathcal{X}(n)$ de $E(n)$ par la relation d'équivalence définie par le groupe $GS(n, R)$ opérant sur lui.

1. Les corps convexes. — Rappelons quelques résultats de topologie générale (*cf.* BOURBAKI, livre III, chap. II, § 2, ex. 7; § 4, ex. 4 et 5; chap. IX, § 2, ex. 6; dont nous utilisons les notations).

Soit E un espace uniforme; une structure uniforme est définie sur $\mathfrak{P}(E)$ comme suit : Pour tout entourage V de E , deux parties X et Y sont dites voisines d'ordre V si $X \subset V(Y)$ et $Y \subset V(X)$.

Supposons E localement compact; la structure uniforme définie sur $\mathfrak{P}(E)$ induit sur l'ensemble $\mathcal{K}(E)$ des parties compactes de E une structure d'espace localement compact. Si, de plus, E est compact, il en est de même de $\mathcal{K}(E)$.

PROPOSITION 1. — Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, quel que soit l'entourage V de la structure uniforme de E , on peut trouver B tel que A et B soient voisins d'ordre V et que

$$A \subset \hat{B}.$$

En effet, soit U un entourage tel que $U \circ U \subset V$, il est clair que $\overline{U(A)}$ satisfait aux conditions demandées à B .

PROPOSITION 2. — Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(a) $A = \overline{\hat{A}}$;

(b) quel que soit l'entourage V de la structure uniforme E , on peut trouver un compact B qui soit fini, inclus dans \hat{A} et voisin d'ordre V de A .

Il est clair que (b) entraîne (a) : quel que soit $a \in A$ et quel que soit l'entourage V , on peut trouver un point de \hat{A} voisin d'ordre V de a : il suffit de prendre un point de B dont (b) affirme l'existence.

Pour démontrer que (a) entraîne (b), faisons choix d'un entourage U tel que $U \circ U \subset V$ et d'une partie finie B' de A telle que tout point de A soit voisin d'ordre U d'au moins un point de B ($A \subset U(B)$).

Pour tout point $b' \in B'$, faisons choix d'un point b qui soit voisin d'ordre U de b' et appartienne à \hat{A} [cela est possible d'après (a)].

L'ensemble des b est un B convenable.

Soit ρ une distance sur E définissant sa structure uniforme; on peut définir sur $\mathcal{K}(E)$ une distance σ qui donne la structure uniforme sur $\mathcal{K}(E)$; on pose

$$\rho(A, B) = \sup_{x \in A} d(x, B)$$

et

$$\sigma(A, B) = \sup(\rho(A, B), \rho(B, A)),$$

où A et $B \in \mathcal{K}(E)$.

Remarquons que $\rho(A, B)$ est une fonction croissante de A , décroissante de B , c'est-à-dire que quels que soient A, B, C compacts, on a

$$\begin{aligned} \rho(A, B) &\leq \rho(A \cup C, B), \\ \rho(A, B \cup C) &\leq \rho(A, B). \end{aligned}$$

DÉFINITION 1. — Soit A un compact d'un espace dont la structure uniforme est définie par une métrique; nous noterons $\mathcal{B}(A, R)$ la réunion des boules fermées de rayon R centrées en un point de A : $\mathcal{B}(A, R)$ est un compact.

Nous nous noterons $\mathcal{U}(A, R)$ l'ensemble des points de A centres d'une boule fermée de rayon R contenue dans A : $\mathcal{U}(A, R)$ est un compact.

REMARQUE. — Soient $A, B \in \mathcal{K}(E)$; l'inégalité

$$\rho(A, B) \leq R$$

équivaut à l'inclusion

$$A \subset \mathcal{B}(B, R),$$

et l'inégalité

$$\sigma(A, B) \leq R$$

équivaut au système d'inclusions

$$\begin{aligned} A &\subset \mathcal{B}(B, R), \\ B &\subset \mathcal{B}(A, R). \end{aligned}$$

DÉFINITION 2. — Soient A, B deux parties d'un espace topologique, on dit que A est *inclus fortement* dans B , et l'on écrit

$$A \prec B$$

si est vérifiée l'inclusion

$$\overline{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

PROPOSITION 3. — Soit A une partie compacte d'un espace métrique E ; soient $R, R', R \neq R', R' < R$; on a les inclusions fortes

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(A, R') &\prec \mathcal{B}(A, R), \\ \mathcal{U}(A, R) &\prec \mathcal{U}(A, R'). \end{aligned}$$

On démontre aisément la

PROPOSITION 4. — Soient $A, K \in \mathcal{K}(E)$ tels que $K \subset \overset{\circ}{A}$. On peut trouver R tel que

$$K \prec \mathcal{K}(A, R).$$

Soit $A \in \mathcal{K}(E)$, soit O un voisinage de A ; on peut trouver R tel que

$$\mathcal{B}(A, R) \prec O.$$

DÉFINITION 3. — Les ensembles $EA(n)$ et $CA(n)$ définis au chapitre 1, paragraphe 1 vérifient les inclusions

$$EA(n) \subset CA(n) \subset \mathcal{K}(R^n).$$

Par définition, $EA(n)$ et $CA(n)$ seront munis de la structure uniforme induite par celle définie ci-dessus sur $\mathcal{K}(R^n)$.

Pour étudier ces trois espaces, nous munirons l'espace affín d'une métrique euclidienne ρ et nous utiliserons la métrique σ correspondante.

PROPOSITION 5. — Soit A un corps convexe de R^n . Quel que soit R , on peut trouver un corps convexe C tel que

$$\begin{aligned} C &\subset \overset{\circ}{A}, \\ \sigma(A, C) &\leq R. \end{aligned}$$

Il est clair que A possède la propriété (a) de la proposition 2. On peut donc trouver B fini tel que

$$\begin{aligned} B &\subset \overset{\circ}{A}, \\ \sigma(A, B) &\leq R. \end{aligned}$$

Soit T l'ensemble des $(n+1)$ sommets d'un simplexe non dégénéré inclus dans $\overset{\circ}{A}$: l'enveloppe convexe de $B \cup T$ est un C convenable.

On démontre facilement la

PROPOSITION 6. — Soit $A \in CA(n)$, on a quel que soit R

$$\mathcal{B}(A, R) \in EA(n).$$

Et, pour $A \in EA(n)$, et R suffisamment petit, on a

$$\mathcal{K}(A, R) \in EA(n).$$

PROPOSITION 7. — Soient $A \in \mathcal{K}(R^n)$; $B \in CA(n)$ tels que

$$\rho(A, B) < R.$$

Alors, on a l'inclusion

$$\mathcal{K}(A, R) \subset B.$$

La proposition résulte du

LEMME. — Soient A' la boule fermée de centre M et de rayon R , B un compact convexe tel que

$$\rho(A', B) < R.$$

Alors le point M est intérieur à B .

En effet, si le point M n'appartenait pas à B , on pourrait trouver un demi-espace fermé H contenant B et dont la frontière passe par M . Menons en M la demi-droite perpendiculaire à la frontière de H et dirigée vers l'extérieur de H . Cette demi-droite recoupe la sphère frontière de la boule A' en un point P .

Or P est à une distance de B supérieure ou égale à R , ce qui est en contradiction avec l'hypothèse

$$\rho(A', B) < R.$$

D'où le lemme.

PROPOSITION 8. — Les trois espaces $\mathcal{K}(R^n)$, $CA(n)$ et $EA(n)$ sont localement compacts; $CA(n)$ est fermé dans $\mathcal{K}(R^n)$; $EA(n)$ est un ouvert de $CA(n)$.

Que $\mathcal{K}(R^n)$ soit localement compact résulte, d'après ce qui a été rappelé, de la compacité locale de l'espace affín.

En démontrant que $CA(n)$ est fermé dans $\mathcal{K}(R^n)$, nous démontrerons qu'il est localement compact, et de même pour $EA(n)$, en démontrant qu'il est un ouvert de $CA(n)$.

a. $CA(n)$ est fermé dans $\mathcal{K}(R^n)$.

Nous démontrerons que son complémentaire est ouvert.

Soit $A \in \mathcal{K}(R^n)$; $A \notin CA(n)$. Nous allons déterminer R tel que tout $B \in \mathcal{K}(R^n)$ à une distance de A moindre que R ne soit pas convexe. Si A est non convexe, on peut trouver deux points M et N de A tels que sur le segment MN il existe un point P n'appartenant pas à A . Puisque A est compact, donc fermé, il existe R tel que la boule de centre P et de rayon $2R$ ne rencontre pas A .

Soit maintenant B un compact à une distance σ de A moindre que R ; la boule de centre M (resp. N) et de rayon R contient un point M' (resp. N') de B . Le segment $M'N'$ a une intersection non vide avec la boule de centre P et de rayon R , mais cette boule a une intersection vide avec B qui n'est donc pas convexe.

b. $EA(n)$ est ouvert dans $CA(n)$.

Il nous faut démontrer que tout convexe compact B suffisamment voisin d'un convexe compact d'intérieur non vide est lui-même d'intérieur non vide.

Or cela résulte de la proposition 7.

PROPOSITION 9. — Soit B_i, B_e deux corps convexes; nous noterons $]B_i, B_e[$ l'ensemble des corps convexes B vérifiant les inclusions fortes (cf. déf. 2)

$$B_i \prec B \prec B_e;$$

$]B_i, B_e[$ sera appelé intervalle ouvert d'origine B_i et d'extrémité B_e .

Soit $B \in EA(n)$: les intervalles ouverts contenant B forment une base de voisinage de B pour la topologie de $EA(n)$.

DÉMONSTRATION :

1° La boule de centre B et de rayon R contient un intervalle auquel B appartient.

D'après la proposition 5, on peut trouver B_i tel que

$$B_i \prec B; \quad \rho(B, B_i) \leq R.$$

D'après la proposition 6, $\mathcal{B}(B, R) = B_e$ est un corps convexe et il vérifie

$$B \prec B_e; \quad \rho(B_e, B) \leq R.$$

On a donc

$$B \in]B_i, B_e[.$$

Que tout point de $]B_i, B_e[$ soit à une distance σ de B , $\sigma \leq R$, résulte immédiatement de ce que $\rho(A, C)$ est une fonction croissante de A , décroissante de C .

2° Tout intervalle $]B_i, B_e[$ auquel B appartient contient une boule de centre B et de rayon R .

Puisque $B_i \prec B$, on peut trouver R' tel que

$$B_i \prec \mathcal{U}(B, R').$$

De même, puisque $B \prec B_e$, on peut trouver R'' tel que

$$\mathcal{B}(B, R'') \prec B_e \quad (\text{cf. prop. 4}).$$

Mais alors

$$\sigma(A, B) < R = \inf(R', R'')$$

implique

$$B_i \prec \mathcal{U}(B, R) \subset A \subset \mathcal{B}(B, R) \prec B_e$$

(cf. prop. 7 et remarque après déf. 1).

Ce qui achève la démonstration de la proposition.

PROPOSITION 10. — Soient C_1, C_2 deux corps convexes, l'ensemble des corps convexes C tels que $C_1 \subset C \subset C_2$ est compact.

En effet, l'ensemble des convexes fermés contenus dans C_2 est compact : la partie de cet ensemble formée de convexes qui contiennent C_1 est fermée et elle ne contient que des corps.

PROPOSITION 11. — L'espace $E(n)$ des corps convexes de la sphère projective $S(n)$, muni de la topologie induite par $\mathcal{K}(S(n))$, est un espace localement compact, localement homéomorphe à $EA(n)$.

En effet, soit $W \in E(n)$, H un hémisphère ouvert de $S(n)$ contenant W ; soit i un homéomorphisme de H muni de sa structure affine (cf. chap. 1, § 1, déf. 6) sur R^n ; l'ensemble des corps convexes contenus dans H est un voisinage de W dans $E(n)$ muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{K}(S(n))$; i induit un homéomorphisme entre ce voisinage et $EA(n)$.

PROPOSITION 12. — Soit $CA(n)$ l'espace des parties convexes compactes de R^n , l'application de $CA(n) \times CA(n)$ dans $CA(n)$, qui, à chaque couple de convexes compacts, associe leur enveloppe convexe, est une application continue.

Pour le démontrer, nous allons décomposer l'application enveloppe convexe en produit de deux applications continues.

1° Soit I le segment $(0, 1)$: à un couple de convexes compacts (k_1, k_2) on associe le compact $k_1 \times k_2 \times I$ de $R^n \times R^n \times I$. Nous noterons f l'application ainsi définie de $CA(n) \times CA(n)$ dans $\mathcal{K}(R^n \times R^n \times I)$.

2° A un compact élément de $\mathcal{K}(R^n \times R^n \times I)$ nous associerons un compact de R^n : son image par l'application g de $R^n \times R^n \times I$ dans R^n qui au triple (m, m', λ) associe le vecteur $\lambda m + (1 - \lambda)m'$.

Nous noterons aussi g l'application ainsi définie de $\mathcal{K}(R^n \times R^n \times I)$ dans $\mathcal{K}(R^n)$: cette dernière application est continue, comme l'application de $R^n \times R^n \times I$ dans R^n qui la définit.

Il est clair que $g \circ f$ est continue, et que son image appartient à $CA(n)$: d'où la proposition.

La notion d'enveloppe convexe peut être étendue à la sphère projective $S(E)$ d'un espace vectoriel E : soit $A \subset S(E)$ [resp. $A, B \subset S(E)$]; l'enveloppe convexe de A (resp. de A et de B) est le plus petit convexe de $S(E)$ contenant A (resp. A et B).

Si A et B sont deux convexes, l'enveloppe convexe de A et B n'est autre que la réunion de A , de B et de l'ensemble des segments joignant un point de A à un point de B (cf. chap. 1, § 1, déf. 7).

On peut énoncer la

PROPOSITION 13. — Soit $C(S(n))$ l'espace des parties convexes compactes de $S(n)$ (cf. chap. 1, § 1) muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{K}(S(n))$; soient k_1, k_2 deux convexes compacts inclus dans un même hémisphère ouvert \hat{H} : au voisinage du couple (k_1, k_2) , l'application enveloppe convexe de $C(S(n)) \times C(S(n))$ dans $C(S(n))$ est définie et continue.

En effet, identifions \hat{H} à R^n par un homéomorphisme i , compatible avec la structure affine (cf. prop. 11) : l'application étudiée s'identifie à l'application enveloppe convexe étudiée dans la proposition 12.

PROPOSITION 14. — Soit W un corps convexe de l'espace affín à n dimensions, G son centre de gravité : si une droite passant G coupe la frontière de W en deux points F et F' , on a

$$\frac{1}{n} \leq \frac{|GF|}{|GF'|} \leq n.$$

En effet, pour déterminer le centre de gravité de W , on peut le décomposer en cônes élémentaires de sommet F , dont la base soit un élément d'hypersurface de la frontière S de W . Les centres de gravité des cônes élémentaires sont sur une hypersurface S' déduite de S par l'homothétie de centre F et de rapport $\frac{n}{n+1}$; G peut être considéré comme centre de gravité d'un système de masses réparties sur S' , il est donc dans le transformé W' de W par l'homothétie déjà considérée ; d'où

$$\frac{FG}{FF'} \leq \frac{n}{n+1}, \quad \text{c'est-à-dire } GF \leq nGF'.$$

Pour la même raison, $GF' \leq nGF$.

REMARQUE. — Avec les notations précédentes, une condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait $\frac{|GF|}{|GF'|} = n$ est que W soit un cône de sommet F .

En effet, pour que le centre de gravité G d'un système de masses distribuées sur une hypersurface convexe S appartienne à S , il faut et il suffit que ces masses soient toutes sur un même hyperplan d'appui H de S en G : S a donc une facette dans H , et l'homothétie de cette facette par rapport à F dans le rapport $\frac{n+1}{n}$ est la base du cône W .

DÉFINITION 4. — On appelle *corps convexe normal* de l'espace euclidien un corps convexe dont le moment d'inertie par rapport à tout hyperplan passant par son centre de gravité soit égal à 1.

PROPOSITION 15. — Soit W un corps convexe de l'espace affín : il existe une structure euclidienne et une seule compatible avec la structure affíne, et pour laquelle W soit un corps convexe normal ; la métrique correspondante s'appelle métrique normale associée ; elle dépend continûment de W .

Soit F l'espace vectoriel des fonctions linéaires sur l'espace affín, s'annulant au centre de gravité G de W . Sur F nous définissons une forme bilinéaire symétrique et une forme quadratique définie positive par les formules

$$(f, g)_W = \frac{\int_W fg \, d\mu}{\int_W d\mu}, \quad |f|_W^2 = \frac{\int_W f^2 \, d\mu}{\int_W d\mu},$$

où $d\mu$ désigne l'élément de volume de l'espace affín, défini à une constante multiplicative près, qui ne modifie pas les quantités définies. D'autre part, à toute structure euclidienne N sur l'espace affín correspond par dualité une forme quadratique définie positive sur l'espace F ; nous noterons $(f, g)_N$ la forme bilinéaire associée. La condition nécessaire et suffisante pour que W soit normal pour N est que

$$(f, g)_W \equiv (f, g)_N.$$

La connaissance de $f(g)_W$ permet donc de déterminer E de façon unique par dualité : la continuité est évidente.

DÉFINITION 5. — On appelle ellipsoïde associé à un corps convexe affín W , la boule unité centrée au centre de gravité G de W pour la métrique normale associée à W .

PROPOSITION 16. — L'ellipsoïde associé E dépend continûment de W au sens de la topologie des corps convexes; de plus, la notion d'ellipsoïde associé est invariante par tout automorphisme affín de l'espace.

REMARQUE. — L'ellipsoïde E associé à un ellipsoïde W a même centre que W , et s'en déduit par une homothétie dont le rapport ne dépend que de la dimension de l'espace.

PROPOSITION 17. — *Tout corps convexe normal W de centre G contient une boule de centre G et de rayon fixe, et est contenu dans une boule de centre de G et de rayon fixe.*

DÉMONSTRATION :

1° W contient la boule de centre G et de rayon $\frac{1}{n}$. Car, soit M_0 un point frontière de W minimisant la distance de G à la frontière de W . Il existe en M_0 un hyperplan d'appui H , qui est nécessairement l'hyperplan perpendiculaire à GM_0 ; par un changement de coordonnées rectangulaires, on peut supposer que les coordonnées de G sont nulles, et que celles de M_0 ont la forme $(a, 0, \dots, 0)$, avec $a > 0$. Alors $x_1 < a$ en tout point de W , donc $|x_1| < na$ dans W (cf. prop. 14), et

$$\int_W dx = \int_W (x_1)^2 dx < n^2 a^2 \int_W dx,$$

d'où

$$a > \frac{1}{n}.$$

2° W est contenu dans la boule de centre G et de rayon r , r étant la hauteur d'un cône qui a pour base une boule de rayon $\frac{1}{n}$ (dans un hyper-

plan H) et pour moment d'inertie 1 par rapport à H . En effet, soit M un point, $M \in W$ ($M \neq G$), soit H l'hyperplan perpendiculaire à GM passant par G ; le cône de sommet M , ayant pour base la boule de centre G et de rayon $\frac{1}{n}$ dans H est contenu dans W ; donc son moment d'inertie par rapport à H est ≤ 1 et, par suite, $MG \leq r$.

COROLLAIRE. — *L'ensemble N des corps convexes normaux de centre G est un compact de $\mathfrak{K}(R^n)$.*

Cela résulte aussitôt de la proposition ci-dessus et de la proposition 10.

2. Les formes convexes. — On appelle *espace des formes convexes affines* de dimension n , et l'on note $\mathfrak{A}(n)$, le quotient de l'espace $EA(n)$ des corps convexes de R^n par la relation d'équivalence suivante : deux corps convexes C et C' ont « même forme » s'il existe un automorphisme affine de R^n transformant C en C' . L'espace $\mathfrak{A}(n)$ est muni de la topologie quotient.

Nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME. — *L'espace $\mathfrak{A}(n)$ des formes convexes affines est compact.*

Pour cela, nous aurons besoin de quelques résultats sur les relations d'équivalence définies par un groupe opérant dans un espace localement compact.

Soient E un espace localement compact, et G un groupe topologique opérant continûment dans E ; nous distinguerons les deux conditions :

I. Il existe un compact K tel que $GK = E$;

II. Quel que soit C compact de E , l'ensemble G_C des $g \in G$ telles que $gC \cap C \neq \emptyset$ est compact.

Cette deuxième condition peut aussi s'énoncer : si H est le graphe dans $E \times E \times G$ de la relation $y = gx$, l'image réciproque par projection d'un compact de $E \times E$ est un compact de H .

PROPOSITION 1. — *Si un groupe topologique G opère continûment dans un espace localement compact E , les conditions I et II étant vérifiées, il existe sur E une structure uniforme et une seule compatible avec la topologie de E et pour laquelle les opérations de G soient uniformément équi-continues.*

On montrera d'abord que si une telle structure uniforme existe, le filtre de ses entourages a pour base le filtre des voisinages de la diagonale de $E \times E$ qui sont invariants par G [G opérant dans $E \times E$ par $(g, (x, y)) \rightarrow (gx, gy)$]. Ensuite nous montrerons que ce filtre définit bien une structure uniforme compatible avec la topologie de E .

1° L'uniforme équi-continuité dit que, pour tout entouragement V de la structure uniforme, il doit exister un entouragement U tel que $(x, y) \in U, g \in G$

entraînent $(gx, gy) \in V$. Il en résulte que le filtre des entourages doit contenir une base formée de parties U stables par G , c'est-à-dire telles que $(x, y) \in U$ implique $(gx, gy) \in U$. Réciproquement, pour une structure uniforme qui possède une base d'entourages invariants, G sera uniformément équicontinu.

2° Si une structure uniforme compatible avec la topologie de E admet une base d'entourages invariants par G , le filtre des entourages a pour base l'ensemble des voisinages, invariants par G , de la diagonale de $E \times E$.

Il est d'abord évident que le filtre des entourages est moins fin que le filtre des voisinages invariants, puisque tout entourage est un voisinage de la diagonale, et qu'il existe une base d'entourages invariants par G . Il reste à montrer que tout voisinage invariant contient un entourage. Soit O un voisinage invariant de la diagonale; pour montrer que O contient un entourage, il suffit de montrer qu'il existe un entourage invariant V tel que

$$(K \times E) \cap V \subset O,$$

où $K \times E$ est canoniquement plongé dans $E \times E$; alors $V \subset O$, en vertu de l'invariance de V par G , et du fait que K engendre E . Désignons par D_K l'ensemble des points (x, x) , où $x \in K$; O est un voisinage du compact D_K , et l'on peut donc trouver un entourage V tel que $(x, x') \in V$, $(x, x'') \in V$, $x \in K$ impliquent $(x', x'') \in O$; V est l'entourage cherché.

3° Il reste à montrer que le filtre, ayant pour base les voisinages de la diagonale de $E \times E$ invariants par G , définit une structure uniforme compatible avec la topologie de E . Pour cela, on montrera qu'étant donné un point $x \in K$ et un voisinage u de x , il existe un voisinage invariant V de la diagonale de $E \times E$ tel que $(x \times E) \cap V \subset (x \times u)$, où $x \times E$ et $x \times u$ sont canoniquement plongés dans $E \times E$; il restera ensuite à établir que le filtre des voisinages invariants définit une structure uniforme.

Pour construire un voisinage invariant de la diagonale de $E \times E$, il suffit de prendre la réunion des transformés par G d'un voisinage de D_K . Soient K_0 un voisinage compact de K dans E , H_0 l'image réciproque (compacte) de $K_0 \times K_0$ dans H , D_{K_0} la diagonale de $K_0 \times K_0$ considérée comme partie de $E \times E$, G_0 la projection compacte de H_0 sur G et K_1 la réunion des transformés de K_0 par les éléments de G_0 ; alors K_1 est compact, et pour la structure uniforme de K_1 , G_0 , considéré comme famille d'applications de K_0 dans K , est équicontinu: on peut donc trouver un voisinage V_0 de la diagonale D_{K_0} dans $K_0 \times K_0$ (qui est un voisinage de D_K dans $E \times E$) tel que $G_0 V_0$ soit dans un voisinage arbitraire V de D_{K_1} dans $K_1 \times K_1$. Mais le voisinage $V = GV_0$, réunion des transformés par G de V_0 , est tel que $V \cap (K \times E) \subset V_1$: en effet, si $(x, y) \in (K \times E) \cap V$, c'est qu'on a

$$(x_0, y_0) \in V_0 \quad \text{et} \quad x = gx_0, \quad y = gy_0,$$

mais si $x = gx_0 \in K$, on a

$$g \in G_0 \quad \text{et} \quad (x, y) \in V_1.$$

De ce qu'on peut choisir arbitrairement $V_1 \cap (x \times E)$ résulte la première assertion.

Ainsi le filtre des voisinages invariants de la diagonale D de $E \times E$ induit sur $K_0 \times K_0$ le filtre des entourages de son unique structure uniforme; on peut trouver U , voisinage invariant de D , tel que $(x, y) \in U$, $x \in K$ implique $y \in K_0$: pour un tel U , nous allons construire V tel que $V \circ V \subset U$, ce qui achèvera la démonstration. Soit $U^0 = (K_0 \times K_0) \cap U$; il existe V , voisinage invariant de D , tel que $V^0 = (K_0 \times K_0) \cap V$ soit tel que $V^0 \circ V^0 \subset U^0$; montrons que $V \circ V \subset U$; soit $(x, y) \in V$, $(y, z) \in V$; il existe g tel que $gy \in K$; on a alors, d'après les hypothèses faites,

$$(gx, gy) \in V^0, \quad (gy, gz) \in V^0;$$

il en résulte que $(gx, gz) \in U^0$, d'après l'invariance $(x, z) \in U$.

Avant d'énoncer la proposition 2, il y a deux remarques à faire :

(a) Lorsque G opère dans E localement compact et satisfait à la condition (II), l'espace topologique quotient E/G est séparé;

(b) Lorsque G opère dans un espace uniforme ayant une base d'entourages invariants par G , la topologie de l'espace quotient E/G est celle associée à la structure uniforme quotient de E/G .

DÉMONSTRATION de (a). — La relation d'équivalence est ouverte; donc, pour que E/G soit séparé, il faut et il suffit que le graphe R de la relation d'équivalence soit fermé dans $E \times E$ (cf. BOURBAKI, livre II, chap. I, § 9, théorème 2). Soit (x, y) un point de l'adhérence \bar{R} ; soient U et U' des voisinages compacts de x et y ; il suffit de montrer que $(U \times U') \cap R$ est compact; or c'est l'image de $U \times G_0$ par l'application $(u, g) \rightarrow (u, gu)$, G_0 désignant le sous-ensemble compact des $g \in G$ tels que gU rencontre U' .

DÉMONSTRATION DE (b). — Notons $(E/G)_t$ l'espace E/G muni de la topologie quotient de la topologie de E , et $(E/G)_u$ l'espace E/G muni de la topologie associée à la structure uniforme quotient de la structure uniforme de E . L'application canonique $E \rightarrow (E/G)_u$ étant continue, définit par passage au quotient une application continue $(E/G)_t \rightarrow (E/G)_u$. Il reste à montrer que, moyennant l'hypothèse de (b), ceci est un homéomorphisme, et pour cela que l'image de tout ouvert est un ouvert. On est ramené à montrer ceci : Si U est un ouvert saturé de E , et x un point de U , il existe un entourage $V \subset E \times E$, doublement invariant [i. e. $(y, y') \in V$ entraîne $(gy, g'y') \in V$ pour $g, g' \in G$], tel que $V(x) \subset U$. Or, par hypothèse, il existe un entourage invariant W [i. e. $(y, y') \in W$ entraîne $(gy, g'y') \in W$ pour $g \in G$] tel que $W(x) \subset U$; soit V l'ensemble des couples de la forme $(y, g'y')$, où $(y, y') \in W$ et $g \in G$; V répond à la question.

Cela dit, on peut énoncer la

PROPOSITION 2. — *Sous les hypothèses de la proposition 1, l'espace quotient E/G est compact, et son unique structure uniforme est le quotient de la structure uniforme de E définie dans la proposition 1.*

En effet, l'espace topologique E/G est séparé, d'après (a); d'après (I), l'application continue surjective $K \rightarrow E/G$ dans un espace séparé a pour image un compact, donc E/G est compact. La dernière assertion de la proposition 2 résulte alors de (b).

REMARQUE. — Sous les hypothèses de la proposition 1, si E est métrisable, il en est de même de E/G .

En effet, reportons-nous à la démonstration de la proposition 1 (3°) : le filtre sur $K_0 \times K_0$ des entourages de son unique structure uniforme admet une base dénombrable; il en est donc de même du filtre ayant pour base l'ensemble des voisinages invariants par G de la diagonale de $E \times E$, et du filtre sur $E/G \times E/G$ des voisinages de sa diagonale.

D'où la remarque.

DÉFINITION 1. — Soit $A_1 \times A_2$ le produit de deux espaces topologiques localement compacts; p_i la projection sur A_i . Une partie B de $A_1 \times A_2$ est dite bornée transversalement à A_1 si la restriction de p_1 à \bar{B} est propre.

Remarquons que la condition II du début du présent paragraphe peut s'énoncer : H est borné transversalement à $(E \times E)$ dans $E \times E \times G$.

Nous pouvons maintenant énoncer la

PROPOSITION 3. — Supposons vérifiées les hypothèses I et II. Soit T' une structure uniforme séparée sur E , qui possède une base $\{V_i\}$ d'entourages, formée de voisinages de la diagonale D de $E \times E$, invariants par G , dont l'un, V_0 , est borné transversalement : T' n'est autre que la structure uniforme T de la proposition 1.

Puisque les V_i sont des voisinages de D , les \bar{V}_i sont une base d'entourage pour la structure uniforme T' : nous supposons donc les V_i fermés. V_0 peut être supposé symétrique, donc borné transversalement aux deux facteurs de $E \times E$: dans la démonstration, on utilise seulement le fait que V_0 est borné transversalement à l'un d'eux, par exemple le premier.

Les V_i sont des voisinages de D invariants par G , donc sont des entourages pour la structure uniforme T . Réciproquement, il faut montrer que, quel que soit le voisinage U de D , invariant par G , il existe $V_i \subset U$. Pour cela, d'après la propriété d'invariance par G , et l'hypothèse I, il suffit de trouver un V_i , tel que, dans $E \times E$, soit vérifiée l'inclusion

$$V_i \cap (K \times E) \subset U.$$

Or, par hypothèse, $V_0 \cap K \times E$ est compact : les V_i , fermés, coupent ce compact suivant une famille décroissante de compacts, dont l'intersection est $D \cap (K \times E)$, puisque la structure uniforme T' est séparée. Pour i convenable, $V_i \cap (K \times E)$ rentre donc dans un voisinage quelconque de $D \cap (K \times E)$, par exemple, dans U .

PROPOSITION 4. — Soient E et E' deux espaces localement compacts sur lesquels opère continûment un groupe topologique G , soit f une fonction continue, définie sur E , à valeur dans E' , qui commute avec tout élément g de G au sens suivant :

$$f(ge) = g(fe).$$

Si f est propre et si le couple (E', G) satisfait aux conditions I et II, il en est de même du couple (E, G) ; si f est propre et surjective et si (E, G) satisfait aux deux conditions, il en est de même du couple (E', G) .

La proposition 4 suit aisément de l'énoncé des conditions I et II.

PROPOSITION 5. — Le couple formé de l'ensemble $EA(n)$ des corps convexes affins d'une dimension donnée n et du groupe affín $GA(n, R)$ satisfait aux conditions I et II.

Soit E' l'espace des ellipsoïdes, soit f l'application surjective de $EA(n)$ sur $E' \subset EA(n)$, définie en faisant correspondre à chaque corps l'ellipsoïde associé (§1, déf. 5); soit E'' l'espace des repères affins formés des suites de n vecteurs linéairement indépendants de même origine, et soit f' l'application surjective de E'' sur E' , définie en prenant pour image d'un repère l'unique ellipsoïde dont les n vecteurs sont n demi-diamètres conjugués. Il est immédiat que $(E'', GA(n, R))$ satisfait aux conditions I et II. Il est facile de voir que f' est propre, donc $(E', GA(n, R))$ satisfait aussi aux deux conditions. Pour démontrer la proposition, il suffit donc d'établir que f est propre.

Pour cela, montrons que tout point $e' \in E'$ a un voisinage compact, dont l'image réciproque dans $EA(n)$ est compacte. On sait (§1, prop. 7) que les corps convexes C de l'image réciproque de e' sont compris entre deux ellipsoïdes e_1 et e_2 homothétiques concentriques de e'

$$e_1 \subset C \subset e_2.$$

Soient h' et g' deux ellipsoïdes tel que

$$h' \subset e'; \quad e' \subset g'.$$

L'ensemble des ellipsoïdes contenus dans g' et contenant h' est un voisinage compact de e' : les corps de l'image réciproque par f de ce voisinage sont compris entre les deux ellipsoïdes h_1 et g_2 ainsi définis : h_1 (resp. g_2) est homothétique concentrique de h' (resp. g') dans le même rapport que e_1 (resp. e_2) l'est de e' . La compacité de l'image réciproque d'un voisinage compact suffisamment petit résulte alors de la proposition 10 du paragraphe 1.

THÉORÈME. — *L'espace $\mathcal{A}(n)$ des formes convexes affines d'une dimension donnée n est compact.*

Ce théorème résulte immédiatement des propositions 2 et 5. Il résulte de la remarque qui suit la proposition 2 que $\mathcal{A}(n)$ est, de plus, métrisable.

CHAPITRE 5.

CORPS ET FORMES CONVEXES PROJECTIFS.

L'objet principal de ce chapitre est l'étude de l'espace quotient $\mathcal{X}(n)$ de $E(n)$ par le groupe $GS(n, R)$ opérant sur lui. Le paragraphe 3 se termine par un théorème sur les variétés localement projectives balayables, dont la démonstration utilise les résultats des chapitres 2 et 5.

1. Les endomorphismes projectifs. — La sphère projective $S(n-1)$ et l'espace projectif $P(n-1)$ ont été définis au chapitre 1 paragraphe 1 :

$$\begin{aligned} S(n-1) &\text{ s'identifie à } (R^n - \{O\})/R^+; \\ P(n-1) &\text{ s'identifie à } (R^n - \{O\})/R^*. \end{aligned}$$

Nous avons noté $GS(n-1, R)$ [resp. $GP(n-1, R)$] le groupe des automorphismes projectifs de $S(n-1)$ [resp. $P(n-1)$] :

$$\begin{aligned} GU(n, R) &\stackrel{\simeq}{\approx} GS(n-1, R) = GL(n, R)/R^+, \\ GP(n-1, R) &= GL(n, R)/R^*. \end{aligned}$$

$M(n, R)$ désignant l'espace vectoriel des endomorphismes de R^n , posons

$$\begin{aligned} (M(n, R) - \{O\})/R^+ &= MS(n-1, R), \\ (M(n, R) - \{O\})/R^* &= MP(n-1, R). \end{aligned}$$

$GS(n-1, R)$ s'identifie à un ouvert partout dense de la variété $MS(n-1, R)$, dont la dimension est n^2-1 ; et $GP(n-1, R)$ s'identifie à un ouvert partout dense de la variété $MP(n-1, R)$.

Soit $a \in M(n, R) - \{O\}$; soient N et I le noyau et l'image de l'application linéaire $a : R^n \rightarrow R^n$; notons $n-p$ et p leurs dimensions; parce que a est différent de zéro, on a

$$I \neq \{O\} \quad \text{et} \quad p \geq 1.$$

Les images de $N - \{O\}$ et de $I - \{O\}$ dans $S(n-1)$ ne dépendent que de la classe h de a dans $MS(n-1, R)$, et seront notées $N(h)$ et $I(h)$. Puisque $p \geq 1$, on a

$$I(h) \neq \emptyset \quad \text{et} \quad N(h) \neq S(n-1).$$

L'application α induit une application de $S(n-1) - N(h)$ sur $I(h)$; cette application ne dépend que de h , et sera notée $T(h)$. Pour que deux points x et x' de $S(n-1) - N(h)$ aient même transformée par $T(h)$, il faut et il suffit qu'ils engendrent avec $N(h)$ la même demi-variété linéaire projective de $S(n-1)$. Donc $T(h)$ induit un isomorphisme [noté encore $T(h)$] de l'espace sphérique formé des demi-variétés projectives de dimension $n-p$ passant par $N(h)$, sur l'espace sphérique $I(h)$ dont la dimension est $p-1$.

Nous rapportant à la définition 10 du chapitre 1, paragraphe 1, nous noterons $S(n-1)/N(h)$ l'espace des demi-variétés projectives de dimension $n-p$ passant par $N(h)$.

En résumé, la donnée d'un point h de la variété $MS(n-1, R)$ [qui s'identifie à la sphère $S(n^2-1)$] équivaut à la donnée des deux sous-espaces $N(h)$ et $I(h)$ de $S(n-1)$ ($N(h) \neq S(n-1)$; $I(h) \neq \emptyset$) dont la somme des dimensions soit $n-2$, et d'un isomorphisme de la sphère $S(n-1)/N(h)$ sur la sphère $I(h)$. Pour que h soit dans l'ouvert partout dense $GS(n-1, R)$, il faut et il suffit que $N(h)$ soit vide, ce qui équivaut à $I(h) = S(n-1)$.

De même, les images de N et de I dans $P(n-1)$ ne dépendent que de la classe h' de α dans $MP(n-1, R)$; on les notera $N(h')$ et $I(h')$. Et h' induit un isomorphisme $T(h')$ de l'espace projectif $P(n-1)/N(h')$ [formé des variétés projectives de dimensions $n-p$ passant par $N(h')$], sur l'espace projectif $I(h')$ dont la dimension est $p-1$.

La donnée de $h' \in MP(n-1, R)$, [qui s'identifie à l'espace projectif $P(n^2-1)$] équivaut à la donnée de deux sous-espaces $N(h')$ et $I(h')$ de $P(n-1)$ dont la somme des dimensions soit $n-2$, et d'un isomorphisme de l'espace projectif $P(n-1)/N(h')$ sur l'espace projectif $I(h')$.

Pour qu'on ait $h' \in GP(n-1, R)$, il faut et il suffit que $N(h')$ soit vide, ce qui équivaut à

$$I(h') = P(n-1),$$

DÉFINITION 1. $N(h)$ [resp. $N(h')$] s'appelle le *noyau* de $h \in MS(n-1, R)$ [resp. de $h' \in MP(n-1, R)$]; $I(h)$ [resp. $I(h')$] s'appelle l'*image* de h (resp. de h'). Par abus de langage, la transformation $T(h)$:

$$S(n-1) - N(h) \rightarrow I(h)$$

s'appelle un endomorphisme projectif de la sphère $S(n-1)$ et la transformation $T(h')$:

$$P(n-1) - N(h') \rightarrow I(h')$$

s'appelle un endomorphisme projectif de $P(n-1)$.

Donnons deux exemples qui seront utilisés au paragraphe 3 du présent chapitre.

EXEMPLE 1. — Soient I et N deux variétés linéaires de $S(n)$ dont la somme (cf. chap. 3, § 2, déf. 5) soit $S(n)$.

DÉFINITION 2. — On appelle *homothétie de centre N, de but I, de rapport r* la transformation *T* ainsi définie :

Si $m \in I \cup N$, $Tm = m$;

Si $m \notin I \cup N$, m appartient à un segment de droite unique joignant un point i de I à un point n de N ; Tm est le point de ce segment défini par

$$(Tm, m, n, i) = r.$$

Le sous-groupe des homothéties de centre N et de but I est canoniquement isomorphe à R^+ .

REMARQUE. — L'homothétie de centre N , de but I et de rapport r s'identifie à l'homothétie de centre I , de but N et de rapport $\frac{1}{r}$.

Étudions la fermeture dans $MS(n, R)$ du sous-groupe des homothéties positives du centre N et de but I . Quand le rapport tend vers l'infini (resp 0), l'homothétie tend vers la projection sur I (resp. I) à partir de N (resp. I), endomorphisme de noyau N (resp. I) et d'image I (resp. N).

EXEMPLE 2. — Soit Q un ellipsoïde de $S(n)$; soient H_M et H_N les hyperplans tangents à Q en deux points M et N distincts; soit $B = H_M \cap H_N$. On se propose d'étudier le sous-groupe de $GS(n, R)$ formé des automorphismes projectifs de Q qui laissent invariants tous les points de B , ainsi que M et N . Au moyen d'un automorphisme projectif de $S(n)$, on peut se ramener au cas où les éléments considérés sont définis par les équations suivantes, où x_0, \dots, x_n sont les coordonnées dans R^{n+1} .

$$\begin{aligned}
 F(Q) : \quad & \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - x_0 x_n \leq 0 \quad (x_0 > 0); \\
 F(M) : \quad & x_0 = x_1 = \dots = x_{n-1} = 0 \quad (x_n > 0); \\
 F(N) : \quad & x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad (x_0 > 0); \\
 \{O\} \cup F(H_M) : & x_0 = 0; \\
 \{O\} \cup F(H_N) : & x_n = 0; \\
 \{O\} \cup F(B) : & x_0 = x_n = 0.
 \end{aligned}$$

L'image par i (cf. chap. 1, § 1) du sous-groupe cherché est l'ensemble des transformations qui s'écrivent

$$\begin{aligned}
 x'_0 &= \lambda x_0 \quad (\lambda \neq 0), \\
 x'_n &= x_n / \lambda, \\
 x'_i &= x_i \quad \text{pour } r \leq i \leq n - 1.
 \end{aligned}$$

Nous appellerons une telle transformation *dilatation* de source M , de but N , de rapport λ le long de l'ellipsoïde Q .

Le sous-groupe cherché est isomorphe à celui des homothéties de la droite affine; il comprend deux composantes connexes : celle de l'identité est un sous-groupe. La fermeture du sous-groupe dans $MS(n, R)$ est homéomorphe à un cercle; les deux composantes connexes du sous-groupe forment deux arcs ouverts de ce cercle limités à deux endomorphismes dégénérés correspondant à la valeur nulle ou infinie du rapport : l'un ($\lambda = \infty$) est l'endomorphisme dégénéré de noyau H_M et d'image N , l'autre l'endomorphisme dégénéré de noyau H_N et d'image M .

(Il est clair qu'un endomorphisme dont l'image est un point est complètement défini par la donnée de ce point et de son noyau).

REMARQUE 1. — La dilatation de source M , de but N , de rapport λ le long de l'ellipsoïde Q s'identifie à la dilatation de source N , de but M , de rapport $\frac{1}{\lambda}$ le long de l'ellipsoïde Q .

Introduisons ici une notation qui nous sera utile au paragraphe 3, définition 4.

Soient Q' un ellipsoïde de $S(n)$; M' et N' deux points de sa frontière, p un nombre réel positif. Nous allons définir un ellipsoïde noté $Q'(p, M', N')$. Soit $g \in GS(n, R)$ tel que

$$gG' = Q, \quad gM' = M, \quad gN' = N,$$

où Q, M, N sont définis par les équations données ci-dessus.

$gQ'(p, M', N')$ est l'ellipsoïde $Q(p, M, N)$ défini par les équations

$$F(Q(p, M, N)) : \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 - px_0x_n \leq 0 \quad (x_0 > 0).$$

Il est clair que la définition de $Q'(p, M', N')$ est indépendante du choix de g .

Nous pouvons maintenant énoncer la

REMARQUE 2. — La dilatation de source M' , de but N' , de rapport λ le long de $Q'(p, M', N')$ s'identifie à la dilatation de source M' , de but N' , de rapport λ le long de Q' .

THÉORÈME 1. — Soit $h_0 \in MS(n-1, R)$ limite d'un filtre (h_i) sur $GS(n-1, R)$.

1° Pour tout compact $K \subset S(n-1)$ qui ne rencontre pas $N(h_0)$ la restriction de $T(h_i)$ à K converge uniformément vers la restriction de $T(h_0)$ à K .

2° Pour tout compact $K \subset S(n-1)$ qui ne rencontre pas $I(h_0)$, l'image réciproque de K par $T(h_i)$ tend à rentrer dans tout voisinage de $N(h_0)$.

3° Soit A une partie de $S(n-1)$ telle que

$$\mathring{A} \cap N \neq \emptyset;$$

on peut trouver une partie $B \subset A$ telle que $T(h_i)B$ tende vers $I(h_0)$.

4° Soit A une partie de $S(n-1)$ telle que

$$\mathring{A} \cap I(h_0) = B \neq \emptyset;$$

et soit K une partie compacte de l'image réciproque de B par $T(h_0)$ ($K \cap N(h_0) = \emptyset$). L'image réciproque de A par h_i tend à contenir K .

DÉMONSTRATION DU 1°. — D'après BOURBAKI (Topologie générale, chap. X, § 2, théorème 2), il revient au même de prouver ceci : soit A un sous-ensemble compact de $MS(n-1, R)$ qui ne rencontre le complémentaire de $GS(n-1, R)$ qu'en un point h_0 . Soit $K \subset S(n-1)$ un compact qui ne rencontre pas $N(h_0)$. Alors, l'application $A \times K \rightarrow S(n-1)$ qui transforme (h, x) dans $T(h).x$ est continue. Or, cette application se factorise comme suit : relevons d'abord A en

$$A' \subset S(n^2-1), \quad \text{d'où} \quad A \times K \rightarrow A' \times K;$$

les opérations de $M(n, R)$ dans R^n [dans lequel on plonge $S(n-1)$] définissent une application continue $A' \times K \rightarrow R^n - \{O\}$; l'application $A \times K \rightarrow S(n-1)$ est alors composée de trois applications continues :

$$A \times K \rightarrow A' \times K \rightarrow R^n - \{O\} \rightarrow S(n-1),$$

donc est continue.

DÉMONSTRATION DU 2°. — Nous devons prouver ceci : soit U_N un voisinage de $N(h_0)$: on peut trouver i tel que, pour $j > i$, l'image réciproque de K par $T(h_j)$ appartienne à U_N .

Supposons qu'il en soit autrement : on pourrait trouver des j arbitrairement grands tels que l'image réciproque de K par $T(h_j)$ contienne un point $m_j \in \bigcap U_N$, c'est-à-dire tels qu'on ait

$$T(h_j) \bigcap U_N \cap K \neq \emptyset.$$

Or, d'après 1°, la restriction de $T(h_j)$ à $\bigcap U_N$ converge uniformément vers la restriction de $T(h_0)$ à $\bigcap U_N$: en particulier, on peut trouver i tel que, pour $j > i$, on ait

$$T(h_j) \bigcap U_N \subset \bigcap K.$$

Car $\bigcup K$ est un voisinage de $I(h_0)$. Ceci contredit l'hypothèse faite et démontre donc 2° par l'absurde.

DÉMONSTRATION DU 3°. — Soit B un compact tel que $B \cap N(h_0) = \emptyset$ et que la restriction à B de l'application canonique de $S(n-1) - N(h_0)$ sur $S(n-1)/N(h_0)$ soit une surjection : $T(h_i)B$ tend vers $I(h_0)$ d'après 1°. Pour démontrer 3°, il suffit donc de trouver dans A un tel compact B . Soient $m \in \dot{A} \cap N$, V un voisinage fermé de m contenu dans A , H une sous-variété linéaire de $S(n-1)$ telle que

$$\dim H + \dim N(h_0) = n - 1, \quad H \cap N(h_0) = \{m\};$$

l'intersection B de H avec la frontière de V est un compact convenable. En effet.

$$B \cap N(h_0) = \emptyset$$

et B rencontre toute demi-variété de frontière $N(h_0)$.

DÉMONSTRATION DU 4°. — $T(h_0)K$ est une partie compacte de B ; A est un voisinage de $T(h_0)K$: d'après 1°, on peut donc trouver i tel que, pour tout $j > i$, on ait

$$h_i K \subset A.$$

Soit h un endomorphisme projectif de $S(n-1)$, qui ne soit pas un élément de $GS(n-1, R)$. Pour un compact K quelconque de $S(n-1)$, il est en général impossible de définir l'image de K par la transformation $T(h)$. En revanche, en vertu de la compacité de l'espace des parties compactes de l'espace compact $S(n-1)$, on peut, de toute suite infinie d'automorphismes projectifs, extraire une sous-suite (h_i) telle que chacune des suites $T(h_i) \cdot K_p$ soit convergente (les compacts K_p étant donnés en nombre fini, ou même en infinité dénombrable).

A ce sujet, voici une proposition dont il sera fait usage au paragraphe 3 :

PROPOSITION 1. — Soit (h_i) un filtre sur $GS(n-1, S)$ [resp. $GP(n-1, R)$], qui converge dans $MS(n-1, R)$ vers un point h_0 [resp. qui converge dans $MP(n-1, R)$ vers un point h'_0], de noyau N et d'image I . Soit W un convexe compact de l'espace $S(n-1)$ [resp. de $P(n-1)$]; soit U un voisinage compact de $W \cap N$ supposé non vide; pour que $T(h_i) \cdot W$ ait une limite, il faut et il suffit que $T(h_i) \cdot (W \cap U)$ ait une limite, et ces deux limites sont alors égales.

DÉMONSTRATION. — Soit

$$A_i = T(h_i) \cdot (W \cap U),$$

$$B_i = T(h_i) \cdot \left(W \cap \overline{\bigcup U} \right).$$

Puisque $W \cap \overline{U}$ est un compact ne rencontrant pas N , les B_i ont une limite B (théorème précédent, 1°); B est l'image, par $T(h_0)$, de l'ensemble des demi-variétés passant par N , de dimension supérieure d'une unité à $\dim N$, et rencontrant $W \cap \overline{U}$. Or ces demi-variétés rencontrent aussi $W \cap (U - N)$ parce que W est convexe et que $W \cap N \neq \emptyset$. Il existe donc un compact $A' \subset W \cap U$ tel que $A' \cap N = \emptyset$ et que $T(h_0).A' = B$, et l'on a $B = \lim T(h_i).A'$. Si la limite des A_i existe, elle contient $B = \lim B_i$, et par suite les $T(h_i).W = A_i \cup B_i$ ont pour limite la limite des A_i .

Démontrons maintenant que, si les $T(h_i).W = A_i \cup B_i$ ont une limite, les A_i ont même limite.

Posons $C_i = A_i \cap B_i$; on a $\lim C_i = \lim B_i = B$. En effet, toute demi-variété L de frontière N qui rencontre $W \cap \overline{U}$ rencontre aussi $W \cap \overline{U} \cap U$ [$L \cap W$ est un convexe, $L \cap W = (L \cap \overline{U}) \cup (L \cap U)$, avec $L \cap U \neq \emptyset$; $L \cap \overline{U} \neq \emptyset$].

Soit ν un entourage de la structure uniforme de l'ensemble des parties compactes de $S(n - 1)$: au-delà de i convenable, B_i et C_i sont voisins d'ordre ν ; donc aussi $A_i = A_i \cup C_i$ et $A_i \cup B_i$; il en résulte que A_i a même limite que $A_i \cup B_i$.

2. Espaces de corps et espaces de formes. — Voici d'abord les définitions des espaces étudiés et des applications considérées.

$E(n)$: désigne l'ensemble des corps convexes de $S(n)$ (cf. chap. 1 § 1, déf. 11) muni de la topologie d'espace localement compact induite par celle de $K(S(n))$ (cf. chap. 4, § 1, prop. 11).

$E(n; p)$: désigne l'ensemble des couples formés d'un corps convexe $W \in E(n)$ et d'une sous-variété L à p dimensions de $S(n)$, telle que $L \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$; $E(n; p)$ s'identifie à une partie ouverte de $E(n) \times G_{n+1, p+1}$, et est muni de la topologie induite par ce produit.

$E(n; p, 0)$: désigne l'ensemble des triples formés d'un corps convexe $W \in E(n)$, d'une sous-variété $L \in G_{n+1, p+1}$ ($L \cap \overset{\circ}{W} \neq \emptyset$), et d'un point $m \in L \cap \overset{\circ}{W}$. Si $G_{n+1, p+1, 1}$ désigne l'ensemble des couples formés d'une variété à p dimensions de $S(n)$ et d'un point de cette variété, $E(n; p, 0)$ s'identifie à un ouvert de $E(n) \times G_{n+1, p+1, 1}$, et est muni de la topologie induite.

$E(n; n-1)$: désigne l'ensemble des couples formés d'un corps convexe $W \in E(n)$ et d'un demi-espace H , tel que $W \in \hat{H}$; $E(n; n-1)$ est topologiquement identifié à un ouvert de $E(n) \times G'_{n+1, n}$ [où $G'_{n+1, n}$ désigne la sphère, ensemble des hémisphères de $S(n)$].

$E(n, p)$: désigne l'ensemble des parties convexes fermées, W , de $S(n)$, telles que $\nu(W) = -1$; $\sigma(W) = p$ (*cf.* chap. 3, § 3, prop. 7; σ dim du support, ν du noyau). Il est muni de la topologie induite par celle de l'ensemble des parties compactes de $S(n)$.

$E(n, p, 0)$: désigne l'ensemble des couples formés d'un convexe de $E(n, p)$ et d'un point intérieur à ce convexe (supposé muni de la topologie induite par celle de sa variété support). $E(n, p, 0)$ est topologiquement identifié par une partie de $E(n, p) \times S(n)$.

$GS(n, R)$ opère naturellement sur les E définis ci-dessus comme un groupe d'automorphismes continus; les quotients des E par la relation d'équivalence définie par G , sont désignés par \mathcal{X} , et appelés espaces de formes. Ainsi on a :

$\mathcal{X}(n) = E(n)/GS(n, R)$: espaces des formes convexes de dim n .

$\mathcal{X}(n; p) = E(n; p)/GS(n, R)$: espace des formes convexes de dim n , munies d'une section de dim p (si $p = 0$, on dira formes pointées).

$\mathcal{X}(n; p, 0) = E(n; p, 0)/GS(n, R)$: espaces des formes convexes de dim n , munies d'une section pointée de dim p .

REMARQUE 1. — On peut définir les espaces E à partir de $P(n)$ au lieu de $S(n)$, et passer au quotient par $GP(n, R)$; les quotients \mathcal{X} qu'on trouve sont isomorphes aux précédents.

REMARQUE 2. — L'automorphisme topologique D de $E(n)$ est compatible avec la relation d'équivalence définie par $GS(n, R)$ (*cf.* chap. 3, § 3, prop. 11 et remarque). D induit donc un automorphisme de $\mathcal{X}(n)$ que nous noterons encore D , et nous parlerons de formes duales.

D permet en outre de définir un isomorphisme topologique entre $E(n; 0)$ et $E(n; n-1)$ compatible avec la relation d'équivalence définie sur chacun des deux espaces par $GS(n, R)$. En effet, soit (W, m) un couple formé d'un corps convexe et d'un point intérieur, (DW, Dm) est un couple formé d'un corps convexe et d'un demi-espace dont l'intérieur contient DW ; c'est donc un élément de $E(n; n-1)$.

Si $(W', m') = (gW, gm)$, avec $g \in GS(n, R)$ on a

$$(DW', Dm') = (\Delta(g)DW, \Delta(g)Dm).$$

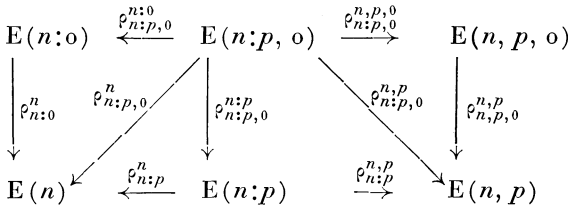
D permet donc de définir un isomorphisme topologique entre $\mathcal{X}(n; 0)$ et $\mathcal{X}(n; n-1)$. Nous parlerons ici encore de formes duales.

Définissons maintenant deux diagrammes d'applications reliant les espaces E et \mathcal{X} .

DÉFINITION DU DIAGRAMME T . — C'est un diagramme commutatif comprenant deux étages : à l'étage supérieur, six espaces E ; à l'étage inférieur, les six espaces \mathcal{X} correspondants; pour relier ces deux étages : les applications de chaque E sur son quotient.

Un espace E (resp. \mathcal{X}) sera noté $E(I)$ [resp. $\mathcal{X}(I)$], où I représente un ensemble de signes.

Étage des E :



Définissons les applications ρ_I^J :

Soit $(W, L, m) \in E(n; p, 0)$ ($L \in G_{n+1, p+1}$; $m \in L \cap \hat{W}$)

$$\begin{aligned}
 \rho_{n;p,0}^{n;0}(W, L, m) &= (W, m), \\
 \rho_{n;p,0}^{n;p}(W, L, m) &= (W, L), \\
 \rho_{n;p,0}^{n,p,0}(W, L, m) &= (W \cap L, m), \\
 \rho_{n;p,0}^{n,p}(W, L, m) &= (W \cap L), \\
 \rho_{n;p,0}^{n,p,0}(W, L, m) &= (W).
 \end{aligned}$$

Soit $(W, L) \in E(n; p)$ ($L \in G_{n+1, p+1}$; $L \cap \hat{W} \neq \emptyset$)

$$\begin{aligned}
 \rho_{n;p}^n(W, L) &= (W), \\
 \rho_{n;p}^{n,p}(W, L) &= (W \cap L).
 \end{aligned}$$

Soit $(W, m) \in E(n; 0)$ ($m \in \hat{W}$)

$$\rho_{n;0}^n(W, m) = (W).$$

Soit $(W, m) \in E(n, p, 0)$ ($W \in E(n, p)$)

$$\rho_{n,p,0}^{n,p}(W, m) = (W).$$

Étage des \mathcal{X} . — Il comprend les espaces $\mathcal{X}(I)$ et les applications r_I^J correspondant aux espaces $E(I)$ et aux applications ρ_I^J de l'étage supérieur; si π_I désigne la projection de $E(I)$ sur $\mathcal{X}(I)$ les r_I^J sont définis par les relations

$$r_I^J \circ \pi_I = \pi_J \circ \rho_I^J.$$

DÉFINITION DU DIAGRAMME T' :

$$\begin{array}{ccc} E(n; n-1) & \xrightarrow{\rho_{n;n-1}^n} & E(n) \\ \downarrow \pi_{n;n-1} & & \downarrow \pi_n \\ \mathcal{X}(n; n-1) & \xrightarrow{r_{n;n-1}^n} & \mathcal{X}(n) \end{array}$$

On a

$$\begin{aligned} \rho_{n;n-1}^n(W, H) &= (W), \\ r_{n;n-1}^n \circ \pi_{n;n-1} &= \pi_n \circ \rho_{n;n-1}^n. \end{aligned}$$

Le diagramme T' est isomorphe par D (cf. remarque 2) à une face du diagramme T :

$$\begin{array}{ccc} E(n; 0) & \xrightarrow{\rho_{n;0}^n} & E(n) \\ \downarrow \pi_{n;0} & & \downarrow \pi_n \\ \mathcal{X}(n; 0) & \xrightarrow{r_{n;0}^n} & \mathcal{X}(n) \end{array}$$

Dans ce qui suit, les applications π_I, ρ_I^f, r_I^f , seront notées π, ρ, r lorsque les indices seront superflus.

Avant d'étudier les diagrammes T et T' , donnons quelques résultats sur les applications ouvertes.

DÉFINITION 1. — Soient E un espace topologique, E' le quotient de E par une relation d'équivalence R , φ la surjection de E sur E' définie par R : R est dite ouverte, si l'application φ est ouverte.

Il est équivalent de dire que R est ouverte, ou que, dans E , la fermeture de toute partie saturée est saturée. Soient E, E' deux espaces topologiques, φ une surjection continue ouverte de E sur E' ; E' est quotient de E par la relation d'équivalence ouverte $e \approx e^0$ si $\varphi(e) = \varphi(e^0)$.

PROPOSITION 1. — Soient E, E', E'' trois espaces topologiques; φ (resp. φ' , resp. φ'') une surjection de source E (resp. E , resp. E') et de but E'' (resp. E' , resp. E''); $\varphi = \varphi'' \circ \varphi'$. Alors :

- 1° Si φ' et φ'' sont continues ouvertes, il en est de même de φ ;
- 2° Si φ' et φ sont continues ouvertes, il en est de même de φ'' .

Démontrons 2°. — Il faut montrer que tout ouvert de E' a pour image par φ'' un ouvert de E'' , et que tout ouvert de E'' a pour image réciproque par φ'' un ouvert de E' . Pour cela, on relève par φ' (resp. φ) les ouverts de E' (resp. E'') suivant les ouverts de E , et l'on redescend par φ (resp. φ') suivant un ouvert de E'' (resp. E').

PROPOSITION 2. — Soient E, B, B' trois espaces topologiques, une application ouverte de B dans B' ; φ_E l'application de $E \times B$ dans $E \times B'$, naturellement associée à φ . La restriction de φ_E à un ouvert de $E \times B$ est ouverte.

THÉORÈME 1. — *Toutes les applications du diagramme T sont des surjections continues ouvertes.*

Démonstration. — Il est clair que les π_I sont des surjections continues ouvertes, puisque ce sont des applications d'un espace E_I , sur son quotient par une relation d'équivalence, définie par un groupe opérant continûment dans E_I . D'après la proposition 1 (2°), il suffit de démontrer que les ρ_I^J sont des surjections continues ouvertes, pour le montrer des r_I^J .

Que les ρ_I^J soient continues et surjectives est évident : reste à établir qu'elles sont ouvertes.

$\rho_{n:0}^n$ (resp. $\rho_{n:p,0}^n$, resp. $\rho_{n:p}^n$) est ouvert, comme restriction à un ouvert de $E(n) \times S(n)$ [resp. $E(n) \times G_{n+1,p+1,1}$, resp. $E(n) \times G_{n+1,p+1}$] de la projection sur $E(n)$.

$\rho_{n:p,0}^{n:p}$ (resp. $\rho_{n:p,0}^{n:0}$) est une application ouverte comme restriction à un ouvert de $E(n) \times G_{n+1,p+1,1}$ de l'application naturelle sur $E(n) \times G_{n+1,p+1}$ [resp. $E(n) \times S(n)$].

Il est facile de voir que $\rho_{n:p,0}^{n:p}$ est une application ouverte : il suffit pour cela, étant donné $(W, m) \in E(n, p, 0)$, de construire une application continue f dans $E(n, p, 0)$ d'un voisinage de W dans $E(n, p)$. Soient L le support de W et H une variété à $n - p$ dimensions telle que $L \cap H = \{m\}$; on prendra $f(W') = (W', W' \cap H)$.

La démonstration sera achevée quand nous aurons établi que $\rho_{n:p}^{n:p}$ est une application ouverte.

Soient donc $W \in E(n, p)$; L son support, $W' \in E(n)$ tel que

$$W \cap L = W_L \quad \text{et} \quad W' \cap L \neq \emptyset.$$

Il suffit de définir une application continue f dans $E(n:p)$ d'un voisinage de W_L , de sorte que $f(W_L) = (W, L)$. Choisissons un hyperplan H , tel que $H \cap W = \emptyset$, et un point w de $W' \cap L$. Soient w' le point opposé à w ; $W'_L \in E(n, p)$, L' son support; nous poserons

$$f(W'_L) = (h(W, W'_L), L'),$$

où $h(W, W'_L)$ est ainsi défini : $h(W, W'_L)$ est l'enveloppe convexe de W'_L et de $g(W, W'_L)$, le plus grand homothétique de W , dans une homothétie de source (w, w') et de but H (§ 1, exemple 1), tel que son intersection avec L' soit inclus dans W'_L : nous désignerons par $\lambda(W, W'_L)$ le rapport de l'homothétie correspondante.

Pour montrer que f est défini continu sur un voisinage convenable de W_L , il suffit de montrer qu'il en est ainsi de $\lambda(W, W_{L'})$.

Notons λW (resp. $\lambda \hat{W}$) l'homothétique de W (resp. \hat{W}) dans l'homothétie de source (w, w') , de but H , de support λ ; désignons par \mathcal{A} l'hémisphère ouvert de frontière H contenant W . Comme domaine de définition de $\lambda(W, W_{L'})$, nous prendrons l'ensemble des $W_{L'}$ de support L' , tels que

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} \hat{W}\right) \cap L' &\neq \emptyset, \\ \left(\frac{1}{2} \hat{W}\right) \cap L' &\subset W_{L'}, \\ W_{L'} &\subset \mathcal{A}, \end{aligned}$$

il est clair que c'est là un voisinage de W_L ; reste à établir la continuité de $\lambda(W, W_{L'})$.

Désignons par $F(W_{L'})$ la frontière de $W_{L'}$, considérée comme partie de L' : $F(W_{L'})$ est un compact, fonction continue de $W_{L'}$. $\lambda(W, W_{L'})$ peut être défini comme la coupure entre les λ tels que

$$\lambda W \cap L' \subset W_{L'}$$

et les λ tels que

$$F(W_{L'}) \cap \lambda W \neq \emptyset.$$

La continuité de $\lambda(W, W_{L'})$ résulte maintenant de ce que, pour tout $\lambda < \lambda(W, W_{L'})$ [resp. $\lambda > \lambda(W, W_{L'})$], il existe un voisinage O' de $W_{L'}$ dans $E(n, p)$ tel que, pour tout $W_{L''} \in O'$, on ait :

$$\lambda < \lambda(W, W_{L''}) \quad [\text{resp. } \lambda > \lambda(W, W_{L''})],$$

COROLLAIRE. — *Toutes les applications du diagramme T' sont des surjections continues ouvertes.*

En effet, T' est isomorphe à une face de T .

PROPOSITION 3. — Soient E un espace topologique, G un groupe topologique opérant continûment sur E , R la relation d'équivalence définie sur E par G . Soit F un ouvert de E , qui rencontre toutes les classes d'équivalence de $E \bmod R$; soit R_F la relation d'équivalence induite par R sur F : l'application $F/R_F \rightarrow E/R$ définie par l'injection $F \rightarrow E$ est un homéomorphisme (BOURBAKI, *Topologie générale*, chap. I, § 9, prop. 6).

PROPOSITION 4. — $\mathfrak{Q}(n, p, 0)$ [resp. $\mathfrak{Q}(n, p)$] est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{Q}(p; 0)$ [resp. $\mathfrak{Q}(p)$].

Soit L une variété à p dimensions $L \in G_{n+1, p+1}$: au moyen d'un isomorphisme de $\mathcal{S}(p)$ et de L , identifions $E(p)$ avec l'espace des parties convexes fermées W_L de L telles que $\nu(W_L) = -1$; $\sigma(W_L) = p$. Identifions de même

$E(p;o)$ avec l'espace des couples d'un tel convexe W_L , et d'un point m intérieur à W_L pour la topologie de L . $E(p;o)$ [resp. $E(p)$] est ainsi plongé dans $E(n, p, o)$ [resp. $E(n, p)$].

Désignons par R_p la relation d'équivalence définie par $GS(n)$ sur $E(n, p, o)$ [ou $E(n, p)$] ainsi que celle induite par elle sur $E(p;o) \subset E(n, p, o)$ [ou sur $E(p) \subset E(n, p)$]. Il est clair qu'en tant qu'ensembles, $\mathfrak{X}(n, p, o)$ et $\mathfrak{X}(p;o)$ sont canoniquement identifiés avec $E(p;o)/R_p$; de même $\mathfrak{X}(n, p)$ et $\mathfrak{X}(p)$ avec $E(p)/R_p$. Topologiquement, $\mathfrak{X}(n, p)$ et $\mathfrak{X}(p)$ sont quotients de $\mathfrak{X}(n, p, o)$ et $\mathfrak{X}(p;o)$ par la même relation d'équivalence (cf. théorème 1) : il nous suffit donc d'établir que $\mathfrak{X}(n, p, o)$ et $\mathfrak{X}(p;o)$, c'est-à-dire $E(n, p;o)/R_p$ et $E(p;o)/R_p$, sont isomorphes topologiquement. Il est évident que la topologie de $E(p;o)/R_p$ est plus fine que celle de $E(n, p, o)/R_p$: reste à montrer que l'application

$$E(n, p, o)/R_p \rightarrow E(p;o)/R_p$$

est continue.

Soient B une sous-variété de $S(n)$ à $n - p - 1$ dimensions, telle que

$$L \cap B = \emptyset,$$

et K un voisinage ouvert de L dans $S(n)$ tel que $K \cap B = \emptyset$.

Appellons $F_p(n)$ l'ensemble des éléments de $E(n, p, o)$ dont la variété support appartient à K : $F_p(n)$ est un voisinage ouvert de $E(p;o)$ dans $E(n, p, o)$. Désignons par R_p la relation d'équivalence induite sur $F_p(n)$ par celle de $E(n, p, o)$ déjà notée R_p .

D'après la proposition 3, $E(n, p, o)/R_p$ et $F_p(n)/R_p$ sont topologiquement isomorphes : or il suffit de projeter K sur A à partir de B pour appliquer continûment $F_p(n)$ sur $E(p;o)$: l'application canoniquement définie de $F_p(n)/R_p$ sur $E(p;o)/R_p$ est donc continue. La démonstration est achevée.

THÉORÈME 2. — $\mathfrak{X}(n;o)$; $\mathfrak{X}(n;p, o)$; $\mathfrak{X}(n; n-1)$ sont des compacts métrisables; $\mathfrak{X}(n; n-1)$ est canoniquement isomorphe à $\mathfrak{X}(n)$.

Pour démontrer que les trois espaces $\mathfrak{X}(n;o)$, $\mathfrak{X}(n;p, o)$, $\mathfrak{X}(n; n-1)$ sont compacts, il suffit d'établir que le groupe $GS(n, R)$ opère sur $E(n;o)$, $E(n;p, o)$, $E(n; n-1)$ en satisfaisant aux conditions I et II du chapitre 4, paragraphe 2. D'après la remarque 2, il suffit d'établir que $GS(n, R)$ opère sur l'un des espaces $E(n;o)$ ou $E(n; n-1)$ en satisfaisant à la condition I (resp. II) pour établir qu'il en est de même sur l'autre.

1° Montrons que $GS(n, R)$ opère sur $E(n; n-1)$, donc aussi sur $E(n;o)$ en satisfaisant à la condition I.

Soient H un demi-espace fermé de $S(n)$ et h sa frontière. \hat{H} est muni canoniquement d'une structure d'espace affín à n dimensions. Soit E_H le sous-espace des couples $(W, H) \in E(n; n-1)$, où W désigne un corps convexe inclus dans \hat{H} . Soit G_H le sous-groupe de $GS(n, R)$ qui laisse H

invariant. Un isomorphisme de R^n avec \hat{H} , préservant la structure affine, induit un isomorphisme de l'espace $EA(n)$ des corps convexes de R^n , muni du groupe d'automorphisme $GA(n, R)$, (groupe affine), avec E_H muni du groupe G_H .

On sait (chap. 4, § 2, prop. 5) que $GA(n, R)$ opère sur l'espace des corps convexes de R^n en satisfaisant à la condition I; il en est donc de même de G_H opérant sur E_H , et aussi de $GS(n, R)$ opérant sur $E(n; n-1)$. Remarquons qu'un isomorphisme de R^n avec \hat{H} nous permet aussi d'appliquer $\mathcal{C}(n)$ dans $\mathcal{X}(n; n-1)$: cette application est continue et surjective; elle ne dépend pas du choix du demi-espace H , ni de l'isomorphisme de \hat{H} avec R^n .

2° Montrons maintenant que la condition II est satisfaite par $GS(n, R)$ opérant sur $E(n; 0)$, donc aussi sur $E(n; n-1)$.

Soit Γ le graphe de l'opération de $GS(n, R)$ sur $E(n; 0)$:

$$\Gamma \subset E(n; 0) \times E(n; 0) \times GS(n, R);$$

$(e_1, e_2, g) \in \Gamma$ si et seulement si $e_2 = g e_1$. Il faut montrer que, pour tout $(e_1, e_2) \in E(n; 0) \times E(n; 0)$, il existe un voisinage compact V , dont l'image réciproque dans Γ soit compacte. Nous allons définir V comme produit de deux voisinages compacts V_1 et V_2 de e_1 et e_2 . Soit $e_1 = (W_1, \omega_1)$; $\omega_1 \in \hat{W}_1$: on choisira deux corps convexes W'_1 et W''_1 , et un voisinage compact K_1 de ω_1 , dans $S(n)$, vérifiant les relations suivantes:

$$W'_1 \subset \hat{W}_1, \quad W_1 \subset \hat{W}''_1, \quad K_1 \subset \hat{W}'_1.$$

Alors V_1 sera l'ensemble des $e_{1i} = (W_{1i}, \omega_{1i})$ qui vérifient les relations

$$W'_1 \subset W_{1i}, \quad W_{1i} \subset W''_1, \quad \omega_{1i} \in K_1.$$

Et de même pour V_2 en remplaçant par 2 l'indice 1.

Si l'image réciproque de V dans Γ n'est pas compacte, on en peut extraire une suite de triples:

$$(e_{1i}, e_{2i}, g_i), \quad \text{avec } g_i e_{1i} = e_{2i}; \quad e_{1i} = (W_{1i}, \omega_{1i}); \quad e_{2i} = (W_{2i}, \omega_{2i}),$$

où g_i converge vers un endomorphisme de noyau N non vide, d'image I (cf. § 1), et où W_{1i} converge vers W_1^0 , et W_{2i} vers W_2^0 .

Pour démontrer que pareille situation est impossible, nous utiliserons un lemme, dont la démonstration sera donnée, quand sera achevée celle du théorème.

LEMME. — Soit $\{W_{1i}\}$ (resp. $\{W_{2i}\}$) un filtre sur $E(n)$ qui converge vers W_1^0 (resp. W_2^0); soit $\{g_i\}$ un filtre sur $GS(n, R)$ qui converge dans $MS(n, R)$ vers d (de noyau non vide N , et d'image I), et tel que $g_i W_{1i} = W_{2i}$; alors N

est une variété d'appui de W_1^0 , et $w_2^0 \cap I$ est un convexe de la frontière de W_2^0 dont le support est I .

Il est clair que $K_2 \subset \hat{W}_2^0$; que $K_1 \subset \hat{W}_1^0$; du théorème 1 (1°) du paragraphe 1, il résulte que $g_i K_1$ tend à rentrer dans tout voisinage de I , donc, d'après le lemme, que, pour i convenable, $g_i K_1 \cap K_2$ est vide. Or cela contredit l'hypothèse faite que

$$w_{1i} \in K_1; \quad g_i w_{1i} = w_{2i} \in K_2.$$

3° Montrons que l'application $\rho_{n:p,0}^{n:0}$ (§ 1, diagramme T) est propre : il en résultera (chap. 4, § 2, prop. 4), que $GS(n, R)$ opère sur $E(n:p, 0)$ en satisfaisant aux conditions I et II.

$E(n:p, 0)$ peut être identifié à une partie fermée de $E(n:0) \times G_{n+1,p+1}$: au triple $(W, L, w) \in E(n:p, 0)$, on associe

$$((W, w), L) \in E(n:0) \times G_{n+1,p+1}.$$

Parce que $G_{n+1,p+1}$ est compact, la projection de $E(n:0) \times G_{n+1,p+1}$ sur $E(n:0)$ est propre : l'image réciproque compacte dans $E(n:0) \times G_{n+1,p+1}$ d'un compact de $E(n:0)$ coupera $E(n:p, 0)$ qui est fermé suivant un compact, d'où le 3°.

4° Les espaces compacts $\mathcal{X}(n:0)$, $\mathcal{X}(n; n-1)$, $\mathcal{X}(n:p, 0)$ sont métrisables d'après la remarque qui suit la proposition 2 du paragraphe 2 du chapitre 4. La surjection continue de $\mathcal{A}(n)$ sur $\mathcal{X}(n; n-1)$ définie à la fin du 1°, est un isomorphisme topologique, puisque $\mathcal{A}(n)$ et $\mathcal{X}(n; n-1)$ sont compacts.

LEMME. — Nous allons maintenant démontrer le lemme du théorème 2, 2°, en le complétant.

a. N est une variété d'appui de W_1^0 (donc $N \cap \hat{W}_1^0 = \emptyset$, puisque $\dim N < n$).

$N \cap W_1^0$ n'est certainement pas vide, sinon (§ 1, théorème, 1°) W_{2i} tendrait vers un convexe de I , ce qui est absurde, puisque $\dim I < n$. Montrons que N est variété d'appui de W_1^0 . Supposons le contraire : on pourrait trouver deux points p_1, q_1 ($p_1, q_1 \in W_1^0$; $p_1, q_1 \notin N$) tels que le segment (p_1, q_1) coupe N : les images p_2, q_2 de p_1, q_1 par $T(d)$ sont deux points diamétralement opposés de I , qui ne peuvent donc appartenir au corps convexe W_0^2 ; or p_1, q_2 sont limites de points p_{1i}, q_{1i} de W_{1i} ; comme $p_1 \notin N$, $q_1 \notin N$, $g_i p_{1i}$ et $g_i q_{1i}$ tendent vers p_2 et q_2 (§ 1, théorème, 1°), qui devraient appartenir à W_1^0 . Nous avons démontré par l'absurde que N est variété d'appui de W_1^0 .

b. I est le support du convexe $I \cap W_2^0$.

Soit K_1 un compact inclus dans \hat{W}_1^0 ($K_1 \neq \emptyset$) : pour i convenable, $K_1 \subset W_{1i}$; et (§ 1, théorème, 1°) $g_i K_1 \subset W_{2i}$ tend vers une partie de $I \cap W_2^0$, qui engendre I .

c. $I \cap \hat{W}_2^0$ est vide.

Soit $C = I \cap \hat{W}_2^0$: nous allons montrer que l'image réciproque de C par $T(d)$ appartient à W_1^0 : il en résultera que C est vide, car son image réciproque est réunion de demi-variétés ouvertes (limitées à N) de $\dim \geq 1$, et qu'une telle demi-variété ne peut appartenir à un corps convexe. Nous montrerons ceci : soit K un compact de $S(n)$ tel que $T(d)K \subset C$; $K \cap N = \emptyset$, alors $K \subset V_1^0$. Soit A un voisinage fermé de $T(d)K$, tel que $A \subset W_2^0$; posons $\hat{A} \cap I = B$ ($T(d)K \subset B$). D'après le 4° du théorème du paragraphe 1, l'image réciproque de A par g_i tend à contenir K ; or W_{2i} tend à contenir A (car W_{2i} tend vers W_2^0) : donc W_{1i} tend à contenir K et $K \subset W_1^0$. La démonstration du lemme est achevée.

REMARQUE. — On pourrait conjecturer que I est une variété d'appui de W_2^0 : mais il n'en est pas toujours ainsi, comme le montre le contre-exemple qui suit, où l'on construit une suite de corps convexes : $W_n = g_n W$ convergeant vers un corps convexe W_2^0 , où les g_n forment une suite qui converge vers un endomorphisme projectif dont l'image I n'est pas variété d'appui de W_2^0 .

CONTRE-EXEMPLE. — Sur la sphère projective $S(2)$ rapportée à ses trois coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 , on donne deux suites infinies de points :

$$M_n = (1, \varepsilon_n^2, \varepsilon_n^3); \quad M'_n = (1, -\varepsilon_n^2, \varepsilon_n^3);$$

les ε_n étant ainsi définis :

$$\varepsilon_0 = 1; \quad \varepsilon_1 \in]0, 1[; \quad \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n^2.$$

L'enveloppe convexe fermée des $\{M_n, M'_n\}$ est un corps convexe W . En effet, les points M_n appartiennent au triangle de sommets les points $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$; de même, les points M'_n au triangle de sommets $(1, 0, 0)$, $(1, -1, 0)$, $(1, -1, 1)$ l'enveloppe convexe de ces deux triangles est le quadrilatère $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 1)$, $(1, -1, 0)$ qui est un corps convexe. W admet pour points angulaires tous les points M_n et M'_n . Posons encore

$$g(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^{-3} \end{vmatrix}$$

$g(\varepsilon)$ ainsi écrite est une matrice de $GL(3, R)$: nous noterons encore $g(\varepsilon)$ la transformation correspondante de $GS(2, R)$. Nous allons montrer que $g(\varepsilon_n)W = g_n W$ a une limite quand $n \rightarrow \infty$, et que cette limite est le triangle ABB' ($A : (1, 0, 0)$; $B : (0, 1, 1)$; $B' : (0, -1, 1)$). g_n a pour limite un endomorphisme de noyau la droite $x_3 = 0$ et d'image le point $(0, 0, 1)$: ce point appartient à l'intérieur du côté BB' , de ABB' , et ne peut donc constituer une variété d'appui, d'où le contre-exemple. Reste à montrer que $g_n W$ tend vers ABB' . En effet, $g_n M_n = (\varepsilon_n, 1, 1)$ tend vers B quand $n \rightarrow \infty$;

$g_n M_{n+1} = (\varepsilon_n, \varepsilon_n^2, \varepsilon_n^3)$ tend vers A quand $n \rightarrow \infty$; de même, $g_n M'_n$ tend vers B' , $g_n M'_{n+1}$ vers A . $g_n M$ contient donc un quadrilatère $g_n M_n, g_n M_{n+1}, g_n M'_{n+1}, g_n M'_n$ qui tend vers ABB' ; de plus, $g_n W$ appartient, comme W , à la région de $S(2)$, où $x_1 \geq 0; x_3 \geq 0$; enfin, $(g_n M_n, g_n M_{n+1})$ est un segment de la frontière de $g_n W$, ainsi que $(g_n M'_n, g_n M'_{n+1})$; les droites supports de ces segments délimitent avec $x_1 = 0$ et $x_3 = 0$ un quadrilatère Q_n qui contient $g_n W$ et tend aussi vers ABB' quand $n \rightarrow \infty$: le résultat annoncé en résulte.

PROPOSITION 5. — Soit G_W le groupe des automorphismes projectifs d'un corps convexe $W (W \in E(n))$: G_W opère sur l'intérieur \dot{W} de W , en satisfaisant à la condition II du chapitre 4, paragraphe 2.

\dot{W} se plonge isomorphiquement dans $E(n; 0)$ par l'application suivante : à $w \in \dot{W}$, on associe le couple $(W, w) \in E(n; 0)$. De même, G_W est une partie fermée de $GS(n, R)$. Compte tenu de ces deux plongements, le graphe H_G de l'opération de G_W sur \dot{W} , n'est autre que l'intersection de $G_W \times \dot{W} \times \dot{W}$, avec le graphe $\Gamma[\Gamma \subset GS(n) \times E(n; 0) \times E(n; 0)]$ de l'opération de $GS(n, R)$ sur $E(n; 0)$. L'image réciproque dans H_G d'un compact K de $\dot{W} \times \dot{W}$ n'est autre que l'intersection de $G_W \times K$ et de l'image réciproque de K dans Γ . D'après le théorème 2 (1°), c'est l'intersection d'un compact et d'un fermé; c'est donc un compact, ce qui établit la proposition.

Nous allons définir une application, appelée *somme*, et notée $+$, du produit $\mathcal{X}(n_1) \times \mathcal{X}(n_2)$ dans $\mathcal{X}(n_1 + n_2 + 1)$.

DÉFINITION 2. — Soient $p_1 \in \mathcal{X}(n_1); p_2 \in \mathcal{X}(n_2); L_1, L_2$, deux sous-variétés de $S(n_1 + n_2 + 1)$, de dimensions respectives n_1 et n_2 , et dont la somme (chap. 3, § 2) est $S(n_1 + n_2 + 1)$. Soit W_1 (resp. W_2) un corps convexe de L_1 (resp. L_2) de forme p_1 (resp. p_2). La *somme* $p_1 + p_2$ est la forme de l'enveloppe convexe de W_1 et W_2 .

Montrons que $p_1 + p_2$ est ainsi bien défini.

α . L'enveloppe convexe W de W_1 et W_2 est un corps. Il faut montrer que W est d'intérieur non vide, et qu'il ne contient pas de couples de points diamétralement opposés.

Soient T_1 un n_1 -simplexe, $T_1 \subset W_1, T_2$ un n_2 -simplexe, $T_2 \subset W_2$; l'enveloppe convexe de T_1 et T_2 est un $n_1 + n_2 + 1$ -simplexe contenu dans W : \dot{W} est donc non vide.

Supposons que W contienne un couple de points diamétralement opposés m et m' : nous allons montrer que cette hypothèse est absurde.

W est réunion de l'ensemble des segments joignant un point de W_1 à un point de W_2 ; et tout point de $W - (W_1 \cup W_2)$ appartient à un seul segment joignant un point de L_1 à un point de L_2 . Il est clair que m ne peut appartenir à W_1 (resp. W_2), sinon il en serait de même de m' , et W_1 (resp. W_2) ne serait pas un corps.

Supposons que $m \in (W - (W_1 \cup W_2))$, et soient $m_1 \in W_1$, $m_2 \in W_2$, tels que $m \in (m_1, m_2)$; m' ne peut appartenir qu'au segment (m'_1, m'_2) joignant les points diamétralement opposés à m_1 et m_2 respectivement. Mais alors, ni W_1 ni W_2 ne sont des corps, ce qui est absurde, d'où la démonstration.

b. $p_1 + p_2$ ne dépend pas du choix de L_1, L_2, W_1, W_2 . Soient W_1, W_2 de support L_1, L_2 ($L_1 + L_2 = S(n_1 + n_2 + 1)$) et W'_1, W'_2 de support L'_1, L'_2 ($L'_1 + L'_2 = S(n_1 + n_2 + 1)$). Supposons de plus

$$\pi(W_1) = \pi(W'_1) = p_1; \quad \pi(W_2) = \pi(W'_2) = p_2.$$

Nous allons montrer qu'il existe un automorphisme projectif de $S(n_1 + n_2 + 1)$ qui transforme W , enveloppe convexe de W_1 et W_2 , en W' , enveloppe convexe de W'_1 et W'_2 .

Soit h un automorphisme projectif de $S(n_1 + n_2 + 1)$, tel que

$$hL_1 = L'_1; \quad hL_2 = L'_2.$$

On peut trouver un automorphisme projectif g_1 (resp. g_2) de L'_1 (resp. L'_2) tel que

$$g_1 \circ h W_1 = W'_1 \quad (\text{resp. } g_2 \circ h W_2 = W'_2).$$

Il existe un automorphisme unique g de $S(n_1 + n_2 + 1)$ qui laisse L'_1 et L'_2 globalement invariants, et induise sur L'_1 (resp. L'_2), g_1 (resp. g_2). Il est clair qu'on a

$$g \circ h W = W'.$$

DÉFINITION 3. — Soit $A_1 \subset \mathcal{X}(n_1)$; $A_2 \subset \mathcal{X}(n_2)$. Nous noterons $A_1 + A_2$, et appellerons somme de A_1 et A_2 , la partie A de $\mathcal{X}(n_1 + n_2 + 1)$ ainsi définie

$$A = \{p \mid \exists p_1, p_2 : p_1 \in A_1; p_2 \in A_2; p_1 + p_2 = p\}.$$

PROPOSITION 6. — L'application somme définie ci-dessus (déf. 2) est continue.

Dans $S(n_1 + n_2 + 1)$, faisons choix de deux sous-variétés linéaires L_1 et L_2 , de dimensions respectives n_1 et n_2 , et de somme $S(n_1 + n_2 + 1)$. Notons $E(L_1)$ [resp. $E(L_2)$] l'espace des corps convexes de L_1 (resp. L_2). Notons \mathcal{E} l'application de $E(L_1) \times E(L_2)$ dans $E(n_1 + n_2 + 1)$ définie par l'enveloppe convexe (*cf.* déf. 2, *a*).

$\pi_{n_1+n_2+1} \circ \mathcal{E}$ est une application de $E(L_1) \times E(L_2)$ dans $\mathcal{X}(n_1 + n_2 + 1)$

compatible avec la relation d'équivalence définie sur $E(L_1)$ [resp. $E(L_2)$] par la projection sur $\mathcal{X}(n_1)$ [resp. $\mathcal{X}(n_2)$]; $\pi_{n_1+n_2+1} \circ \mathcal{E}$ se factorise en la projection de $E(L_1) \times E(L_2)$ sur $\mathcal{X}(n_1) \times \mathcal{X}(n_2)$, et l'application somme : pour que cette dernière est continue, il suffit donc d'établir que $\pi_{n_1+n_2+1} \circ \mathcal{E}$ est continue : or π est continue d'après le théorème 1, et \mathcal{E} d'après le chapitre 4, paragraphe 1, proposition 13 : la démonstration est achevée.

REMARQUE 3. — Il résulte de ce qui précède que l'espace \mathfrak{X} , somme directe des $\mathfrak{X}(n)$, est muni d'une structure de monoïde abélien topologique gradué par $n + 1$. $\mathfrak{X}(-1)$ se compose d'un seul élément : la forme vide, qui est une unité de degré 0. $\mathfrak{X}(0)$ ne contient que la forme point.

Il résulte du chapitre 3, paragraphe 2, théorème 3, corollaire, que tout $p \in \mathfrak{X}$, peut s'écrire d'une façon et d'une seule comme somme de formes simples (i. e. qui ne puissent s'écrire comme somme de deux formes toutes deux différentes de la forme vide). En effet, si le corps W est enveloppe convexe de W_1, W_2 (convexes dont les supports sont d'intersection vide), \tilde{W} est somme de \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 au sens du chapitre 3, paragraphe 2, définition 5 (si \tilde{W}_1 et \tilde{W}_2 désignent l'intérieur du convexe pour la topologie de son support).

3. Formes adhérentes; applications à la recherche des formes balayables.

PROPOSITION 1. — *Les espaces $\mathfrak{X}(n)$ ($n \geq 2$) et $\mathfrak{X}(n:r)$ ($n \geq 2, r \geq 1$) ne sont pas séparés.*

Pour montrer qu'un espace est non séparé, il suffit de trouver un point M de cet espace tel que

$$\overline{\{M\}} \neq \{M\}.$$

Dans le cas de la proposition, les espaces \mathfrak{X} considérés sont des quotients des espaces E de même indice. Pour montrer que $\mathfrak{X}(n)$ [resp. $\mathfrak{X}(n:r)$] n'est pas séparé, il suffit donc de trouver un point $p \in \mathfrak{X}(n)$ [resp. $\mathfrak{X}(n:r)$] dont l'image réciproque dans $E(n)$ [resp. $E(n:r)$] ne soit pas un fermé. Nous aurons achevé la démonstration en construisant des exemples des deux situations suivantes :

a. W et W' sont deux corps convexes de $S(n)$, de formes distinctes :

$$\pi(W) \neq \pi(W');$$

$\{g_i\}$ est une suite d'automorphismes projectifs telle que $g_i W$ tende vers W' quand i tend vers l'infini.

b. (W, A) et (W', A') sont deux couples formés d'un corps convexe et d'une variété linéaire coupant son intérieur :

$$(W, A) \in E(n:r); \quad (W', A') \in E(n:r); \quad \pi(W, A) \neq \pi(W', A');$$

$\{g_i\}$ est une suite d'automorphismes projectifs telle que, quand i tend vers l'infini, $(g_i W, g_i A)$ tend vers (W', A') .

Nous allons construire simultanément des exemples des situations a et b.

W' est l'ellipsoïde Q déjà considéré au paragraphe 1, exemple 2, dont nous reprenons les notations.

Soit H un demi-espace fermé, tel que $M \in \overset{\circ}{H}$; $N \notin H$. W est l'intersection $Q \cap H$.

$A = A'$ est une variété linéaire de dimension r ($r \geq 1$), passant par M et N .

g_i est la dilatation de rapport i , le long de Q , de source M et de but N .

Il est clair que W et W' n'ont pas même forme, d'où il résulte qu'il en est de même des couples (W, A) , (W', A') .

Quand i tend vers l'infini, $g_i H$ tend vers un demi-espace fermé, de frontière H_N , contenant Q . Donc $g_i W$ tend vers W' , et $(g_i W, g_i A) = (g_i W, A)$ tend vers $(W', A') = (W', A)$.

La démonstration est ainsi achevée.

DÉFINITION 1. — Soit E un espace topologique.

a. Un point $P' \in E$ est dit *adhérent* au point $P \in E$, si

$$P' \in \overline{\{P\}}.$$

b. Un point P est dit *générique*, si

$$\overline{\{P\}} = E.$$

c. Un point P' est dit *moins riche* qu'un point P , si

$$\overline{\{P'\}} \subset \overline{\{P\}};$$

la relation : P' est moins riche que P est une relation de préordre sur E ; la relation d'équivalence associée est

$$R(P, P') \quad \text{si et seulement si} \quad \overline{\{P'\}} = \overline{\{P\}}.$$

Nous désignerons par r , la relation d'ordre induite sur E/R , par la relation de préordre considérée sur E .

d. Un point P est dit *stable*, si l'on a

$$\{P\} = \overline{\{P\}}.$$

e. Un point P est dit *minimal*, si sa classe dans E/R est minimale pour la relation d'ordre r , c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall P' \in \overline{\{P\}}, \quad \text{on a} \quad \overline{\{P'\}} = \overline{\{P\}}.$$

Un point stable est évidemment minimal.

Dans le cas des espaces non séparés $\mathfrak{X}(n)$, $\mathfrak{X}(n:r)$, nous parlerons de *forme adhérente* à une autre; de *forme générique*; de *forme moins riche* qu'une autre; de *forme stable*; de *forme minimale*.

PROPOSITION 2. — Soit E un espace quasi compact : pour tout point P de E , il existe un point P' minimal, moins riche que P .

D'après le théorème de Zorn, il suffit d'établir que l'ensemble E/R (cf. déf. 1, c) ordonné par r est inductif, dans le sens décroissant.

Soit $\{P_\alpha\}$ une partie de E , indexée par une famille totalement ordonnée d'indices α , et telle que

$$\alpha < \beta \quad \text{implique} \quad \overline{\{P_\alpha\}} \subset \overline{\{P_\beta\}}.$$

L'intersection des $\overline{\{P_\alpha\}}$ est non vide, du fait de l'hypothèse de quasi-compacité. Soit P_0 un point de cette intersection : il est clair que P_0 est moins riche que tous les P_α , ce qui démontre la proposition.

La proposition 2 s'applique notamment aux espaces $\mathfrak{X}(n)$ et $\mathfrak{X}(n:r)$ qui sont des quotients des espaces compacts $\mathfrak{X}(n;o)$ et $\mathfrak{X}(n:r, o)$, comme on l'a vu au paragraphe 2 (cf. théorèmes 1 et 2).

DÉFINITION 2. — Soient W un corps convexe et $\overset{\circ}{W}$ son intérieur. On dit que la forme $\pi(W)$ est *balayable* (resp. *divisible*, resp. *homogène*) si $\overset{\circ}{W}$ est balayable (resp. divisible, resp. homogène) (cf. chap. 1, §, 1, déf. 15).

PROPOSITION 3. — *Toute forme balayable est stable.*

Soit W un corps convexe, adhérence d'un ouvert balayable; nous allons montrer que $\pi(W)$ est stable.

$\mathfrak{X}(n)$ est un quotient de $\mathfrak{X}(n;o)$ (§ 2, théorème 1).

$\mathfrak{X}(n;o)$ est compact (§ 2, théorème 2).

Pour montrer que le point $\pi(W) \in \mathfrak{X}(n)$ est un fermé, il suffit de montrer que son image réciproque dans $\mathfrak{X}(n;o)$ est fermée. Or, par hypothèse, il existe un compact $K \subset \overset{\circ}{W}$, tel que, quel que soit $w \in \overset{\circ}{W}$, il existe $g \in GS(n, R)$ avec

$$gW = W, \quad gw \in K.$$

L'image réciproque de $\pi(W)$ dans $\mathfrak{X}(n;o)$ est l'image par l'application

$$E(n;o) \xrightarrow{\pi_{n;o}} \mathfrak{X}(n;o)$$

du compact K^0 formé des couples (W, w) : où $w \in K$; l'image réciproque de $\pi(W)$ dans $\mathfrak{X}(n;o)$ est donc fermée; la démonstration est achevée.

PROPOSITION 4. — Soient $A_1 \subset \mathfrak{X}(n_1)$; $A_2 \subset \mathfrak{X}(n_2)$; $A = A_1 + A_2$ (cf. § 2, déf. 3). On a la relation

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_2.$$

a. L'inclusion

$$\bar{A}_1 + \bar{A}_2 \subset \bar{A}$$

est une conséquence triviale de la continuité de l'opération somme (§ 2, prop. 6).

b. Il reste à démontrer

$$\bar{A} \subset \bar{A}_1 + \bar{A}_2.$$

Posons

$$\pi^{-1}(A) = B \subset E(n_1 + n_2 + 1) = E(n).$$

Parce que π est une application ouverte, on a

$$\pi^{-1}(\bar{A}) = \bar{B}.$$

Nous allons montrer, pour tout $W \subset \bar{B}$, on peut trouver $a_1 \in \bar{A}_1$ et $a_2 \in \bar{A}_2$ tels que

$$\pi(W) = a_1 + a_2.$$

c. Considérons une suite de convexes $W_i \in B$, qui converge vers W . Chaque W_i peut s'écrire comme enveloppe convexe de deux convexes compacts, W_{1i} et W_{2i} de supports L_{1i} et L_{2i} :

$$\begin{aligned} W_{1i} &\in E(n, n_1); & \pi(W_{1i}) &\in A_1; \\ W_{2i} &\in E(n, n_2); & \pi(W_{2i}) &\in A_2; \\ \pi(W_i) &= \pi(W_{1i}) + \pi(W_{2i}). \end{aligned}$$

On peut extraire de $\{W_i\}$ une sous-suite, notée aussi $\{W_i\}$, telle que :

1° dans l'espace des sous-variétés linéaires de dimension n_1 (resp. n_2) de $S(n)$ on ait la convergence

$$\begin{aligned} L_{1i} &\rightarrow L_1, \\ L_{2i} &\rightarrow L_2; \end{aligned}$$

2° dans l'espace des parties convexes compactes de $S(n)$ on ait les convergences

$$\begin{aligned} W_{1i} &\rightarrow W_1 \\ W_{2i} &\rightarrow W_2 \end{aligned}$$

Nous allons montrer qu'on a

$$\begin{aligned} W_1 &\in E(n, n_1), & \pi(W_1) &\in \bar{A}_1; \\ W_2 &\in E(n, n_2), & \pi(W_2) &\in \bar{A}_2; \\ \pi(W) &= \pi(W_1) + \pi(W_2). \end{aligned}$$

d. Il faut établir que W_1 est un corps convexe de L_1 (resp. W_2 de L_2) et que $L_1 + L_2 = S(n)$.

Du fait de la continuité de l'enveloppe convexe (chap. 4, § 1, prop. 13), W est enveloppe convexe de W_1 et W_2 .

D'autre part, $W_1 \subset L_1$; $W_2 \subset L_2$: pour que W soit d'intérieur non vide, il faut donc que L_1 soit le support de W_1 (resp. L_2 de W_2) et que

$$L_1 + L_2 = S(n).$$

Il en résulte qu'on a bien la situation annoncée en *c*. La proposition 4 est ainsi démontrée.

PROPOSITION 5. — Soit $p \in \mathcal{X}(n)$, $p_i \in \mathcal{X}(n_i)$; $p = p_1 + \dots + p_i + \dots + p_q$. La forme p est stable (resp. minimale) si et seulement s'il en est ainsi de chacun des p_i .

a. Si les p_i sont stables, il en est de même de p . En effet (prop. 4),

$$\overline{\{p\}} = \sum \overline{\{p_i\}} = \sum \{p_i\} = \{p\}.$$

b. Si p est stable, il en est de même des p_i .

En effet, soit $p'_i \in \overline{\{p_i\}}$, nous allons montrer que $p'_i = p_i$. On a (prop. 4)

$$p' = p_1 + \dots + p_{i-1} + p'_i + p_{i+1} + \dots + p_q \in \overline{\{p\}} = \{p\},$$

d'où $p' = p$; et l'égalité $p'_i = p_i$ résulte de l'unicité de la décomposition de p en somme de formes simples (cf. § 2, remarque 3).

c. Si ces p_i sont minimaux, il en est de même de p . Montrons que, si $p' \in \overline{\{p\}}$, on a $\overline{\{p'\}} = \overline{\{p\}}$. En effet, p' peut s'écrire sous la forme

$$p' = \sum p'_i, \quad \text{avec } p'_i \in \overline{\{p_i\}},$$

d'où

$$\overline{\{p'\}} = \sum \overline{\{p'_i\}} = \sum \{p_i\} = \overline{\{p\}}.$$

d. Si p est minimal, il en est de même des p_i . D'après *c*, il suffit de démontrer *d* dans le cas où les p_i sont simples, c'est-à-dire dans le cas où $p = \sum p_i$ est décomposition de p , de longueur maximale, en somme de formes toutes distinctes de la forme vide.

Faisons choix, pour tout i , d'une forme minimale p'_i moins riche que p_i (cf. prop. 2); on a

$$p' = \sum p'_i \in \overline{\{p\}}, \quad \text{d'où } \overline{\{p'\}} = \sum \overline{\{p'_i\}} = \overline{\{p\}},$$

d'où

$$p = \sum p''_i, \quad \text{avec } p''_i \in \overline{\{p'_i\}}, \quad \text{donc minimal.}$$

Le système des p''_i fournit une décomposition de p en somme de longueur maximale : l'ensemble des p''_i s'identifie donc à celui des p_i , et ceux-ci, comme ceux-là, sont donc tous minimaux.

La démonstration est achevée.

REMARQUE. — Soit

$$p = p_1 + \dots + p_q$$

Au chapitre 3, paragraphe 2, proposition 5, nous avons démontré que p est homogène (resp. balayable) si et seulement s'il en est ainsi de chacun des p_i . La proposition 3 invite à rapprocher ce résultat de la proposition 5.

DÉFINITION 3. — Soit A une partie de $\mathfrak{X}(n)$: on appelle *ensemble des formes sections q -dimensionnelles de A* , et l'on note $S_q(A)$, la partie de $\mathfrak{X}(n, q) \approx \mathfrak{X}(q)$ ainsi définie :

$S_q(A)$ est l'image directe par $r_{n,q}^{n,q}$ de l'image réciproque de A dans $\mathfrak{X}(n; q)$ par $r_{n,q}^n$.

PROPOSITION 6 :

$$S_q(\overline{A}) = \overline{S_q(A)}.$$

Pour démontrer cette proposition, nous utiliserons l'étage inférieur du diagramme T du paragraphe 2.

On voit, sur ce diagramme, que $S_q(A)$ peut être défini au moyen de trois opérations successives :

1° On prend l'image réciproque A' de A dans $\mathfrak{X}(n; q, 0)$ par l'application $r_{n,q,0}^n$;

2° On prend l'image directe A'' de A' dans $\mathfrak{X}(n, q, 0) \approx \mathfrak{X}(q, 0)$ par l'application $r_{n,q,0}^{n,q,0}$;

3° On prend l'image directe de A'' dans $\mathfrak{X}(n, q) \approx \mathfrak{X}(q)$ par l'application $r_{n,q,0}^{n,q}$ (ou, ce qui revient au même, par l'application $r_{q,0}^q$).

Nous allons montrer qu'à chacun de ces pas, l'adhérence du transformé est le transformé de l'adhérence.

$$1^\circ \quad (r_{n,q,0}^n)^{-1}(\overline{A}) = \overline{(r_{n,q,0}^n)^{-1}(A)}$$

parce que $r_{n,q,0}^n$ est une application continue ouverte.

$$2^\circ \quad r_{n,q,0}^{n,q,0}(\overline{A'}) = \overline{r_{n,q,0}^{n,q,0}(A')}$$

parce que $r_{n,q,0}^{n,q,0}$ est une application continue d'espaces compacts.

$$3^\circ \quad r_{q,0}^q(\overline{A''}) = \overline{r_{q,0}^q(A'')}$$

parce que $r_{q,0}^q$ est continue ouverte, et qu'il s'agit de parties saturées.

COROLLAIRE 1. — Si A est réduit à un seul élément, on a l'énoncé : toute forme, appartenant à la fermeture de l'ensemble des formes sections d'une forme donnée p , est forme section d'une forme adhérente à la forme A .

COROLLAIRE 2. — Si $A = \overline{A}$, est une partie composée d'une forme stable p , on a l'énoncé : toute forme, appartenant à la fermeture de l'ensemble des formes sections de p , est forme section de p .

Construction d'une forme générique dans $\mathcal{X}(n)$ ($n \geq 1$). — Voici comment nous allons procéder.

On sait (§ 2, théorème 2) que $\mathcal{X}(n : 0)$ est un espace compact métrisable; supposons-le muni d'une distance d , compatible avec sa topologie, et choisissons, une fois pour toutes, dans $\mathcal{X}(n : 0)$ une suite $\{p_i^0\}$ de formes qui soit partout dense. Choisissons de plus une suite $\{\varepsilon_i\}$ de nombres positifs qui tendent vers zéro quand i tend vers l'infini.

Supposons qu'il existe un corps convexe $W \in E(n)$, et une suite $\{w_i\}$ de points de \overline{W} , telle que

$$d(\pi(W, w_i), p_i^0) \leq \varepsilon_i.$$

Il est clair que la forme $\pi(W)$ est générique : en effet, son image réciproque dans $\mathcal{X}(n : 0)$ est partout dense.

Nous construisons une suite croissante de corps W_{C_i} tendant vers une limite $W \in E(n)$, et une suite de points $\{w_i\}$, $w_i \in \overline{W}_{C_i}$ (ce qui implique $w_j \in W_{C_i}$ pour $j \leq i$) de sorte que, pour tout $j \leq i$:

$$d(\pi(W_{C_i}, W_j), p_j^0) < \varepsilon_j.$$

Puisque W est limite des W_{C_i} quand i tend vers l'infini, ou aura pour tout j :

$$d(\pi(W, w_j), p_j^0) \leq \varepsilon_j$$

et $\pi(W)$ sera forme générique.

Pour construire les W_{C_i} , nous avons besoin du

LEMME 1. — Pour tout i , on peut trouver :

a. $(W_i, v_i) \in E(n : 0)$; $\pi(W_i, v_i) = p_i^0$;

b. f_{i1}, f_{i2} deux facettes distinctes de W_i , réduite chacune à un point;

c. H_{i1}, H_{i2} deux demi-espaces fermés, de frontière h_{i1}, h_{i2} , et tels que W rencontre $\overset{\circ}{H}_{i1}$ et $\overset{\circ}{H}_{i2}$;

de sorte que :

$$\begin{aligned} 1^\circ \quad & f_{i1} \in H_{i2}, \quad f_{i1} \notin H_{i1}; \\ & f_{i2} \in H_{i1}, \quad f_{i2} \notin H_{i2}. \end{aligned}$$

2° Soit S_{i1} le saturé de W_i au-delà de H_{i1} (resp. S_{i2} , au-delà de H_{i2}).

Pour tout $Q_i \in E(n)$ tel que

$$W_i \cap H_{i1} \cap H_{i2} \subset Q_i \subset S_{i1} \cup S_{i2}$$

on a

$$d(\pi(Q_i, v_i), p_i^0) \leq \varepsilon_i.$$

Démontrons le lemme.

Nous avons vu (chap. 3, § 6, prop. 4) qu'on peut trouver deux facettes distinctes réduites à un point f_{i_1}, f_{i_2} .

Nous avons vu (chap. 3, § 6, prop. 2) qu'on peut trouver H_{i_1} (resp. H_{i_2}) tel que S_{i_1} (resp. S_{i_2}) et $W_i \cap H_{i_1}$ (resp. $W_i \cap H_{i_2}$) soient arbitrairement voisins de W_i .

De la continuité de $\pi_{n;0}$, il résulte donc qu'on peut trouver H_{i_1} et H_{i_2} satisfaisant aux conditions du lemme.

Maintenant, nous posons

$$W_{C_1} = W_1 \cap H_{i_2}; \quad \omega_1 = \nu_1; \quad k_{i_2} = h_{i_2}.$$

Nous allons définir par concurrence la suite des

$$\omega_{C_i}, \quad \omega_i, \quad k_{i_2}.$$

$W_{C_{i+1}}$ est obtenu en accolant W_{i+1} à W_{C_i} suivant les facettes $W_{C_i} \cap k_{i_2}$ et $W_{i+1} \cap h_{i_1}$ (cf. chap. 3, § 6, prop. 3).

$W_{C_{i+1}}$ est l'enveloppe convexe de W_{C_i} et de

$$W'_{i+1} = g_{i+1} W_{i+1}, \quad \text{où } g \in GS(n, R).$$

Nous poserons

$$\omega_{i+1} = g_{i+1} \nu_{i+1}; \quad k_{i+1,2} = g_{i+1} h_{i+1,2}.$$

On aura pour tout $j \geq i$:

$$W_i \cap H_{i_1} \cap H_{i_2} \subset g_i^{-1}(W_{C_i}) \subset S_{i_1} \cup S_{i_2}.$$

Du lemme, il résulte aussitôt que les W_{C_i} construits satisfont aux conditions imposées. Nous avons construit une forme générique.

Les propositions qui suivent mettent en évidence ce qu'on peut appeler le *caractère local de la notion de forme adhérente*.

PROPOSITION 7. — Soient W un corps convexe : $W \in E(n)$; f un point frontière de W , $Z(f)$ la réunion de toutes les facettes de la frontière de W dont la fermeture contient f [$Z(f)$ n'est autre que l'ensemble des points m de W tels que $(f, m) \cap \hat{W} = \emptyset$, où (f, m) désigne le segment formé d'extrémités f et m] et O un voisinage compact de $Z(f)$ tel que $O \cap W$ soit convexe.

Alors, pour tout entourage ν de la structure uniforme du compact $\mathcal{X}(n; o)$, on peut trouver un voisinage O_ν de f , tel que, pour tout $\omega \in O_\nu \cap \hat{W}$, $\pi(W, \omega)$ et $\pi(W \cap O, \omega)$ soient voisins d'ordre ν .

Nous allons démontrer cette proposition par l'absurde.

Soient O_n une base dénombrable de voisinage de f : supposons que dans tout $O_n \cap \hat{W}$, on puisse trouver un point ω_n tel que $\pi(W, \omega_n)$ et $\pi(O \cap W, \omega_n)$ ne soient pas voisins d'ordre ν .

De la suite des w_n , extrayons une sous-suite infinie, que nous désignerons encore par $\{w_n\}$, telle que dans $\mathcal{X}(n:0)$ la suite des $\pi(W, w_n)$ soit convergente [cela est possible, puisque $\mathcal{X}(n:0)$ est compact, cf. § 2, théorème 2]. Désignons par p' la limite de la suite des $\pi(W, w_n)$, et soit (W', w') un couple tel que $\pi(W', w') = p'$.

Soit $\{g_n\}$ une suite d'automorphismes projectifs de $S(n)$, telle que $(g_n W, g_n w_n)$ converge vers (W', w') dans $E(n:0)$ (une telle suite existe, parce que $\pi_{n:0}$ est une application ouverte, cf. § 2 théorème 1). Extrayons de la suite $\{g_n\}$ une sous-suite, que nous désignerons encore par $\{g_n\}$, qui converge dans $MS(n, R)$ vers un endomorphisme projectif d de $S(n)$. Il est clair que d n'est pas un automorphisme ($d \notin GS(n, R)$) : sinon, w' serait un point frontière de W' , image de f par d . Il résulte du lemme du paragraphe 2, théorème 2, que le noyau N (non vide) de d est une variété d'appui de W . Il résulte du paragraphe 1, théorème 1, 2°, que $f \in N$: en effet, soit K un voisinage compact de w' : pour tout voisinage u de N , on peut trouver n_0 tel que, pour $n > n_0$, $w_n \in g_n^{-1}(K) \subset u$: il en résulte que $f \in u$.

Puisque $f \in N$, on a $N \cap W \subset \overline{Z(f)}$; O est donc un voisinage de $N \cap W$, et, d'après la proposition 1 du paragraphe 1, $g_n W$ et $g_n(O \cap W)$ ont même limite W' . Il en résulte que $\pi(W, w_n)$ et $\pi(W \cap O, w_n)$ ont même limite p' , quand n tend vers l'infini : or cela est contraire à l'hypothèse, d'où la démonstration.

PROPOSITION 8. — Soit p' une forme adhérente à $p = \pi(W)$ ($W \in E(n)$),

$$p' \in \overline{\{p\}} \quad (p' \neq p).$$

Alors, il existe au moins une facette F de la frontière de W , telle que, pour tout corps convexe O , voisinage de \overline{F} , on ait

$$p' \in \overline{\{\pi(W \cap O)\}}.$$

Nous allons construire une facette F possédant la propriété demandée. Soit W' un corps convexe tel que $\pi(W') = p'$. Parce que π est une application ouverte (§ 2, théorème 1), on peut trouver une suite $\{g_n\}$ d'automorphismes projectifs de $S(n)$ telle que la suite $\{g_n W'\}$ converge vers W' . Extrayons de $\{g_n\}$ une sous-suite, qui converge dans $MS(n, R)$ vers d : on a $d \notin GS(n, R)$, parce que $p' \neq p$. Soit N le noyau de d : d'après le lemme du paragraphe 2, théorème 2, $N \cap W'$ est la fermeture d'une facette F de W' : d'après la proposition 1 du paragraphe 1, F possède la propriété demandée.

PROPOSITION 2. — Soit W un corps convexe : $W \in E(n)$; F une facette conique de W (cf. chap. 3, § 4, déf. 5), de support N ; B une base (cf. chap. 3, § 4, déf. 6) du contingent de W en F , située dans une variété linéaire I , telle que $I \cap W = \emptyset$. Alors, la forme somme $\pi(\overline{F}) + \pi(B)$ est adhérente à $\pi(W)$.

Nous allons construire une suite $\{g_n\}$ d'automorphismes projectifs de $S(n)$ telle que, quand n tend vers l'infini, $g_n W$ tende vers l'enveloppe convexe W' de \bar{F} et de B : la proposition en résultera

Soit g_n l'homothétie de centre N , de but I , et de rapport n (cf. § 1, déf. 2) : il est clair que $g_n W$ est inclus dans W' : en effet, tout segment s , issu d'un point f de F , et contenu dans W , appartient à une demi-droite du contingent de W en f : l'intersection de cette demi-droite avec W' est un segment s' , et $s \subset s'$, puisque $W \cap I = \emptyset$.

Soient b un point de l'intérieur de B pour la topologie de I et f un point de F ; le segment ouvert $]b, f[$ rencontre W par hypothèse : soit $m \in]b, f[\cap W$. Quant m tend vers l'infini, $g_n m$ tend vers b . Il en résulte que W' appartient à la fermeture de la réunion des $g_n W$. La suite croissante des $g_n W$ a donc pour limite W' .

DÉFINITION 4. — Cette définition fait usage des notations de l'exemple 2 du paragraphe 1 (remarque 2).

On dit qu'un corps convexe W admet Q pour *ellipsoïde osculateur* au point $M \in W$, s'il existe $N \in Q$, $N \neq M$, tel que : étant donnés deux nombres k et k' vérifiant les inégalités strictes

$$0 < k < 1 < k',$$

on puisse trouver un voisinage $O(k, k')$ de M , tel que

$$Q(k, M, N) \cap O(k, k') \subset W \cap O(k, k') \subset Q(k', M, N) \cap O(k, k').$$

REMARQUE. — Il est facile de voir que, si la condition précédente est remplie pour un point N , elle est aussi remplie pour tout autre choix du point N .

EXEMPLE 1. — Nous allons donner une condition suffisante pour qu'un corps convexe $W \in E(2)$ admette Q pour ellipse osculatrice au point M .

La question étant de nature locale, on peut se placer dans l'hémisphère ouvert de frontière H_N , contenant M . Faisons choix dans cet hémisphère de coordonnées affines x, y , telles que les éléments de la figure aient pour équations

$$\begin{aligned} M &: x = y = 0; \\ H_M &: y = 0; \\ Q &: y \geq x^2; \\ Q(k, M, N) &: ky \geq x^2. \end{aligned}$$

Supposons que la frontière de W s'identifie au voisinage de M avec la courbe d'équation

$$y = f(x).$$

Alors, si f est dérivable, $f'(0) = 0$: $f''(0)$ est défini et égal à $\frac{1}{2}$, W admet Q pour ellipsoïde osculateur en M .

En effet, quand x tend vers 0, $\frac{f(x)}{x^2}$ tend vers 1.

Soit $0 < k < 1 < k'$ (inégalités strictes). Pour x appartenant à un voisinage convenable de O , on aura

$$k < \frac{f(x)}{x^2} < k'$$

et dans un voisinage convenable de M , la frontière de W sera comprise entre celles de $Q(k, M, N)$ et $K(k', M, N)$.

PROPOSITION 10. — *Soit W un corps convexe possédant un point de sa frontière un ellipsoïde osculateur : la forme ellipsoïde est adhérente à $\pi(W)$.*

a. Nous allons démontrer le lemme ci-dessous, dont la proposition est un corollaire.

LEMME 2. — *Soit W un corps convexe dont la frontière contient M , et qui admet Q pour ellipsoïde osculateur en M . Soit $g(t)$ la dilatation le long de Q , de source M , de but N , de rapport t (cf. § 1 exemple 2) ($t > 0$.) Alors $g(t)W$ tend vers Q , quand t tend vers l'infini.*

b. Pour démontrer le lemme, il nous suffit de démontrer que, de l'ensemble des $g(t)W$, on ne peut pas extraire de suite $\{g(t_i)W\}$ qui converge dans l'espace (compact) des parties compactes de $S(n)$, vers un convexe autre que Q . Nous démontrons le résultat équivalent suivant :

De toute suite $\{g(t_i)W\}$, on peut extraire une sous-suite qui converge vers Q .

c. La démonstration de ce résultat fait usage du

LEMME 3. — *Soit O un voisinage de M ; on peut trouver un voisinage O_H de H_M tel que*

$$O_H \cap W = O \cap W.$$

En effet, soit O' la fermeture du complémentaire de O ; soit O'_H un voisinage de $O' \cap H_M$, tel que $O' \cap W = \emptyset$ (un tel voisinage existe, puisque W et $O' \cap H_M$ sont deux compacts d'intersection vide) : $O'_H \cup O$ est un O_H convenable.

d. Le résultat ci-dessous est une conséquence triviale du lemme 3 et de la définition de l'osculation.

Soit k, k' deux nombres vérifiant les inégalités strictes

$$0 < k < 1 < k'.$$

On peut trouver un voisinage $O(k, k')$ de H_M tel que

$$O(k, k') \cap Q(k, M, N) \subset O(k, k') \cap W \subset O(k, k') \cap Q(k', M, N).$$

e. Extrayons de la suite $\{g(t_i)W\}$ une sous-suite convergente, que nous désignerons encore par $\{g(t_i)W\}$. Nous allons montrer que, quels que soient k et k' satisfaisant aux inégalités strictes

$$0 < k < 1 < k',$$

la limite W' de $\{g(t_i)W\}$ satisfait aux inclusions

$$Q(k, M, N) \subset W' \subset Q(k', M, N);$$

le lemme 2 et la proposition en résulteront immédiatement.

En effet, la limite dans $MS(n, R)$ de $\{g(t_i)\}$ est un endomorphisme, qui a pour noyau H_M (cf. § 1, exemple 2). Il résulte de la proposition 1 du paragraphe 1 que la suite $\{g(t_i) \cdot O(k, k') \cap W\}$ a pour limite W' . Mais la limite de la suite des $\{g(t_i) \cdot O(k, k') \cap W\}$ doit être incluse dans $Q(k')$, et $Q(k)$ est inclus dans cette limite. La démonstration est ainsi achevée.

Les résultats démontrés ci-dessus permettent de faire une étude assez complète de $\mathcal{X}(2)$.

PROPOSITION 11. — $\mathcal{X}(2)$ ne contient que deux formes minimales; ce sont la forme triangle, et la forme ellipse : ces deux formes sont stables.

Cette proposition résulte immédiatement des deux faits suivants :

- a. La forme triangle et la forme ellipse sont des formes stables;
- b. Toute forme admet pour forme adhérente l'une au moins des deux formes triangle ou ellipse.

Démontrons a et b.

a. L'intérieur d'une ellipse (resp. d'un triangle) est un ouvert de $S(n)$ homogène au sens du chapitre 1, paragraphe 1, définition 15, donc balayable (*ibid.*). Il résulte donc de la proposition 3 que la forme triangle (resp. ellipse) est stable.

On peut aussi remarquer que la forme triangle t peut s'écrire

$$t = p + p + p,$$

où p est la forme point unique, forme stable, de $\mathcal{X}(0)$. Que t soit stable résulte alors la proposition 5.

b. D'après les propositions 9 et 10, il suffit de démontrer que tout convexe K , de dimension 2, possède l'une au moins des trois propriétés suivantes :

- 1° La frontière de K a un point angulaire;
- 2° La frontière de K contient un segment de droite;
- 3° Il existe un point frontière de K en lequel K admet une ellipse osculatrice.

En effet, dans les cas 1° et 2°, K possède une facette conique :

dans 1°, la facette est un point, la base un segment;

dans 2°, la facette est un segment, la base un point

et il est clair que la proposition 10 s'applique dans 3°.

Nous aurons donc démontré la proposition 11 en démontrant le

LEMME. 4. — Soit $y = f(x)$ une fonction convexe définie sur un intervalle (a, b) de la droite réelle.

$f(x)$ possède l'une au moins des trois propriétés suivantes :

1° Il existe une valeur $c \in]a, b[$, pour laquelle la dérivée à gauche de $f(x)$ est strictement inférieure à la dérivée à droite;

2° La fonction $f(x)$ est linéaire sur l'intervalle $]a, b[$;

3° Il existe une valeur $c \in]a, b[$, pour laquelle la dérivée seconde de $f(x)$ est définie et strictement positive.

Supposons que $f(x)$ ne possède pas la propriété 1° : alors $f'(x)$ est une fonction continue croissante définie sur l'intervalle $]a, b[$; $f'(x)$ admet une dérivée presque partout, et est la primitive de cette dérivée. Si donc $f'(x)$ n'est pas constante (2°), il existe des points où $f''(x)$ est définie et strictement positive, et $f(x)$ possède la propriété 3°.

EXERCICE. — Soit P un polygone $P \in E(2)$.

Alors

$$\overline{\{\pi(P)\}} = \{\pi(P)\} \cup \{t\},$$

où t est la forme triangle.

Solution : On applique les propositions 8 et 9.

PROPOSITION 12. — Soit W un corps convexe dont la forme $\pi(W)$ est stable. Alors W possède une section plane triangulaire ou elliptique.

La proposition résulte immédiatement des propositions 11 et 2, et du corollaire 2 de la proposition 6.

En effet,

$$S_2(\{P\}) = \overline{S_2(\{P\})} \quad (\text{prop. 6}).$$

Donc, $S_2(\{P\})$ contient au moins une forme minimale (prop. 2) qui ne peut être que la forme triangle, ou la forme ellipse (prop. 11).

On peut énoncer d'autres corollaires de la proposition 6, et des propositions sur le caractère local de la notion de forme adhérente :

PROPOSITION 13. — Soit W un corps convexe : $W \in E(n)$; $\pi(W)$ stable. Soit L une sous-variété linéaire de $S(n)$ de dimension r , telle que $L \cap W$

soit un corps convexe de L , possédant en un point de sa frontière un ellipsoïde osculateur.

Alors il existe une section de W par une variété de dimension r , qui est un ellipsoïde.

PROPOSITION 14. — Soit W un corps convexe : $W \in E(n) : \pi(W)$ stable. Soit L une sous-variété linéaire, de dimension r , de $S(n)$, telle que $L \cap W$ possède une facette angulaire F . Soit B une base de la facette F dans une sous-variété de L .

Alors il existe une section A de W par une sous-variété de dimension r , telle que

$$\pi(A) = \pi(\overline{F}) + \pi(B).$$

EXEMPLE 2. — Pour tout entier $n \geq 2$, nous allons construire, dans $\mathcal{X}((n+2)(n+1)/2)$, un exemple de forme simple homogène : pour $n = 2$, la forme ellipse de $\mathcal{X}(2)$; pour $n > 2$, on obtient des formes distinctes de la forme ellipsoïde.

a. Construction. — L'espace R^p (où $p = n(n+1)/2$), peut être mis en isomorphisme avec l'espace des formes quadratiques sur R^n :

à

$$a = (a_1, \dots, a_p) \in R^p,$$

on associe la forme quadratique $a(x)$ ainsi définie :

pour :

$$x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \in R^n,$$

$$a(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{(j-1)/2+i} x_i x_j.$$

Soit P_A^n l'ensemble des a , tels que $a(x)$ soit une forme quadratique semi-définie positive, c'est-à-dire tels que $a(x)$ soit positif ou nul quel que soit $x \in R^n$: nous allons montrer que l'image P_S^n de $P_A^n - \{O\}$ dans $S(p-1) = R^n - \{O\}/R^+$ est un corps, et que sa forme est simple et homogène.

b. P_S^n est un corps convexe. — Il est clair que P_A^n est fermé, donc aussi P_S^n .

L'intérieur de P_A^n est non vide, car il n'est autre que l'ensemble des a , tels que $a(x)$ soit strictement positif pour tout $x \neq 0$ (formes quadratiques définies positives).

Le noyau P_A^n est réduit à $\{O\}$; pour l'établir, nous montrerons que, si $a \in P_A^n (a \neq 0)$, on ne peut avoir $(-a) \in P_A^n$. En effet, si $a \neq 0$, il existe $x \in R^n$ tel que $a(x) \neq 0$, et l'on ne peut avoir à la fois $a(x) > 0$ et $(-a(x)) > 0$.

P_S^n qui est fermé d'intérieur non vide, de noyau vide, est donc un corps.

c. $\pi(P_S^n)$ est homogène. — Nous allons construire une représentation T de $GL(n, R)$ dans $GL(p, R)$, qui laisse P_A^n invariant, et opère transitivement sur son intérieur.

Soit $g \in GL(n, R)$: T est défini par la formule :

$$Tg a(x) = a(gx).$$

On sait que $TGL(n, R)$ opère transitivement sur l'ensemble \dot{P}_A^n de formes quadratiques définies positives. Que P_S^n soit homogène en résulte.

d. Les facettes de P_S^n . — Nous allons déterminer les facettes de P_A^n , d'où, d'après le chapitre 3, paragraphe 1, définition 4, les facettes de P_S^n ($P_A^n = F(P_S^n) \cup \{O\}$).

Soit $a \in P_A^n$: l'ensemble des $x \in R^n$, tel que $a(x) = 0$, est un sous-espace vectoriel de R^n que nous noterons $L(a)$. Soit L un sous-espace vectoriel de R^n : l'ensemble des $a \in P_A^n$, tels que $L \subset L(a)$, s'identifie canoniquement à l'ensemble des formes quadratiques non négatives sur l'espace quotient R^n/L .

On a le

LEMME 5. — La relation $a \alpha(P_A^n) a'$ (cf. chap. 5, § 1, déf. 2) est équivalente à $L(a) \subset L(a')$.

1° Si $L(a) \subset L(a')$, on a : $a \alpha(P_A^n) a'$.

En effet, a' s'identifie à un point intérieur de l'ensemble convexe des formes quadratiques non négatives sur $R^n/L(a)$; on peut donc trouver $\lambda > 0$, tel que $(a - \lambda a')$ définisse une forme quadratique non négative sur $R^n/L(a)$, et donc aussi sur R^n .

2° Si $a \alpha(P_A^n) a'$, on a : $L(a) \subset L(a')$.

Nous allons montrer que, si $a'(x) \neq 0$, on a aussi $a(x) \neq 0$. En effet, il existe $\lambda > 0$, tel que $a - \lambda a' \in P_A^n$: on a donc, quel que soit x ,

$$a(x) - \lambda a'(x) \geq 0.$$

Et si $a'(x)$ est non nul, il faut qu'il en soit de même de $a(x)$.

Il résulte du lemme 5 que les facettes de P_A^n sont en correspondance biunivoque avec les sous-espaces vectoriels de R^n : à un sous-espace L , est associée la facette $f(L)$ ainsi définie :

$$f(L) = \{ a \mid a \in P_A^n; L(a) = L \}.$$

$f(L)$ s'identifie canoniquement à l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur R^n/L . La fermeture de $f(L)$ est l'ensemble suivant :

$$\overline{f(L)} = \{ a \mid a \in P_A^n; L \subset L(a) \}.$$

$f(L)$ s'identifie canoniquement avec l'ensemble des formes quadratiques semi-définies positives sur R^n/L .

- Pour $L = \{O\}$, $f(L)$ est l'intérieur de $P_{\mathcal{A}}^n$.
- Pour $L = R^n$, $f(L) = \{O\}$.

La formule

$$Tg^{-1}f(L) = f(gL)$$

résulte de la définition de $f(L)$.

Les facettes de P_S^n proviennent des facettes de $P_{\mathcal{A}}^n$ autres que la facette $\{O\}$: elles sont donc en correspondance biunivoque avec les sous-espaces vectoriels de R^n de dimension strictement inférieure à n . A L de dimension r , est associée une facette F de P_S^n , telle que

$$\pi(\overline{F}) = \pi(P_S^{n-r}).$$

[En effet, $f(L)$ est une facette de $P_{\mathcal{A}}^n$, isomorphe à l'ensemble des formes quadratiques définies positives sur l'espace R^n/L , de dimension $n - r$].

e. $\pi(P_S^n)$ est forme simple. — Il revient au même de démontrer que $P_{\mathcal{A}}^n$ est un convexe simple (cf. § 2, remarque 3).

Soit $P_{\mathcal{A}}^n = F_1 \dots F_q$ la décomposition de $\hat{P}_{\mathcal{A}}^n$ en somme de convexes simples (distincts de $\{O\}$) : les F_i sont des facettes de $P_{\mathcal{A}}^n$, et nous poserons (cf. *d*) : $F_i = f(L_i)$ ($L_i \neq R^n$). Nous allons montrer qu'il y a une seule variété L_i qui est $\{O\}$: il en résultera que $\hat{P}_{\mathcal{A}}^n$ est simple. Puisque $TGL(n, R)$ est un groupe d'automorphismes de $\hat{P}_{\mathcal{A}}^n$, $TGL(n, R)$ doit laisser invariante la réunion des F_i . Or (cf. *d*), on a

$$Tg^{-1}f(L) = f(gL).$$

Il en résulte que $GL(n, R)$ doit laisser invariante la réunion des L_i : ceci n'est possible que s'il n'y a qu'un seul L_i qui est $\{O\}$ (le cas $L_i = \{R^n\}$ est exclu). La démonstration de *e* est achevée.

f. P_S^n n'a pas de facette conique (cf. chap. 5, § 4, déf. 5). — En effet, s'il en était autrement, d'après la proposition 9, $\pi(P_S^n)$ ne serait pas simple.

g. P_S^n possède des sections ellipsoïdales de dimension n . — Pour le montrer, nous allons construire dans R^n , une variété linéaire L , de dimension n , ne passant pas par l'origine, et coupant $P_{\mathcal{A}}^n$ suivant un paraboloides. L est l'ensemble des formes quadratiques induisant sur l'hyperplan $x_n = 0$, la forme quadratique

$$(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2).$$

En effet, la frontière de $L \cap P_{\mathcal{A}}^n$ a pour équations

$$\begin{aligned} a_{(j(j-1)/2)+j} &= 1 & (1 \leq j \leq n-1), \\ a_{(j(j-1)/2)+i} &= 0 & (1 \leq i \leq j \leq n-1; i \neq j), \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_{(n(n-1)/2)+i})^2 - a_{(n(n-1)/2)+n} &= 0. \end{aligned}$$

REMARQUE. — On peut démontrer l'existence sur P_A^n de sections ellipsoïdales de dimension n , en mettant en évidence des sections de dimension n , possédant un ellipsoïde osculateur (prop. 13). Or, en un point d'une facette $f(L)$ L de dimension $n-1$ de P_A^n , on peut vérifier que la frontière de P_A^n [qui est une partie de la variété algébrique réelle, de codimension 1, lieu des points a tels que $a(x)$ est dégénérée], possède une forme de courbure dégénérée dont $n-1$ carrés sont positifs. D'où g .

L'étude faite des espaces $\mathcal{X}(n)$ laisse ouvertes de nombreuses questions; en voici quelques-unes :

Existe-t-il des formes minimales, qui ne soient pas stables?

Existe-t-il des formes stables qui ne soient pas homogènes (resp. balayables. resp. divisibles)?

En dimension 2, on l'a vu, la réponse est non.

Quelles sont les formes stables?

D'après la proposition 5, il suffit de chercher les formes simples stables. Nous connaissons la forme point de $\mathcal{X}(0)$; la forme ellipsoïde de chaque $\mathcal{X}(n)$ ($n \geq 2$); et les formes $\pi(P_A^n)$ étudiées ci-dessus,

La proposition 8 affirme qu'à tout p' adhérent à $p(W)$, on peut associer une facette F de W : l'énoncé appelle la recherche d'une réciproque: pour quelles facettes F d'un corps convexe W donné, peut-on trouver $p' \in \overline{\pi(W)}$ et tel que, pour tout corps convexe O voisinage de \bar{F} , on ait

$$p' \in \overline{\pi(W \cap O)}?$$

La proposition 7 permet de répondre partiellement à cette question. Avec les notations de cette proposition, on a la

PROPOSITION 15. — Soit W un corps convexe; f un point frontière de W , tel que $Z(f)$ soit la facette de f . On peut trouver $p' \in \overline{\pi(W)}$ tel que, pour tout corps convexe O , voisinage de $Z(f)$, on ait

$$p' \in \overline{\pi(W \cap O)}.$$

Nous allons construire p' .

Soit $\{w_n\}$ une suite de points de \hat{W} convergeant vers f , et telle que $\pi(W, w_n)$ converge dans $\mathcal{X}(n; 0)$ vers p^0 : on prend

$$p' = r_{n;0}^n p^0.$$

Que p' possède la propriété demandée résulte de la proposition 7.

Terminons sur un théorème conséquence immédiate des résultats de ce paragraphe et de ceux du chapitre 2, paragraphe 3.

THÉORÈME. — Soit W une variété localement projective connexe. Considérons les propriétés :

a. W est projectivement balayable.

b. Il existe un hémisphère H de $S(n)$ et un morphisme projectif φ de source W et de but $S(n)$ tel que

$$\overline{\varphi(W)} \subset \mathring{H};$$

on note P^0 l'enveloppe convexe de $\varphi(W)$ [resp. W possède une coque stricte $(P, \mathring{H}, \varphi, z)$; on note $\varphi(P) = P^0$].

c. $\overline{P^0}$ possède en un point de sa frontière un ellipsoïde osculateur (resp. en un point de cote différente de 1).

d. $\overline{P^0}$ possède une facette conique F (resp. une facette conique F telle qu'aucun point de \overline{F} ne soit de cote 1).

Alors, si W vérifie les propriétés a, b, c, φ est un homéomorphisme de W sur P^0 et $\overline{P^0}$ est un ellipsoïde (resp. φ se prolonge en un homéomorphisme de W sur l'intérieur d'un ellipsoïde).

Si W vérifie les propriétés a, b, d, φ est un homéomorphisme de W sur P^0 (resp. φ se prolonge en un homéomorphisme $\tilde{\varphi}$ de W sur l'intérieur d'un corps convexe), et $\overline{\varphi(W)}$ [resp. $\overline{\tilde{\varphi}(W)}$] est un corps convexe enveloppe convexe de \overline{F} et d'un convexe fermé B , qui est une base du contingent de P^0 en un point de F .

En effet, les hypothèses a et b entraînent que $\varphi(W) = P^0$ et que $\overline{P^0}$ est un corps (chap. 2, § 3, prop. 2) [resp. φ se prolonge en une carte de W sur l'intérieur d'un corps convexe dont l'intersection avec H est $\overline{P^0}$ (chap. 2, § 3, théorème)]. Dans le cas c, on applique la proposition 10, et dans le cas b, la proposition 9. On applique alors la proposition 3.

REMARQUE. — Le théorème s'applique aux variétés localement affines considérées comme cas particuliers de variétés localement projectives.

Jean-Paul BENZÉCRI,
Institut Henri Poincaré,
11, rue Pierre-Curie,
Paris (5^e).

