BULLETIN DE LA S. M. F.

V. LALAN

Les surfaces envisagées dans leurs rapports avec leurs lignes minima

Bulletin de la S. M. F., tome 76 (1948), p. 20-48
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1948__76__20_0>

LES SURFACES ENVISAGÉES DANS LEURS RAPPORTS AVEC LEURS LIGNES MINIMA;

PAR M. V. LALAN.

SECONDE PARTIE [1].

Détermination d'une surface à partir de ses lignes minima.

10. On peut généralement déterminer en forme et en grandeur la surface dont on connaît les formes minima ω_1 et ω_2. En effet, les invariants r et s se calculent alors par

$$d\omega_1 = r[\omega_1 \omega_2], \qquad d\omega_2 = s[\omega_2 \omega_1].$$

La surface sera considérée comme essentiellement déterminée dès que sera connue l'asphéricité A et la courbure moyenne H, car on pourra alors écrire le ds^2 et la forme asymptotique (n° 1).

La formule (24) peut se résoudre en introduisant une variable auxiliaire ρ, par

$$(62) \qquad p = -2s + \frac{s_1}{s} + r\rho, \qquad q = -2r + \frac{r_2}{r} + s\rho.$$

(Nous écartons provisoirement de nos considérations les surfaces à courbure moyenne constante $r = 0$, $s = 0$.)

Des formules (22) et (23), nous tirons deux des dérivées covariantes de p, q

$$p_2 = pr - rs + r_1 - \frac{K}{A}, \qquad q_1 = qs - rs + s_2 - \frac{K}{A},$$

ce qui devient, en tenant compte de (62),

$$(63) \qquad \begin{cases} \rho_1 = a\rho + \dfrac{b_1}{s} - b + \dfrac{1}{s}\left(c - \dfrac{K}{A}\right), \\ \rho_2 = b\rho + \dfrac{a_2}{r} - a + \dfrac{1}{r}\left(c - \dfrac{K}{A}\right), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$a = s - \frac{s_1}{s}, \qquad b = r - \frac{r_2}{r}, \qquad c = r_1 + s_2 - 2rs.$$

---

[1] La première partie a paru dans ce *Bulletin* (75. 1947, p. 63-88). Le contenu de cette seconde partie a fait l'objet de trois Notes insérées aux *Comptes rendus* 223, 1946, p. 883-885; 224, 1947, p. 518-520, p. 1201-1203.

Ces deux formules se condensent en une seule équation aux différentielles totales

$$(63)\qquad d\rho = \rho\chi - \Phi + \left(c - \frac{K}{A}\right)\frac{r\omega_1 + s\omega_2}{rs},$$

en posant, pour abréger,

$$(64)\qquad \begin{cases} \chi = a\omega_1 + b\omega_2 = \left(s - \dfrac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(r - \dfrac{r_2}{r}\right)\omega_2, \\ \Phi = \left(b - \dfrac{b_1}{s}\right)\omega_1 + \left(a - \dfrac{a_2}{r}\right)\omega_2. \end{cases}$$

Les relations entre les 3 formes χ, Φ et $\varpi = r\omega_1 + s\omega_2$, sont

$$d\varpi = [\varpi\chi], \qquad d\chi = [\varpi\Phi].$$

Les relations (20), (21), (63′) forment un système de Pfaff

$$(65)\qquad \begin{cases} dH = -2A\varpi, \\ \dfrac{dA}{A} = \chi - \rho\varpi, \\ d\rho = \rho\chi - \Phi + \left(c - \dfrac{K}{A}\right)\dfrac{\varpi}{rs}, \end{cases}$$

où les inconnues sont A, H et ρ, et qui équivaut au système classique formé des équations aux dérivées partielles de Codazzi et de Gauss. La signification des variables A et H est connue; celle de la variable auxiliaire ρ se déduit de l'étude faite au n° 9. H étant en effet une intégrale première de ϖ, $-2A$ le facteur intégrant correspondant, on a, en désignant par u et v deux intégrales premières quelconques de ω_1 et ω_2,

$$\frac{dA}{A} = \chi + \frac{H_{uv}}{H_u H_v}dH = \chi - 2A\frac{H_{uv}}{H_u H_v}\varpi.$$

Comparant avec la seconde équation (65), nous voyons que

$$\rho = 2A\frac{H_{uv}}{H_u H_v} = 2A\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H}.$$

Les différentielles extérieures des deux premières équations (65) sont nulles en tenant compte du système; le système quadratique se réduit donc à une seule équation

$$\rho\, d\chi + [d\rho\,\chi] - d\Phi + \frac{1}{rs}\left[d\left(c - \frac{K}{A}\right)\varpi\right] - \frac{1}{r^2s^2}\left(c - \frac{K}{A}\right)[d(rs)\varpi] + \frac{1}{rs}\left(c - \frac{K}{A}\right)d\varpi = 0.$$

Il faut y remplacer $d\rho$ par son expression, qu'on peut simplifier, à cause du facteur χ, en $-\Phi + \frac{1}{rs}\left(c - \frac{K}{A}\right)\varpi$, tenir compte de $d\varpi = [\varpi\chi]$, et calculer $\left[d\left(\frac{K}{A}\right)\varpi\right]$.

$$d\left(\frac{K}{A}\right) = d\left(\frac{H^2}{A} - A\right) = \frac{2H\,dH}{A} - \frac{H^2 + A^2}{A^2}dA = -4H\varpi - \frac{H^2 + A^2}{A}(\chi - \rho\varpi),$$

d'où

$$\left[d\left(\frac{K}{A}\right)\varpi\right] = \frac{H^2 + A^2}{A}[\varpi\chi].$$

Tous calculs faits, on obtiendra une relation de la forme

$$\rho\, d\chi = \left(\lambda + \mu \frac{H^2}{A} + \nu A\right)[\omega_1 \omega_2], \tag{66}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} \lambda[\omega_1\omega_2] &= d\Phi + [\Phi\chi] - \frac{2c}{rs}\,d\varpi - \left[d\left(\frac{c}{rs}\right)\varpi\right], \\ \mu[\omega_1\omega_2] &= \frac{3}{rs}\,d\varpi + \left[d\left(\frac{1}{rs}\right)\varpi\right], \\ \nu[\omega_1\omega_2] &= -\frac{1}{rs}\,d\varpi - \left[d\left(\frac{1}{rs}\right)\varpi\right]. \end{aligned}\right. \tag{67}$$

Deux cas sont à distinguer suivant que χ est une différentielle exacte ou non.

a. Soit $d\chi \neq 0$, ce qui est le cas général. La relation (66) permet de calculer ρ en fonction de A et H

$$\rho = l + m\frac{H^2}{A} + nA,$$

où l, m, n ne dépendent que des quantités connues. Il existe donc une relation finie entre les inconnues du système (65), qu'il faut récrire en tenant compte de cette relation. Le plus simple est de calculer les dérivées covariantes ρ_1, ρ_2 en partant de cette relation, et de les identifier avec les expressions (63) trouvées antérieurement.

$$\rho_1 = l_1 + m_1\frac{H^2}{A} + n_1 A - 4mrH + \left[a - r\left(l + m\frac{H^2}{A} + nA\right)\right]\left(n - m\frac{H^2}{A^2}\right)A,$$

est à identifier avec

$$\rho_1 = a\left(l + m\frac{H^2}{A} + nA\right) + \frac{b_1}{s} - b + \frac{1}{s}\left(c - \frac{K}{A}\right).$$

On obtient une équation du 4e degré en A et H, et une autre analogue en opérant sur ρ_2. Si r et s sont effectivement les invariants d'une surface, l'une au moins des solutions de ce système algébrique en A et H vérifiera le système différentiel, et elle s'obtient sans intégration, comme nous l'avions annoncé.

b. Soit $d\chi = 0$. La relation quadratique (66) donne d'emblée une relation finie, du second degré, entre A et H

$$\lambda + \mu\frac{H^2}{A} + \nu A = 0. \tag{68}$$

Mais, de cette relation, on tire par dérivation covariante

$$\lambda_1 + \mu_1\frac{H^2}{A} + \nu_1 A - 4\mu r H + \left(\nu - \mu\frac{H^2}{A^2}\right)(a - r\rho)A = 0,$$

$$\lambda_2 + \mu_2\frac{H^2}{A} + \nu_2 A - 4\mu s H + \left(\nu - \mu\frac{H^2}{A^2}\right)(b - s\rho)A = 0.$$

On peut faire disparaître ρ par une combinaison évidente

$$r\lambda_2 - s\lambda_1 + (r\mu_2 - s\mu_1)\frac{H^2}{A} + (r\nu_2 - s\nu_1)A + (rb - sa)\left(\nu - \mu\frac{H^2}{A^2}\right)A = 0.$$

C'est une seconde équation du second degré; donc, dans ce cas aussi, A et H se déterminent généralement sans intégration. Il y aurait exception si cette seconde équation avait ses coefficients proportionnels à ceux de la première :

$$\frac{r\lambda_2 - s\lambda_1}{\lambda} = \frac{r\mu_2 - s\mu_1 - \mu(rb - sa)}{\mu} = \frac{r\nu_2 - s\nu_1 + \nu(rb - sa)}{\nu}.$$

En multipliant ces relations par $[\omega_1\omega_2]$, elles s'écrivent

$$(69)\qquad [\varpi\, d\log\lambda] = [\varpi(d\log\mu - \chi)] = [\varpi(d\log\nu + \chi)],$$

ce qu'il est facile d'interpréter. Nous savons en effet, d'après le n° 8, que, lorsque χ est une différentielle exacte, les courbes d'égale courbure moyenne sont isothermes, et qu'il existe un choix de variables minima u, v, ainsi qu'une fonction $\psi(u, v)$, tels qu'on ait

$$\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\, du, \qquad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\, dv,$$

et

$$\varpi = -\frac{\psi_{uv}}{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}(du + dv), \qquad \chi = d\log\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}, \qquad \Phi = \frac{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}\left(\log\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}\right)_{uv}(du + dv),$$

ou encore, en posant

$$u + v = t \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{\psi_{uv}}{\sqrt{\psi_u\psi_v}},$$

$$\varpi = -\frac{\theta}{2}dt, \qquad \chi = -d\log\theta, \qquad \Phi = -\frac{2}{\theta}(\log\theta)_{uv}\, dt.$$

En outre,

$$\frac{1}{rs} = 4\frac{\psi_{uv}}{\theta^3}, \qquad \frac{c}{rs} = -\frac{4}{\theta^2}\left(\log\frac{\psi_{uv}}{\theta}\right)_{uv}$$

Les formules (67) donnent, en posant $\Delta = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$,

$$\lambda[\omega_1\omega_2] = -2\Delta\frac{(\log\theta)_{uv}}{\theta}[du\, dv] - \frac{2}{\theta^2}(\log\theta)_{uv}[d\theta\, dt] - \frac{4}{\theta^2}\left(\log\frac{\psi_{uv}}{\theta}\right)_{uv}[d\theta\, dt]$$

$$-2\theta\Delta\left[\frac{1}{\theta^2}\left(\log\frac{\psi_{uv}}{\theta}\right)_{uv}\right][du\, dv] = -\frac{2}{\theta}\Delta(\log\psi_{uv})_{uv}[du\, dv],$$

$$\mu[\omega_1\omega_2] = -\frac{6\psi_{uv}}{\theta^3}\Delta\theta[du\, dv] - \frac{\theta}{2}\Delta\left(\frac{1}{rs}\right)[du\, dv] = -\frac{2}{\theta^2}\Delta\psi_{uv}[du\, dv],$$

$$\nu[\omega_1\omega_2] = \frac{1}{2rs}\Delta\theta[du\, dv] + \frac{\theta}{2}\Delta\left(\frac{1}{rs}\right)[du\, dv] = 2\Delta\left(\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}\right)[du\, dv],$$

d'où

$$(70)\qquad \lambda = \frac{2}{\psi_{uv}}\Delta(\log\psi_{uv})_{uv}, \qquad \mu = -\frac{2}{\theta\psi_{uv}}\Delta\psi_{uv}, \qquad \nu = \frac{2\theta}{\psi_{uv}}\Delta\left(\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}\right).$$

Les relations à interpréter, qu'on peut écrire

$$\Delta\log\lambda = \Delta\log(\mu\theta) = \Delta\log\frac{\nu}{\theta},$$

expriment que les trois fonctions

$$\frac{\lambda\psi_{uv}}{2} = \Delta(\log\psi_{uv})_{uv}, \qquad \frac{\mu\theta\psi_{uv}}{2} = -\Delta\psi_{uv}, \qquad \frac{\nu\psi_{uv}}{2\theta} = \Delta\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}$$

ont des rapports qui ne dépendent que de $u+v=t$. Cela concorde avec le résultat auquel nous avait conduit l'étude de l'équation de Gauss correspondant à ce cas (n° 8). Cette équation elle-même, notre système (65) la redonne. La première équation, qui est présentement

$$dH = A\frac{\psi_{uv}}{\sqrt{\psi_u\psi_v}}(du+dv),$$

montre que $H=f(u+v)$, et que $A=\frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}f'(u+v)$; la seconde donne $\rho=\frac{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}\frac{f''}{f'}$, et la troisième, compte tenu de $c=-\frac{1}{\sqrt{\psi_u\psi_v}}(\log\sqrt{\psi_u\psi_v})_{uv}$,

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\log\frac{f'}{\psi_{uv}}\right)=\sqrt{\psi_u\psi_v}\left(\frac{H^2}{A}-A\right)=\psi_{uv}\frac{f^2}{f'}-\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}f',$$

équation que nous avons déjà rencontrée [formule (61)]. Une première application de l'opération Δ donne

$$(71)\qquad -\Delta(\log\psi_{uv})_{uv}=\frac{f^2}{f'}\Delta\psi_{uv}-f'\Delta\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}},$$

qui est la forme que prend ici la relation (68), comme on le vérifie à l'aide de (70). Une seconde application donne

$$-\Delta^2(\log\psi_{uv})_{uv}=\frac{f^2}{f'}\Delta^2\psi_{uv}-f'\Delta^2\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}},$$

et l'on obtient, par résolution, f et f', c'est-à-dire, en somme, H et A, mais à condition que ces deux équations, linéaires en $\frac{f^2}{f'}$ et f', n'aient pas leurs coefficients proportionnels. C'est précisément cette circonstance qui se présente si les relations (69) sont vérifiées. L'équation (71), dans ce cas, ne contient plus essentiellement que $u+v=t$ et l'inconnue $f(t)$; c'est une équation différentielle du premier ordre en f. Il y a alors ∞^1 surfaces essentiellement distinctes admettant les formes minima $\omega_1=\sqrt{\psi_u}\,du$, $\omega_2=\sqrt{\psi_v}\,dv$.

11. Couples exceptionnels. Solution générale. — Si une surface n'est pas déterminée univoquement par la donnée de ses formes minima, il existe au moins une seconde surface répondant aux mêmes données. Ces deux surfaces se trouvent mises par là en correspondance ponctuelle, correspondance qui est une représentation conforme, mais de nature spéciale, puisque, non seulement les lignes minima se correspondent, mais que, de plus, les différentielles des pseudo-arcs sont conservées. Nous appellerons cette correspondance, pour abréger, une *représentation conforme minima*. En déterminant le degré de généralité des couples de surfaces susceptibles d'être mises en correspondance de cette manière, nous constaterons que de tels couples ne dépendent que de fonctions arbitraires d'*un* argument, ce qui démontrera à nouveau qu'une surface prise au hasard ne fait partie d'aucun de ces couples, et, par conséquent, est déterminée sans équivoque par ses formes minima.

Soient B et $\bar{\mathrm{B}}$ les trièdres biisotropes respectifs des surfaces S et $\bar{\mathrm{S}}$, β et $\bar\beta$ les invariants figurant dans les formes asymptotiques. Les composantes relatives de la variation de ces repères vérifient les relations

$$
(72)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\bar\omega_1 - \omega_1 = 0, & \bar\omega_2 - \omega_2 = 0, \\
\omega_3 = 0, & \bar\omega_3 = 0, \\
\omega_{13} = \omega_1 + \beta\omega_2, & \bar\omega_{13} = \omega_1 + \bar\beta\omega_2, \\
\omega_{23} = \beta\omega_1 + \omega_2, & \bar\omega_{23} = \bar\beta\omega_1 + \omega_2.
\end{array}\right.
$$

En différentiant extérieurement, nous obtenons

$$
(73)\qquad \left\{\begin{array}{rr}
[\omega_1(\bar\omega_{11} - \omega_{11})] = 0, & [\omega_2(\bar\omega_{22} - \omega_{22})] = 0, \\
-2[\omega_1\omega_{11}] + [\omega_2(d\beta - \beta\overline{\omega_{11} + \omega_{22}})] = 0, & -2[\omega_1\bar\omega_{11}] + [\omega_2(d\bar\beta - \bar\beta\overline{\bar\omega_{11} + \bar\omega_{22}})] = 0. \\
[\omega_1(d\beta - \beta\overline{\omega_{11} + \omega_{22}})] - 2[\omega_2\omega_{22}] = 0, & [\omega_1(d\bar\beta - \bar\beta\overline{\bar\omega_{11} + \bar\omega_{22}})] - 2[\omega_2\bar\omega_{22}] = 0.
\end{array}\right.
$$

Le système (72) n'est pas en involution. Ses nombres caractéristiques sont en effet $s_1 = 5$, $s_2 = 1$, d'où $s_1 + 2s_2 = 7$, et la résolution des équations quadratiques (73) n'introduit que 6 arbitraires. Il faut donc prolonger.

$$
(74)\qquad \left\{\begin{array}{ll}
\omega_{11} = p\,\omega_1 + r\omega_2, & \bar\omega_{11} = \bar p\,\omega_1 + r\omega_2, \\
d\beta - \beta(\omega_{11} + \omega_{22}) = -2r\omega_1 - 2s\omega_2, & d\bar\beta - \bar\beta(\bar\omega_{11} + \bar\omega_{22}) = -2r\omega_1 - 2s\omega_2. \\
\omega_{22} = s\,\omega_1 + q\,\omega_2, & \bar\omega_{22} = s\,\omega_1 + \bar q\,\omega_2.
\end{array}\right.
$$

Ces nouvelles équations expriment d'abord l'égalité des invariants $\bar r = r$, $\bar s = s$; puis, comme $\beta = \frac{\mathrm{H}}{\mathrm{A}}$, on a $d\beta - \beta(\omega_{11} + \omega_{22}) = \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{A}}$. Les équations de la seconde ligne sont donc les équations de Codazzi, et l'on en déduit $\frac{d\bar{\mathrm{H}}}{\bar{\mathrm{A}}} = \frac{d\mathrm{H}}{\mathrm{A}}$, donc $\bar{\mathrm{H}} = f(\mathrm{H})$. Différentions extérieurement, en tenant compte de $\omega_{31} = -\mathrm{A}\omega_{23}$, $\omega_{32} = -\mathrm{A}\omega_{13}$.

$$
(75)\qquad \left\{\begin{array}{l}
[dp\,\omega_1] + [dr\,\omega_2] = [-\mathrm{A}(1 - \beta^2) + rs - pr][\omega_1\omega_2], \\
[dr\,\omega_1] + [ds\,\omega_2] = (ps - qr + 2s^2 - 2r^2)[\omega_1\omega_2], \\
[ds\,\omega_1] + [dq\,\omega_2] = [\mathrm{A}(1 - \beta^2) + qs - rs][\omega_1\omega_2], \\
[d\bar p\,\omega_1] + [dr\,\omega_2] = [-\bar{\mathrm{A}}(1 - \bar\beta^2) + rs - \bar p r][\omega_1\omega_2], \\
[ds\,\omega_1] + [d\bar q\,\omega_2] = [\bar{\mathrm{A}}(1 - \bar\beta^2) + \bar q s - rs][\omega_1\omega_2], \\
\qquad \bar q r - \bar p s = qr - ps.
\end{array}\right.
$$

Le terme $-\mathrm{A}(1 - \beta^2)$ peut s'écrire aussi $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}$: c'est le coefficient d'isotropie déjà considéré (n° 3). A cause de la relation finie qui figure en dernière ligne, il faudra modifier le système en tenant compte de cette relation, qui donne, en introduisant une nouvelle variable t

$$
(76)\qquad \bar p = p + rt, \qquad \bar q = q + st.
$$

La signification de t s'aperçoit facilement. Des formules (20) et (21), on tire en effet

$$
\frac{d\bar{\mathrm{A}}}{\bar{\mathrm{A}}} - \frac{d\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = (p - \bar p)\omega_1 + (q - \bar q)\omega_2 = -t(r\omega_1 + s\omega_2) = t\frac{d\mathrm{H}}{2\mathrm{A}} = t\frac{d\bar{\mathrm{H}}}{2\bar{\mathrm{A}}};
$$

Donc

$$t = 2\frac{d\overline{A}}{d\overline{H}} - 2\frac{dA}{dH},$$

et comme $\overline{H} = f(H)$, $\overline{A} = Af'(H)$,

$$t = 2A\frac{f''(H)}{f'(H)}. \tag{77}$$

Comme $f'(H)$ est le carré du rapport local de similitude entre S et $\overline{S}$, que nous désignerons par k, on voit que

$$t = 4A\frac{d}{dH}(\log k). \tag{78}$$

Récrivons le système (75) en tenant compte de (76), et en faisant quelques combinaisons simples

$$\left\{\begin{aligned} [dp\,\omega_1] + [dr\,\omega_2] &= \left(\frac{K}{A} + rs - pr\right)[\omega_1\omega_2],\\ [dr\,\omega_1] + [ds\,\omega_2] &= (ps - qr + 2s^2 - 2r^2)[\omega_1\omega_2],\\ [ds\,\omega_1] + [dq\,\omega_2] &= \left(-\frac{K}{A} + qs - rs\right)[\omega_1\omega_2],\\ [d(rt)\,\omega_1] &= \left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A} - r^2 t\right)[\omega_1\omega_2],\\ [d(st)\,\omega_2] &= \left(\frac{K}{A} - \frac{\overline{K}}{\overline{A}} + s^2 t\right)[\omega_1\omega_2]. \end{aligned}\right. \tag{79}$$

Nous avons 5 formes secondaires dp, dq, dr, ds, dt, et le tableau des coefficients est

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & \omega_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \omega_1 & \omega_2 & 0\\ 0 & \omega_2 & 0 & \omega_1 & 0\\ 0 & 0 & t\omega_1 & 0 & r\omega_1\\ 0 & 0 & 0 & t\omega_2 & s\omega_2 \end{vmatrix} = t\omega_1^2\omega_2^2(r\omega_1 + s\omega_2). \tag{80}$$

En supposant $t \neq 0$, ce qui est le cas général, ce tableau est de rang 5. Le système prolongé est donc en involution, et sa solution générale dépend de 5 fonctions arbitraires d'un argument. Les caractéristiques, qu'on obtient en annulant le déterminant (80), sont les lignes minima et les lignes d'égale courbure moyenne.

12. Problème de Cauchy. — Cherchons une solution à 1 dimension des équations (72) et (74). L'origine du trièdre B décrira une courbe (Γ). Soit v l'arc de cette courbe, $\rho(v)$ et $\tau(v)$ ses rayons de courbure et de torsion, ϖ l'angle du vecteur I_3 de B avec la normale principale à (Γ), θ l'angle de la courbe avec la première direction principale : le trièdre de Darboux se trouve situé par rapport au trièdre intrinsèque de (Γ) au moyen de $\varpi(v)$ et $\theta(v)$. Pour situer le trièdre B, il faut encore connaître l'asphéricité A; elle se calcule par la formule d'O. Bonnet

$$\frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau} = -\mathrm{A}\sin 2\theta.$$

Le trièdre B ne dépend donc que des 4 fonctions $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$, $\theta(v)$. Il faut encore déterminer les fonctions H, p, q, r, s, t, et le trièdre $\overline{\mathrm{B}}$. La courbure moyenne, H, se calcule en chaque point de (Γ) par la formule d'Euler

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = \mathrm{H} + \mathrm{A}\cos 2\theta.$$

Quant aux fonctions p, q, r, s, elles vérifient les 3 relations

$$\omega_{11} = p\,\omega_1 + r\,\omega_2, \qquad d\beta - \beta(\omega_{11} + \omega_{22}) = -2r\,\omega_1 - 2s\,\omega_2, \qquad \omega_{22} = s\,\omega_1 + q\,\omega_2,$$

où ω_{11} et ω_{22} sont connus, puisque le trièdre B est connu, et où

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{2}}\,e^{-i\theta}\,dv, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{A}}{2}}\,e^{i\theta}\,dv.$$

On peut d'ailleurs remplacer ces 3 relations par 3 combinaisons plus avantageuses :

$$(81)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = -(p+s)\omega_1 - (q+r)\omega_2, \qquad \frac{d\mathrm{H}}{2\mathrm{A}} = -r\,\omega_1 - s\,\omega_2,\\ &\qquad \frac{\sin\varpi}{\rho}\,dv - d\theta = \frac{i}{2}[(p-s)\omega_1 + (r-q)\omega_2], \end{aligned}\right.$$

en tenant compte de (52). Une des 4 fonctions p, q, r, s reste donc arbitraire, soit $s(v)$.

Passons au trièdre $\overline{\mathrm{B}}$. Nos équations entraînent, nous l'avons vu, $\overline{\mathrm{H}} = f(\mathrm{H})$; choisir $\overline{\mathrm{H}}(v)$ revient à choisir la fonction $f(\mathrm{H})$. On a ensuite $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}f'(\mathrm{H})$ et $t = 2\mathrm{A}\frac{f''(\mathrm{H})}{f'(\mathrm{H})}$; $\bar{p}$ et $\bar{q}$ sont donnés par (76). Quant à la relation entre v et $\bar{v}$, $\bar{v}$ étant l'arc de la courbe $(\overline{\Gamma})$ décrite par l'origine de $\overline{\mathrm{B}}$, elle se déduit de

$$\mathrm{A}\,dv^2 = \overline{\mathrm{A}}\,d\bar{v}^2 (= 2\,\omega_1\omega_2),$$

et s'écrit

$$(82)\qquad d\bar{v} = \frac{dv}{\sqrt{f'(\mathrm{H})}}.$$

La courbe $(\overline{\Gamma})$ et son trièdre géodésique se trouvent essentiellement déterminés. En effet, on a d'abord $\bar{\theta} = \theta$, car les lignes de courbure se correspondent sur les deux surfaces (leur équation est $\omega_1^2 - \omega_2^2 = 0$), et la représentation est conforme. Ensuite, la courbure normale $\frac{\cos\bar{\varpi}}{\bar{\rho}}$, la torsion géodésique $\frac{d\bar{\varpi}}{d\bar{v}} + \frac{1}{\bar{\tau}}$ et la courbure géodésique $\frac{\sin\bar{\varpi}}{\bar{\rho}}$ de $(\overline{\Gamma})$ sont connues, puisqu'on connaît $\overline{\mathrm{H}}$, $\overline{\mathrm{A}}$, $\dot{\theta}$, $\bar{p}$, $\bar{q}$, r, s : on en déduit $\bar{\varpi}$, $\bar{\rho}$ et $\bar{\tau}$.

Nous avons obtenu cette solution à 1 dimension en choisissant arbitrairement 6 fonctions d'un argument : $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$, $\theta(v)$, $s(v)$, $\overline{H}(v)$, mais on peut abaisser ce nombre d'une unité, en prenant pour (Γ) une courbe plane, et l'on retrouve les 5 fonctions arbitraires prévues par la théorie. La représentation conforme minima de $\overline{S}$ sur S est unique; elle se réalise par les équations finies

$$\bar{r}(\bar{u}, \bar{v}) = r(u, v), \qquad \bar{s}(\bar{u}, \bar{v}) = s(u, v),$$

u, v désignant ici des coordonnées curvilignes quelconques sur S, et de même $\bar{u}$, $\bar{v}$ sur $\overline{S}$.

13. Caractéristiques. — Ce sont, nous l'avons vu, les lignes minima et les lignes d'égale courbure moyenne. Dans ces deux cas, la solution à 1 dimension est caractéristique; il n'est pas sûr que le problème de Cauchy ait alors une solution unique.

A. Examinons en premier lieu l'hypothèse $r\omega_1 + s\omega_2 = 0$. Nous savons par la théorie générale qu'on peut alors déduire des équations quadratiques (79) une équation de la forme

$$[\varpi(r\omega_1 + s\omega_2)] = 0,$$

ϖ étant une forme convenablement choisie. On trouve effectivement

$$\varpi = dt - \lambda\omega_1 - \mu\omega_2, \tag{83}$$

avec

$$\lambda s - \mu r = t(r^2 - s^2 - ps + qr). \tag{84}$$

On a donc, sur la surface,

$$dt = \lambda\omega_1 + \mu\omega_2 + k(r\omega_1 + s\omega_2)$$

ou

$$t_1 = \lambda + kr, \qquad t_2 = \mu + ks.$$

Résolvant par rapport à λ et μ, et portant dans (84), il vient

$$s\frac{t_1}{t} - r\frac{t_2}{t} = r^2 - s^2 - ps + qr.$$

Or, d'après (20), on a aussi

$$s\frac{A_1}{A} - r\frac{A_2}{A} = r^2 - s^2 - ps + qr,$$

donc

$$\frac{\dfrac{t_1}{t} - \dfrac{A_1}{A}}{r} = \frac{\dfrac{t_2}{t} - \dfrac{A_2}{A}}{s}. \tag{85}$$

Mais r et s sont respectivement proportionnels à H_1 et H_2, donc (85) exprime que

$$\frac{t}{A} = \varphi(H), \tag{86}$$

résultat que nous avions déjà remarqué [formule (77)]. En conséquence, le long d'une caractéristique du type actuel, sur laquelle H est constant, t est proportionnel à A. Il en est de même de $\bar{A}$: $\bar{A} = C_1 A$, $t = C_2 A$; par suite $d\bar{v}$ est proportionnel à dv : $d\bar{v} = \frac{dv}{\sqrt{C_1}}$. Voyons comment se présentera une telle solution caractéristique.

On pourra choisir arbitrairement la bande initiale, c'est-à-dire, la courbe (Γ) et, en chaque point de (Γ), le vecteur I_3. Les fonctions arbitraires $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$, déterminent essentiellement (Γ) et, en chacun de ses points, son trièdre géodésique. A et θ se calculeront par

$$A \sin 2\theta = -\frac{d\varpi}{dv} - \frac{1}{\tau}, \qquad A \cos 2\theta = \frac{\cos\varpi}{\rho} - H_0,$$

où H_0 désigne la valeur *constante* de la courbure moyenne de S. On connaîtra dès lors le trièdre B en chaque point de (Γ). Comme dans le cas général, les invariants p, q, r, s doivent vérifier les relations (81); la seconde, en particulier, donne

$$r\omega_1 + s\omega_2 = 0, \qquad \text{d'où} \quad r = -s e^{2i\theta}.$$

L'un des invariants r et s, s par exemple, reste arbitraire.

Le long de $(\bar{\Gamma})$, on aura une courbure moyenne constante, $\bar{H}_0$; en outre, $\bar{A} = C_1 A$, et, puisque $t = C_2 A$, il viendra

$$\bar{p} = p + C_2 r A, \qquad \bar{q} = q + C_2 s A.$$

Par ailleurs, $\bar{\theta} = \theta$ et $d\bar{v} = \frac{dv}{\sqrt{C_1}}$; $\bar{\rho}$, $\bar{\tau}$ et $\bar{\varpi}$ se calculeront par

$$(87) \quad \begin{cases} \dfrac{d\bar{\varpi}}{d\bar{v}} + \dfrac{1}{\bar{\tau}} = -C_1 A \sin 2\theta = C_1\left(\dfrac{d\varpi}{dv} + \dfrac{1}{\tau}\right), \\ \dfrac{\cos\bar{\varpi}}{\bar{\rho}} - \bar{H}_0 = C_1 A \cos 2\theta = C_1\left(\dfrac{\cos\varpi}{\rho} - H_0\right), \\ \dfrac{\sin\bar{\varpi}}{\bar{\rho}} = \sqrt{C_1}\dfrac{d\theta}{dv} + \dfrac{i}{2}\sqrt{C_1}\sqrt{\dfrac{A}{2}}\,[(p - s + C_2 r A)e^{-i\theta} + (r - q - C_2 s A)e^{i\theta}] \\ \quad = \sqrt{C_1}\dfrac{\sin\varpi}{\rho} + \dfrac{i}{2}\sqrt{C_1}\,C_2 A\sqrt{\dfrac{A}{2}}\,(r e^{-i\theta} - s e^{i\theta}). \end{cases}$$

Les seules fonctions arbitraires, pour ce genre de caractéristiques, sont $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$, $s(v)$.

B. Passons à l'hypothèse $\omega_2 = 0$: l'origine du trièdre B décrit la ligne minima (L_1), de pseudo-arc élémentaire $\omega_1 = d\sigma$. La dernière des équations quadratiques (79) donne

$$d(st) = \left(\frac{K}{A} - \frac{\bar{K}}{\bar{A}} + s^2 t\right)\omega_1 + k\omega_2,$$

donc, le long de (L_1), st vérifie l'équation différentielle linéaire

$$(88) \qquad \frac{d(st)}{d\sigma} = s(st) + \frac{K}{A} - \frac{\bar{K}}{\bar{A}}.$$

Notons la signification géométrique de st. Si $\overline{H} = f(H)$, il s'ensuit $t = 2A\frac{f''}{f'}$, et $st = 2As\frac{f''}{f'}$. Or, $2As$ est, au signe près, la dérivée covariante H_τ de H dans la direction de la seconde ligne minima ; donc

$$st = -\frac{f''}{f'}H_\tau = -(\log f')_\tau,$$

où $f' = \frac{\overline{A}}{A}$ est le carré du rapport local de similitude entre S et $\overline{S}$.

Pour définir une solution caractéristique de ce type, nous prendrons une courbe minima quelconque (L_1), d'invariant $h(\sigma)$, de trièdre cyclique $MJ_1J_2J_3$. Par rapport à ce trièdre, le trièdre biisotrope B de la surface se situe au moyen de l'écart p et de l'asphéricité $A = \frac{1}{\mathcal{F}}$ [formules (18)]. Nous nous donnerons d'abord $p(\sigma)$, qui est aussi la pseudo-courbure géodésique de (L_1), et qui suffit à situer le trièdre cyclique géodésique de (L_1) par rapport à son trièdre cyclique intrinsèque [formules (31)], puis $A(\sigma)$, qui situera le trièdre B en chaque point de (L_1). La courbure moyenne H de S se trouvera alors définie, en chaque point de (L_1), par la formule (15)

$$H = \frac{dp}{d\sigma} + \frac{p^2}{2} - h.$$

On calculera ensuite r et s par

$$r = -\frac{1}{2A}\frac{dH}{d\sigma}, \qquad s = -p - \frac{1}{A}\frac{dA}{d\sigma}. \tag{89}$$

Quant au trièdre $\overline{B}$, son origine décrira aussi une courbe minima $(\overline{L}_1)$, de pseudo-arc σ, à cause de $\overline{\omega}_1 = \omega_1$. Nous savons que, sur $\overline{S}$, $\overline{H}$ est de la forme $f(H)$, que $\overline{A} = Af'(H)$, et $t = 2A\frac{f''(H)}{f'(H)}$. Mais, à cause de (88), la fonction $f(H)$ n'est pas arbitraire ; sa détermination ne dépend que de constantes. En effet d'après (89), on a

$$st = -2\left(Ap + \frac{dA}{d\sigma}\right)\frac{f''}{f'}.$$

Si l'on exprime (88) au moyen de cette formule, on obtient une équation contenant les dérivées de $f(H)$ jusqu'au 3e ordre ; les coefficients sont des fonctions de σ, mais, comme H est fonction de σ, on peut aussi bien exprimer σ en fonction de H, et l'on obtient une équation du 3e ordre pour $f(H)$.

On calculera ensuite $\overline{p}$ par $\overline{p} = rt + p$, et $\overline{h}$ par

$$\overline{h} = \frac{d\overline{p}}{d\sigma} + \frac{\overline{p}^2}{2} - \overline{H}.$$

La courbe $(\overline{L}_1)$ sera donc essentiellement connue, et nous n'aurons eu à choisir que $h(\sigma)$, $p(\sigma)$ et $A(\sigma)$ en tant que fonctions arbitraires.

On eût d'ailleurs pu procéder autrement pour déterminer cette solution caractéristique. On eût pu se donner arbitrairement les fonctions $A(\sigma)$, $H(\sigma)$ et $f(H)$, d'où $\overline{\mathrm{H}}(\sigma)$ et $\overline{\mathrm{A}}(\sigma)$, ainsi que $t(\sigma)$. L'équation (88) aurait alors fourni $s(\sigma)$: c'est une équation de Riccati en s

$$t\frac{ds}{d\sigma}+s\frac{dt}{d\sigma}=s^2t+\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}-\frac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}.$$

Une fois connue $s(\sigma)$, on eût calculé $p(\sigma)$ par (89), et $h(\sigma)$ par (15). On eût ainsi déterminé (L_1); $(\overline{\mathrm{L}}_1)$ eût été ensuite obtenue comme plus haut.

14. Détermination de $\overline{\mathrm{S}}$ quand S est donnée. — Dans les équations (72) et (74), ne retenons que celles qui concernent $\overline{\mathrm{S}}$, et tenons compte de (76). Nous obtenons le système

$$(90)\qquad \begin{cases} \overline{\omega}_1=\omega_1, \quad \overline{\omega}_2=\omega_2, \quad \overline{\omega}_3=0,\\ \overline{\omega}_{13}=\omega_1+\overline{\beta}\omega_2, \quad \overline{\omega}_{23}=\overline{\beta}\omega_1+\omega_2,\\ \overline{\omega}_{11}=(p+rt)\omega_1+r\omega_2, \quad \overline{\omega}_{22}=s\omega_1+(q+st)\omega_2,\\ d\overline{\beta}-\overline{\beta}(\overline{\omega}_{11}+\overline{\omega}_{22})=-2r\omega_1-2s\omega_2. \end{cases}$$

Le système quadratique se réduit aux deux dernières équations (79)

$$(91)\qquad \begin{cases} [d(rt)\omega_1]=\left(\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}-r^2t\right)[\omega_1\omega_2]\\ [d(st)\omega_2]=\left(\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}-\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}+s^2t\right)[\omega_1\omega_2]. \end{cases}$$

Pour obtenir l'involution, il faut prolonger par

$$(92)\qquad dt=t_1\omega_1+t_2\omega_2$$

où

$$t_1=-\frac{1}{s}\left(\frac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)+\left(s-\frac{s_1}{s}\right)t, \qquad t_2=-\frac{1}{r}\left(\frac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)+\left(r-\frac{r_2}{r}\right)t.$$

En différentiant extérieurement (92), on obtient

$$(93)\qquad t_{21}-t_{12}+rt_1-st_2=0,$$

équation qui est linéaire en t, et d'où l'on tire généralement $t=\varphi(\overline{\mathrm{A}},\overline{\mathrm{H}})$. En portant cette expression dans (92), on obtient deux relations finies entre $\overline{\mathrm{A}}$, $\overline{\mathrm{H}}$, et les quantités connues : $\overline{\mathrm{A}}$ et $\overline{\mathrm{H}}$ se trouvent déterminées sans fonction ni constante arbitraire. Donc, en règle générale, quand S fait partie d'un couple, la seconde surface $\overline{\mathrm{S}}$ du couple se détermine sans ambiguïté; S ne fait partie que d'un seul couple. Mais il se présente des exceptions. Pour les apercevoir, explicitons l'équation en t. Elle s'écrit

$$(94)\qquad \begin{cases} t\left[\left(r-\dfrac{r_2}{r}\right)_1-\left(s-\dfrac{s_1}{s}\right)_2+r\left(s-\dfrac{s_1}{s}\right)-s\left(r-\dfrac{r_2}{r}\right)\right]\\ \quad =\dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)_1-\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)_2+\left(\dfrac{\overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{A}}}-\dfrac{\mathrm{K}}{\mathrm{A}}\right)\\ \quad\quad \times\left[\dfrac{1}{s}\left(r-\dfrac{r_2}{r}\right)-\dfrac{1}{r}\left(s-\dfrac{s_1}{s}\right)+\dfrac{1}{s}\left(r+\dfrac{s_2}{s}\right)-\dfrac{1}{r}\left(s+\dfrac{r_1}{r}\right)\right]. \end{cases}$$

A priori, t pourrait encore figurer dans $\frac{1}{r}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}}\right)_1 - \frac{1}{s}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}}\right)_2$, car $\overline{A}_1$ et $\overline{A}_2$ contiennent t, mais, en fait, t disparaît ; on constate que

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}}\right)_1 - \frac{1}{s}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}}\right)_2 = \frac{\overline{H}^2 + \overline{A}^2}{\overline{A}}\left(\frac{p+s}{r} - \frac{q+r}{s}\right).$$

L'équation (94), d'apparence compliquée, peut s'écrire d'une façon très simple, à condition d'introduire la forme

$$\chi = \left(s - \frac{s_1}{s}\right)\omega_1 + \left(r - \frac{r_2}{r}\right)\omega_2,$$

et la fonction

$$\varphi = \frac{1}{rs\mathrm{A}^2}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right).$$

On vérifie qu'elle se réduit à

(94′) $$t\,d\chi = -\frac{A}{2}[d\varphi\, d\mathrm{H}],$$

On se trouvera dans un cas exceptionnel si cette équation ne donne pas t. Il faut et il suffit pour cela que $d\chi = 0$, c'est-à-dire, que χ soit une différentielle exacte. C'est une condition déjà rencontrée dans la première partie ($\mathrm{n}^\circ 8$) ; elle caractérise les *surfaces à courbure moyenne isotherme*. On a vu qu'on peut, dans ce cas, choisir des coordonnées minima u, v, et déterminer une fonction $\psi(u, v)$ de sorte qu'on ait

$$\omega_1 = \sqrt{\psi_u}\,du,\quad \omega_2 = \sqrt{\psi_v}\,dv, \qquad \text{d'où}\quad r = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_u\sqrt{\psi_v}},\quad s = -\frac{\psi_{uv}}{2\psi_v\sqrt{\psi_u}}.$$

Posant $\chi = d\mu$, on trouve

(95) $$e^{\mu} = \frac{\sqrt{\psi_u\psi_v}}{\psi_{uv}}.$$

L'équation (94′) montre qu'alors φ est fonction de H, lui-même fonction de $w = u + v$, $\mathrm{H} = f(w)$. Or, en tenant compte de $\mathrm{A} = e^{\mu}f'(w)$, il vient

$$\varphi = \frac{1}{rs\mathrm{A}^2}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right) = \left(\frac{4(\psi_u\psi_v)}{\psi_{uv}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\frac{1}{e^{2\mu}f'^2(w)}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right) = \frac{4\sqrt{\psi_u\psi_v}}{f'^2(w)}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right).$$

Ce sera une fonction de w si

(96) $$\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right) = \frac{\alpha(u+v)}{\sqrt{\psi_u\psi_v}}.$$

L'équation (92), qui donne t, et qui s'écrivait

(97 $$dt = -\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right)\left(\frac{\omega_1}{s} + \frac{\omega_2}{r}\right) + t\,d\mu,$$

devient, si l'on pose $t = \rho e^{\mu}$,

(98) $$d\rho = 2\alpha(w)\,dw. \qquad (w = u + v).$$

Ainsi ρ n'est fonction que de w, et l'on a

$$(99) \qquad \frac{d\rho}{dw} = 2\alpha(w) = 2\sqrt{\psi_u\psi_v}\left(\frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A}\right).$$

Avec les expressions actuelles de ω_1 et ω_2, il vient

$$-\frac{dH}{2A} = r\omega_1 + s\omega_2 = -\frac{\psi_{uv}}{2\sqrt{\psi_u\psi_v}}(du + dv) = -\frac{1}{2e^\mu}dw.$$

On vérifie que, si $H = f(w)$, on a $A = e^\mu f'(w)$. Sur $\overline{S}$, on a pareillement $\overline{H} = \overline{f}(w)$, $\overline{A} = e^\mu \overline{f}'(w)$. La surface $\overline{S}$ sera essentiellement déterminée quand on connaîtra la fonction $\overline{f}(w)$.

Parmi les équations (90), retenons en particulier

$$\overline{\omega}_{11} = (p + rt)\,\omega_1 + r\omega_2 = \omega_{11} + rt\,\omega_1$$
$$\overline{\omega}_{22} = s\omega_1 + (q + st)\,\omega_2 = \omega_{22} + st\,\omega_2,$$

ce qui donne

$$\frac{d\overline{A}}{\overline{A}} = \frac{dA}{A} - \rho\, e^\mu(r\omega_1 + s\omega_2) = \frac{dA}{A} + \frac{\rho}{2}dw,$$

donc

$$d\log\frac{\overline{A}}{A} = \frac{\rho}{2}dw, \qquad \text{ou} \qquad \rho = 2\frac{d}{dw}\left(\log\frac{\overline{f}'}{f'}\right).$$

Ensuite, d'après (98)

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{d\rho}{dw} = \frac{d^2}{dw^2}\left(\log\frac{\overline{f}'}{f'}\right).$$

Enfin, (96) donne

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_u\psi_v}}\frac{d^2}{dw^2}\left(\log\frac{\overline{f}'}{f'}\right) = \frac{\overline{K}}{\overline{A}} - \frac{K}{A} = \frac{\overline{f}^2}{e^\mu\overline{f}'} - e^\mu\overline{f}' - \frac{f^2}{e^\mu f'} + e^\mu f'.$$

Telle est l'équation qui doit déterminer $\overline{f}(w)$, quand $\psi(u, v)$ et $f(w)$ sont connues. On peut l'écrire, en remplaçant e^μ par sa valeur

$$(100) \qquad \frac{d^2}{dw^2}\left(\log\frac{\overline{f}'}{f'}\right) = \psi_{uv}\left(\frac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \frac{f^2}{f'}\right) - \frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}(\overline{f}' - f');$$

elle est du 3^e ordre en $\overline{f}$. Sa signification est facile à apercevoir : il suffit d'écrire l'équation de Gauss sous sa forme (61), d'abord pour S, puis pour $\overline{S}$, et de retrancher membre à membre.

Bien que l'équation (100), qui détermine $\overline{f}$, soit une équation différentielle, elle n'admet cependant, en général, que la solution $\overline{f} = f$, ce qui exprime que, si $\psi(u, v)$ n'est assujettie à aucune condition particulière, S n'appartient à aucun couple. En effet, appliquons deux fois à l'équation (100) l'opération $\Delta = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}$:

$$(101) \qquad \left\{\begin{aligned} &\Delta\psi_{uv}\left(\frac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \frac{f^2}{f'}\right) - \Delta\left(\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}\right)(\overline{f}' - f') = 0,\\ &\Delta^2\psi_{uv}\left(\frac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \frac{f^2}{f'}\right) - \Delta^2\left(\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}\right)(\overline{f}' - f') = 0.\end{aligned}\right.$$

Ces deux équations, linéaires et homogènes par rapport aux deux différences, n'admettent que la solution nulle, en général. Pour que S fasse partie d'un couple au moins, il est nécessaire que le déterminant de ces équations soit nul.

Nous laissons de côté provisoirement le cas, très intéressant, où ces deux équations s'évanouissent, où l'on a à la fois

$$\Delta\psi_{uv} = 0, \qquad \Delta\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}} = 0;$$

c'est le cas où, sur notre surface S à courbure moyenne isotherme, les lignes d'égale courbure moyenne sont géodésiquement parallèles. Il existe alors une triple infinité de surfaces $\overline{S}$ ayant les mêmes formes minima que S.

Supposons $\Delta\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}} \neq 0$, et que les deux équations (101) soient équivalentes; cela exige que $\psi(u, v)$ satisfasse à une relation de la forme

$$\psi_{uv} = \gamma(w)\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}} + \delta(w).$$

La fonction $\overline{f}$ doit alors vérifier les deux équations

$$(102)\qquad \begin{cases} \overline{f}' - f' = \gamma(w)\left(\dfrac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \dfrac{f^2}{f'}\right), \\ \dfrac{d^2}{dw^2}\log\dfrac{\overline{f}'}{f'} = \delta(w)\left(\dfrac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \dfrac{f^2}{f'}\right). \end{cases}$$

Ces deux équations peuvent admettre une solution commune autre que $\overline{f} = f$: on la trouvera sans intégration en calculant, d'après la première, $\overline{f}'$, puis $\overline{f}''$, $\overline{f}'''$ en fonction de $\overline{f}$ et de w, puis en portant ces expressions dans la seconde, qui donnera alors $\overline{f}(w)$.

Si nous avions supposé $\Delta\frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}} = 0$, mais $\Delta\psi_{uv} \neq 0$, les deux équations s'écriraient

$$(103)\qquad \begin{cases} \dfrac{\overline{f}^2}{\overline{f}'} - \dfrac{f^2}{f'} = 0, \\ \dfrac{d^2}{dw^2}\log\dfrac{\overline{f}'}{f'} = -\lambda(w)(\overline{f}' - f'), \qquad \lambda(w) = \dfrac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}}, \end{cases}$$

et la conclusion serait la même.

Il peut toutefois arriver que toutes les solutions de la première équation, du premier ordre, soient aussi solutions de la seconde, qui est du troisième ordre : il existe alors une infinité de surfaces $\overline{S}$, dépendant d'*un* paramètre, pouvant être mises en représentation conforme minima avec S. Si nous examinons, par exemple, le second cas ci-dessus [formules (103)], nous trouvons que la solution générale $\overline{f} = \frac{f}{1 + kf}$ de la première équation vérifie la seconde, si $f = -\frac{1}{Cw + D}$, ce qui suppose $\lambda(w) = \frac{\psi_u\psi_v}{\psi_{uv}} = -2C$, d'où, pour ψ, la forme $2C\log(U + V)$. Comme w n'est défini qu'à une transformation linéaire près, on peut prendre $C = 1$, $D = 0$, de sorte que $\psi = 2\log(U+V)$, $f = -\frac{1}{u+v}$. Toutes les surfaces $\overline{S}$ sont alors données par $\overline{f} = \frac{1}{k-(u+v)}$. Les formes quadratiques sont, pour S,

$$(104)\quad \begin{cases} ds^2 = -\dfrac{4U'V'}{(U+V)^2}(u+v)^2\,du\,dv \\ \Phi = \dfrac{2U'}{U+V}du^2 + \dfrac{4U'V'}{(U+V)^2}(u+v)\,du\,dv + \dfrac{2V'}{U+V}dv^2, \end{cases}$$

pour $\overline{S}$,

$$(105)\quad \begin{cases} \overline{ds}^2 = -\dfrac{4U'V'}{(U+V)^2}(u+v-k)^2\,du\,dv \\ \overline{\Phi} = \dfrac{2U'}{U+V}du^2 + \dfrac{4U'V'}{(U+V)^2}(u+v-k)\,du\,dv + \dfrac{2V'}{U+V}dv^2. \end{cases}$$

Comme on le voit, la famille des surfaces S dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument, et, à un choix donné de ces fonctions, correspondent une infinité de surfaces dépendant d'un paramètre, représentables les unes sur les autres suivant le mode étudié. Ces surfaces ont déjà été rencontrées par Ossian Bonnet, dans son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* (*Journal de l'École polytechnique*, **42**, 1867, p. 72-92), alors qu'il recherchait les surfaces déformables sans altération des courbures principales. Dans un travail non encore publié, j'établis que toutes les surfaces jouissant de cette propriété sont à courbure moyenne isotherme, avec une fonction $\psi(u, v)$ vérifiant $\frac{\psi_{uv}}{\psi_u \psi_v} = \text{const}$. Cette condition se trouve bien réalisée ici. La plupart des surfaces d'O. Bonnet sont des surfaces W ; ce n'est pas le cas présentement, à cause de l'hypothèse $\Delta\psi_{uv} \neq 0$; nous sommes donc en présence des surfaces que M. E. Cartan appelle *de deuxième classe*, dans son étude récente *sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales* (*Bulletin des Sciences Mathématiques*, 66, 1942, p. 55-85). On peut déterminer l'expression des coordonnées de telles surfaces en fonction de u, v et de deux fonctions arbitraires, mais ce calcul, que nous avons repris, en le simplifiant, après Hazzidakis (*Journal de Crelle*, **117**, 1897, p. 42-56) perd une grande partie de son intérêt, du fait qu'aucune de ces surfaces n'est réelle.

Les résultats sont différents si l'opération Δ, appliquée à (100), donne identiquement zéro. Cela se produit quand ψ_{uv} et $\psi_u\psi_v$ sont fonctions de $u+v$; alors $\overline{f}$ dépend de trois constantes arbitraires, c'est-à-dire qu'il y a ∞^3 surfaces représentables sur une surface de cette nature.

Quand on connaît ψ_{uv} et $\psi_u\psi_v$, on peut généralement calculer ψ_u et ψ_v sans intégration ; c'est une conséquence de l'identité suivante, que nous nous contentons de signaler :

$$(106)\qquad \psi_u\left(\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\right)_v + \psi_v\left(\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}\right)_u = \left(\log\psi_u\psi_v\right)_{uv} - 2\frac{\psi_{uv}^2}{\psi_u\psi_v}.$$

Si le rapport $\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}$ n'est pas une constante, cette identité, jointe à l'expression censée connue de $\psi_u\psi_v$, donne ψ_u et ψ_v. Si ψ_{uv} et $\psi_u\psi_v$ ne dépendent que de $u+v$, il en sera de même de ψ_u et ψ_v :

$$\psi_u = g(u+v), \quad \psi_v = h(u+v),$$

d'où, par dérivation, $\psi_{uv} = g' = h'$. En changeant légèrement les notations, on pourra donc écrire

$$\psi_u = g(u+v) - ia, \quad \psi_v = g(u+v) + ia,$$

et l'équation de Gauss (61) deviendra

$$\frac{d^2}{dv^2}\left(\log\frac{g'}{f'}\right) = (g^2 + a^2)\frac{f'}{g'} - f^2\frac{g'}{f'},$$

qui est l'équation (61)'' des ***hélicoïdes***; au cas où $a = 0$, on a les ***surfaces de révolution***, ou les ***cylindres***.

Si le rapport $\frac{\psi_{uv}}{\psi_u\psi_v}$ est une constante, l'identité (106) ne permet plus de calculer ψ_u et ψ_v; on a alors, comme nous l'avons dit plus haut, des surfaces d'O. Bonnet. Comme $\Delta\psi_{uv} = 0$, et qu'on suppose la courbure moyenne variable, ce sont les ***surfaces d'O. Bonnet*** de ***troisième classe***.

15. **Solutions singulières.** — Ce sont celles pour lesquelles le déterminant (80) a un rang inférieur à 5; il faut pour cela $t = 0$, et l'on a alors

$$\bar{p} = p, \quad \bar{q} = q;$$

les surfaces S et $\bar{S}$ ont en commun les quatre invariants du 3e ordre p, q, r, s.

Dans les équations (74), la seconde colonne devient

$$\bar{\omega}_{11} = \omega_{11}, \quad d\bar{\beta} - \bar{\beta}(\bar{\omega}_{11} + \bar{\omega}_{22}) = -2r\omega_1 - 2s\omega_2, \quad \bar{\omega}_{22} = \omega_{22}. \tag{107}$$

Les trois premières des équations quadratiques (75) ne sont pas modifiées, les autres donnent simplement l'équation finie

$$\bar{A}(1 - \bar{\beta}^2) = A(1 - \beta^2) \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\bar{K}}{\bar{A}} = \frac{K}{A}. \tag{108}$$

La première et la troisième des équations (107) entraînent

$$\frac{d\bar{A}}{\bar{A}} = \frac{dA}{A}, \tag{109}$$

donc,

$$\bar{A} = \lambda A \quad (\lambda, \text{ const.}).$$

On voit qu'aux points correspondants, les surfaces S et $\bar{S}$ ont des asphéricités proportionnelles et des isotropies égales.

La seconde des équations (107) donne

$$\frac{d\bar{H}}{\bar{A}} = \frac{dH}{A}, \tag{110}$$

d'où

$$d\bar{H} = \lambda\, dH, \quad \bar{H} = \lambda(H + m) \quad (m, \text{ const.}).$$

En éliminant $\overline{A}$ et $\overline{H}$ entre les équations (108), (109) et (110), on trouve une condition concernant S :

$$(111) \qquad \lambda(K+2mH+m^2)=K \qquad \text{ou} \qquad (\lambda-1)K+2\lambda \qquad m^2=0.$$

Examinons d'abord le cas $\lambda=1$. On aurait, d'après (109), (110) et (108),

$$\overline{A}=A, \qquad \overline{H}=H+m, \qquad \overline{H}^2=H^2.$$

Si $\overline{H}=H$, il vient $m=0$, les deux surfaces ne sont pas essentiellement distinctes. Si $\overline{H}=-H$, on a

$$H=-\frac{m}{2}, \quad \overline{H}=\frac{m}{2},$$

S et $\overline{S}$ sont à courbure moyenne constante, circonstance que nous excluons provisoirement.

Nous supposerons dans ce qui suit $\lambda\neq 1$. La relation (111) est alors une relation linéaire entre la courbure totale et la courbure moyenne de S; S doit donc être une surface de Weingarten d'un type particulier ([1]). Sur $\overline{S}$, on aura

$$\overline{A}=\lambda A, \qquad \overline{H}=\lambda(H+m), \qquad \overline{K}=\lambda K.$$

$\overline{S}$ est aussi une surface de Weingarten du même type que S, la relation entre sa courbure totale et sa courbure moyenne étant

$$(\lambda-1)\overline{K}+2\lambda m\overline{H}-\lambda^2m^2=0.$$

Quand S est connue, on connaît λ et m, donc $\overline{S}$ est essentiellement connue.

Pour déterminer le degré de généralité du couple S, $\overline{S}$ dans les conditions actuelles, nous tiendrons compte de la condition (111), qui, différentiée, donne

$$(112) \qquad \frac{p+s}{r}=\frac{q+r}{s}=\frac{2(\lambda-1)H+2\lambda m}{(\lambda-1)A},$$

posons $=w$.

On constate sans peine que

$$(113) \qquad dw=(w^2-4)(r\omega_1+s\omega_2).$$

p et q s'expriment à l'aide de r, s et w, et le système quadratique (75) se réduit à

$$(114) \qquad \begin{cases} [(-ds+w\,dr)\omega_1]+[dr\,\omega_2]=\left(\dfrac{K}{A}-r^2w+rs\sqrt{w^2-2}\right)[\omega_1\omega_2], \\ [dr\,\omega_1]+[ds\,\omega_2]=(s^2-r^2)[\omega_1\omega_2], \\ [ds\,\omega_1]+[(-dr+w\,ds)\omega_2]=\left(-\dfrac{K}{A}+s^2w-rs\sqrt{w^2-2}\right)[\omega_1\omega_2]. \end{cases}$$

([1]) Ces surfaces ont été rencontrées par M. É. Cartan dans un problème différent (*Les systèmes différentiels extérieurs*, p. 166). Elles sont d'ailleurs bien connues (*voir* L. Bianchi, *Lezioni di Geometria differenziale*, Bologna, Zanichelli, vol. I, 3e éd., p. 682).

La seconde de ces relations se déduit des deux autres par addition; elle exprime que $r\omega_1 + s\omega_2$ est une différentielle exacte, ce qui caractérise les surfaces de Weingarten. Le tableau des formes secondaires dr, ds, est

$$(115)\qquad \begin{vmatrix} w\omega_1 + \omega_2 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 + w\omega_2 \end{vmatrix} = w^2\omega_1\omega_2 + w(\omega_1^2 + \omega_2^2).$$

w n'est pas nul, puisqu'on a exclu $H = \text{const.}$, donc le système est en involution, et sa solution dépend de 2 fonctions d'un argument, comme la surface de Weingarten S elle-même. Cela se comprend, puisqu'on a remarqué que $\bar{S}$ se trouve essentiellement déterminée dès que S est connue, et puisque, par ailleurs, la représentation conforme minima de $\bar{S}$ sur S s'établit sans aucun arbitraire.

Passons au *problème de Cauchy*. On obtiendra une solution à *une* dimension en prenant une bande quelconque, $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$; les invariants A et H, et l'angle θ, se calculeront au moyen de (111) et de

$$(116)\qquad \frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau} = -A\sin 2\theta, \qquad \frac{\cos\varpi}{\rho} = H + A\cos 2\theta.$$

Le trièdre B se trouve alors connu tout le long de la courbe support de la bande initiale. Pour $\bar{S}$, on aura $\bar{A}$ et $\bar{H}$ par $\bar{A} = \lambda A$, $\bar{H} = \lambda(H + m)$; en outre, $d\bar{v} = \frac{dv}{\sqrt{\lambda}}$, $\bar{\theta} = 0$. L'angle $\bar{\varpi}$, les invariants $\bar{\rho}$ et $\bar{\tau}$ se calculeront par

$$(117)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin\bar{\varpi}}{\bar{\rho}}\,d\bar{v} = \dfrac{i}{2}(\omega_{11} - \omega_{22}) + d\theta = \dfrac{\sin\varpi}{\rho}\,dv, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \dfrac{\sin\bar{\varpi}}{\bar{\rho}} = \sqrt{\lambda}\,\dfrac{\sin\varpi}{\rho}, \\[2ex] \dfrac{\cos\bar{\varpi}}{\bar{\rho}} = \lambda(H + m) + \lambda A\cos 2\theta = \lambda\dfrac{\cos\varpi}{\rho} + \lambda m, \\[2ex] \dfrac{d\bar{\varpi}}{d\bar{v}} + \dfrac{1}{\bar{\tau}} = -\lambda A\sin 2\theta = \lambda\left(\dfrac{d\varpi}{dv} + \dfrac{1}{\tau}\right). \end{cases}$$

Tout se trouve donc déterminé, pour cette solution à 1 dimension, quand on se donne $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$. On pourrait d'ailleurs prendre $\frac{1}{\tau} = 0$, et l'on retrouverait les 2 fonctions arbitraires prévues par la théorie.

Le problème de Cauchy peut se résoudre aussi en partant d'une courbe minima (L_1), d'invariant $h(\sigma)$. L'écart $p(\sigma)$ situe le trièdre cyclique géodésique de (L_1) par rapport à son trièdre cyclique intrinsèque, et la courbure moyenne H se calcule, en chaque point de (L_1), par

$$H = \frac{dp}{d\sigma} + \frac{p^2}{2} - h.$$

La relation (111) donne ensuite $A(\sigma)$; ainsi se trouve déterminé le trièdre biisotrope B tout le long de (L_1). Les formules $\bar{A} = \lambda A$, $\bar{H} = \lambda(H + m)$, $\bar{p} = p$, permettent ensuite de calculer $\bar{h}(\sigma)$ $(\bar{\sigma} = \sigma)$; donc la courbe minima $(\bar{L}_1)$, décrite par l'origine du trièdre $\bar{B}$, est essentiellement déterminée. $\bar{B}$ lui-même est connu en tout point de (L_1), puisqu'on connaît, $\bar{p}(\bar{\sigma})$ et $\bar{A}(\bar{\sigma})$. Les deux fonctions arbitraires sont ici $h(\sigma)$ et $p(\sigma)$.

Étudions maintenant les *solutions caractéristiques*. Puisque, dans le problème actuel, une fois S connue, l'autre surface du couple, $\bar{S}$, est connue, ainsi que les égalités réalisant la correspondance entre S et $\bar{S}$, il suffit de porter son attention sur la détermination de S, surface de Weingarten vérifiant la relation (111), que nous désignerons par $F(A, H) = 0$. $(K = H^2 - A^2)$.

Le système différentiel de ces surfaces est

$$\omega_3 = 0, \qquad \omega_{13} = \omega_1 + \beta\omega_2, \qquad \omega_{23} = \beta\omega_1 + \omega_2, \tag{118}$$

équations auxquelles s'ajoute l'équation finie $F(A, H) = 0$.

Le système quadratique dérivé de (118) est, comme dans le cas général,

$$\begin{cases} -2[\omega_1\omega_{11}] + [\omega_2(d\beta - \beta\overline{\omega_{11} + \omega_{22}})] = 0, \\ [\omega_1(d\beta - \beta\overline{\omega_{11} + \omega_{22}})] - 2[\omega_2\omega_{22}] = 0. \end{cases} \tag{119}$$

Il y apparaît 3 formes secondaires, mais non indépendantes entre elles. En effet, de $\beta = \frac{H}{A}$, on déduit $d\beta - \beta(\omega_{11} + \omega_{22}) = \frac{dH}{A}$; par ailleurs, $\omega_{11} + \omega_{22} = -\frac{dA}{A}$, et la relation $F'_A\,dA + F'_H\,dH = 0$ donne

$$F'_A(\omega_{11} + \omega_{22}) - F'_H(d\beta - \beta\overline{\omega_{11} + \omega_{22}}) = 0. \tag{120}$$

Le système est en involution, sa solution générale dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument, et les caractéristiques, que nous avons spécialement en vue pour le moment, sont obtenues en annulant le déterminant formé par les coefficients des formes secondaires dans (119) et (120) :

$$\begin{vmatrix} -2\omega_1 & \omega_2 & 0 \\ 0 & \omega_1 & -2\omega_2 \\ F'_A & -F'_H & F'_A \end{vmatrix} = -2F'_A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 4F'_H\omega_1\omega_2 = 0. \tag{121}$$

Comme on peut écrire cette relation

$$F'_A(\omega_1^2 + 2\beta\omega_1\omega_2 + \omega_2^2) - 2(\beta F'_A + F'_H)\omega_1\omega_2 = 0,$$

on constate que les tangentes caractéristiques se correspondent dans l'involution définie par les tangentes asymptotiques et par les tangentes minima, conformément à la règle générale [1].

La relation (121) s'écrit, en tenant compte de

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{A}{2}}\,e^{-i\theta}\,dv, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{A}{2}}\,e^{i\theta}\,dv,$$

$$F'_H = \cos 2\theta\, F'_A, \tag{122}$$

θ désignant l'angle de la caractéristique avec la 1^{re} direction principale.

Désignons par $\omega_1 - \mu\omega_2 = 0$ l'équation d'une caractéristique $(\mu = e^{-2i\theta})$. On peut, d'après la théorie générale, former une combinaison des 2 équations

---

[1] *Cf.* É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs*, p. 133 et suiv.

quadratiques qui contienne en facteur $\omega_1 - \mu\omega_2$. En prenant comme multiplicateurs $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$, on obtient

$$\left[\omega_1\left(-2\,e^{i\theta}\omega_{11}+e^{-i\theta}\left(d\beta-\beta\overline{\omega_{11}+\omega_{22}}\right)\right)\right]+\left[\omega_2\left(e^{i\theta}\left(d\beta-\beta\overline{\omega_{11}+\omega_{22}}\right)-2\,e^{-i\theta}\omega_{22}\right)\right]=0,$$

ce qui peut s'écrire, en vertu de $\mu = e^{-2i\theta}$ et de $\cos 2\theta\, dH + dA = 0$,

$$\left[(\omega_1-\mu\omega_2)\left(2\,e^{i\theta}\omega_{11}-e^{-i\theta}\left(d\beta-\beta\overline{\omega_{11}+\omega_{22}}\right)\right)\right]=0. \tag{123}$$

On a donc, le long de la caractéristique,

$$2\omega_{11}=e^{-2i\theta}\left(d\beta-\beta\overline{\omega_{11}+\omega_{22}}\right)=e^{-2i\theta}\frac{dH}{A}, \tag{124}$$

ce qui s'écrit aussi

$$2\omega_{22}=e^{2i\theta}\frac{dH}{A}, \tag{125}$$

car l'addition de (124) et (125) donne

$$2(\omega_{11}+\omega_{22})=2\cos 2\theta\frac{dH}{A} \qquad \text{ou} \qquad dA+\cos 2\theta\, dH=0.$$

On a encore, le long de cette caractéristique, en soustrayant (125) de (124),

$$2(\omega_{11}-\omega_{22})=-2i\sin 2\theta\frac{dH}{A}. \tag{126}$$

Si maintenant l'on se rappelle que la courbure géodésique d'une courbe quelconque de la surface s'exprime, d'après (52), par

$$dv\frac{\sin\varpi}{\rho}=\frac{i}{2}(\omega_{11}-\omega_{22})+d\theta,$$

on voit qu'en définitive, la caractéristique vérifie

$$\frac{\sin\varpi}{\rho}=\frac{d\theta}{dv}+\frac{\sin 2\theta}{2A}\frac{dH}{dv}. \tag{127}$$

Une courbe quelconque ne saurait être caractéristique d'une surface S. Le long d'une caractéristique, on a, en effet, les 5 relations

$$\left\{\begin{aligned} &F(A, H)=0, \quad F'_H=\cos 2\theta F'_A \quad (\text{d'où } dA+\cos 2\theta\, dH=0),\\ &\frac{\cos\varpi}{\rho}=H+A\cos 2\theta, \quad \frac{d\varpi}{dv}+\frac{1}{\tau}=-A\sin 2\theta, \quad \frac{\sin\varpi}{\rho}=\frac{d\theta}{dv}+\frac{\sin 2\theta}{2A}\frac{dH}{dv},\end{aligned}\right. \tag{128}$$

entre lesquelles on peut éliminer A, H, θ, et ϖ. Étant donné la forme particulière (111) de $F(A, H)$, la seconde relation donne

$$\cos 2\theta=-\frac{(\lambda-1)H+\lambda m}{(\lambda-1)A}=-\frac{H}{A}-\frac{\lambda m}{(\lambda-1)A},$$

et la troisième

$$\frac{\cos\varpi}{\rho}=-\frac{\lambda m}{\lambda-1},$$

c'est-à-dire que *la courbure normale d'une caractéristique est constante, et la même pour toutes les caractéristiques.*

Dérivons ensuite $A \sin 2\theta$, en utilisant la seconde des relations (128)

$$\frac{d}{dv}(A \sin 2\theta) = 2A \cos 2\theta \frac{d\theta}{dv} - \sin 2\theta \cos 2\theta \frac{dH}{dv} = \cos 2\theta \left(2A \frac{d\theta}{dv} - \sin 2\theta \frac{dH}{dv}\right).$$

Mais la parenthèse est nulle, comme on le voit en dérivant

(129) $$\cos 2\theta = -\frac{H}{A} - \frac{\lambda m}{(\lambda - 1)A},$$

donc, second résultat, *la torsion géodésique d'une caractéristique est constante*. On calcule la valeur de cette torsion géodésique en se servant de $F(A, H) = 0$, et l'on trouve

$$A^2 \sin^2 2\theta = -\frac{\lambda m^2}{(\lambda - 1)^2},$$

donc, *toutes les caractéristiques ont la même torsion géodésique*. Enfin la formule $\frac{d\theta}{dv} = \frac{\sin 2\theta}{2A} \frac{dH}{dv}$, obtenue en dérivant (129), montre que

$$\frac{\sin \varpi}{\rho} = 2 \frac{d\theta}{dv},$$

donc *la courbure géodésique d'une caractéristique est le double de la dérivée par rapport à l'arc de l'angle qu'elle fait avec la première direction principale.*

Si l'on appelle α la valeur constante de la courbure normale de la caractéristique, et γ celle de sa torsion géodésique, on a

$$\alpha = -\frac{\lambda m}{\lambda - 1}, \qquad \gamma^2 = -\frac{\lambda m^2}{(\lambda - 1)^2}, \qquad \text{d'où } \lambda = -\frac{\alpha^2}{\gamma^2}, \qquad m = -\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\alpha}.$$

La relation $F(A, H) = 0$ s'écrit donc

$$H^2 - A^2 - 2\alpha H + \alpha^2 + \gamma^2 = 0 \qquad \text{ou} \qquad (H - \alpha)^2 - A^2 + \gamma^2 = 0.$$

Partons des deux relations concernant une caractéristique :

$$\cos \varpi = \alpha \rho, \qquad \frac{d\varpi}{dv} = \gamma - \frac{1}{\tau}.$$

Dérivons la première en tenant compte de la seconde

$$-\sin \varpi \left(\gamma - \frac{1}{\tau}\right) = \alpha \frac{d\rho}{dv}, \qquad \text{d'où} \quad \sin \varpi = \frac{\alpha \dfrac{d\rho}{dv}}{\dfrac{1}{\tau} - \gamma};$$

enfin, éliminons ϖ

$$\alpha^2 \rho^2 + \frac{\alpha^2 \rho'^2}{\left(\dfrac{1}{\tau} - \gamma\right)^2} = 1 \qquad \left(\rho' = \frac{d\rho}{dv}\right).$$

Telle est la relation que doit vérifier une courbe pour être caractéristique d'une surface S du type étudié. Si l'on se donne une telle courbe, on pourra déterminer $\varpi(v)$, puis $\theta(v)$ à une constante additive près, par $d\theta = \frac{\sin\varpi}{2\rho}dv$. On aura ensuite A et H par

$$H + A\cos 2\theta = \alpha, \qquad -A\sin 2\theta = \gamma,$$

qui entraînent $F(A, H) = 0$ et $F'_H = \cos 2\theta F'_A$. On obtiendra donc une famille à un paramètre de solutions à une dimension, ayant pour support la courbe donnée, mais on ne peut affirmer qu'à chacune de ces solutions à 1 dimension corresponde une solution à 2 dimensions.

Remarque. — Quand on résout le problème de Cauchy en général, une fois donnés ρ, τ, ϖ en fonction de l'arc v de la courbe, on a pour déterminer A, H et θ les 2 relations

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = H + A\cos 2\theta, \qquad \frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau} = -A\sin 2\theta.$$

L'élimination de θ donne

$$\left(H - \frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau}\right)^2 = A^2,$$

ce qui s'écrit

$$H^2 - A^2 - 2\frac{\cos\varpi}{\rho}H + \left(\frac{\cos\varpi}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau}\right)^2 = 0, \tag{130}$$

où l'on peut remplacer $H^2 - A^2$ par K. K et H vérifient donc toujours cette relation linéaire (en K et H), dont les coefficients sont généralement fonctions de v. Cette relation eût d'ailleurs pu se déduire aussi d'une formule bien connue liant les 3 formes fondamentales de la surface (ds^2, forme asymptotique, carré du déplacement sphérique), à savoir

$$K\,ds^2 - 2H\Phi - dI_3^2 = 0, \qquad \left[\frac{dI_3}{dv} = -\frac{\cos\varpi}{\rho}t - \left(\frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau}\right)g\right].$$

S'il s'agit d'une surface W du type considéré, on a déjà

$$K - 2\alpha H + \alpha^2 + \gamma^2 = 0. \tag{131}$$

Si la courbe envisagée ne vérifie pas $\frac{\cos\varpi}{\rho} = \alpha$, on pourra résoudre (130) et (131) par rapport à H et K, mais si $\frac{\cos\varpi}{\rho} = \alpha$, les deux relations ne seront compatibles que si $\left(\frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau}\right)^2 = \gamma^2$, et alors elles se réduiront à une seule : c'est ce qui se passe le long de toute caractéristique.

Comparons maintenant les caractéristiques des 2 surfaces appartenant à un même couple singulier. Il est facile de voir que la relation linéaire entre la courbure totale de $\overline{S}$ et sa courbure moyenne s'écrit comme celle de S, mais avec les paramètres $\overline{\lambda}$ et $\overline{m}$

$$\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}, \qquad \overline{m} = -\lambda m.$$

La courbure normale d'une caractéristique de $\overline{S}$ sera donc

$$\overline{\alpha} = -\frac{\overline{\lambda}\,\overline{m}}{\overline{\lambda} - 1} = -\frac{\lambda m}{\lambda - 1} = \alpha,$$

donc *les courbures normales des caractéristiques de* S *et* $\overline{S}$ *sont égales.*

Pour les torsions géodésiques, il suffit de se rappeler que $\frac{\alpha^2}{\gamma^2} = -\lambda$. On aura donc $\frac{\overline{\alpha}^2}{\overline{\gamma}^2} = -\frac{1}{\lambda}$, donc, en multipliant terme à terme

$$\gamma^2 \overline{\gamma}^2 = \alpha^4.$$

donc *la courbure normale commune est moyenne proportionnelle entre les torsions géodésiques des caractéristiques de* S *et de* $\overline{S}$.

16. **Étude géométrique d'un couple singulier.** — Soit P le point courant de S, ρ_1 et ρ_2 ses rayons de courbure principaux. La relation (111) s'écrit aussi, en multipliant par $\rho_1 \rho_2$,

$$\lambda - 1 + \lambda m(\rho_1 + \rho_2) + \lambda m^2 \rho_1 \rho_2 = 0. \tag{111'}$$

Portons sur la normale, à partir de P, un segment de mesure algébrique $-\frac{1}{m}$; nous obtenons le point $Q = P - \frac{1}{m} I_3$, qui décrit une surface Σ, parallèle à S, admettant par conséquent les mêmes centres de courbure principaux que S, et ayant pour rayons de courbure

$$r_1 = \rho_1 + \frac{1}{m}, \qquad r_2 = \rho_2 + \frac{1}{m}.$$

Éliminant ρ_1 et ρ_2 entre ces deux relations et (111)', nous trouvons

$$r_1 r_2 = \frac{1}{\lambda m^2},$$

donc la surface Σ est à courbure totale constante : la relation (111) signifie donc que S est parallèle à une certaine surface Σ à courbure totale constante. $\overline{S}$ jouit évidemment d'une propriété analogue, λ et m étant remplacés par $\overline{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ et $\overline{m} = -\lambda m$. Si $\overline{P}$ est le point courant de $\overline{S}$, le point

$$\overline{Q} = \overline{P} - \frac{1}{\overline{m}} \overline{I}_3 = \overline{P} + \frac{1}{\lambda m} \overline{I}_3$$

décrit une surface $\overline{\Sigma}$ dont la courbure totale est constante, et égale à $\overline{\lambda}\,\overline{m}^2$; mais $\overline{\lambda}\,\overline{m}^2 = \lambda m^2$, donc $\overline{\Sigma}$ a même courbure totale (constante) que Σ.

Les surfaces S et $\overline{S}$ sont en représentation conforme minima, et cette correspondance vérifie

$$\overline{A} = \lambda A, \qquad \overline{H} = \lambda(H + m).$$

De plus, nous mettons Σ en correspondance avec S, et $\overline{\Sigma}$ avec $\overline{S}$, par normales communes; quel genre de correspondance obtenons-nous de la sorte entre Σ et $\overline{\Sigma}$?

D'abord leurs lignes de courbure se correspondent, puisqu'il en est ainsi dans le passage de Σ à S, de S à $\overline{S}$, et de $\overline{S}$ à $\overline{\Sigma}$. Cherchons les relations entre leurs rayons de courbure principaux. En ce qui concerne S et $\overline{S}$, nous avons

$$\frac{1}{\overline{\rho}_1} - \frac{1}{\overline{\rho}_2} = \lambda\left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_2}\right), \qquad \frac{1}{\overline{\rho}_1} + \frac{1}{\overline{\rho}_2} = \lambda\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) \mp 2\lambda m.$$

On a, en outre,

$$\rho_1 = r_1 - \frac{1}{m}, \qquad \overline{\rho}_1 = \overline{r}_1 + \frac{1}{\lambda m},$$

$$\rho_2 = r_2 - \frac{1}{m}, \qquad \overline{\rho}_2 = \overline{r}_2 + \frac{1}{\lambda m}.$$

L'élimination de ρ_1, ρ_2, $\overline{\rho}_1$, $\overline{\rho}_2$ donne simplement

$$\overline{r}_1 = -r_2, \qquad \overline{r}_2 = -r_1;$$

il y a donc permutation des courbures principales, accompagnée d'un changement de signe, quand on passe de Σ à $\overline{\Sigma}$: Σ et $\overline{\Sigma}$ forment un couple de surfaces à courbure totale constante susceptibles d'être mises en correspondance ponctuelle avec conservation des lignes de courbure et permutation des courbures principales. De tels couples sont bien connus, ce sont des *couples d'Hazzidakis* (¹). En supposant les deux surfaces à courbure totale positive ($\lambda > 0$), l'élément linéaire de $\overline{\Sigma}$ est identique à l'élément de la représentation sphérique de Σ, divisé par la courbure totale, et inversement. La détermination de ces couples revient à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta = 0.$$

Si $\theta(u, v)$ satisfait à cette équation, on pourra exprimer les 3 formes fondamentales de Σ et de $\overline{\Sigma}$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{aligned} dQ^2 &= \frac{1}{\lambda m^2}(\operatorname{sh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{ch}^2\theta\, dv^2),\\ -dQ.dI_3 &= \frac{1}{m\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta(du^2 + dv^2),\\ dI_3^2 &= \operatorname{ch}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2,\end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} d\overline{Q}^2 &= \frac{1}{\lambda m^2}(\operatorname{ch}^2\theta\, du^2 + \operatorname{sh}^2\theta\, dv^2),\\ -d\overline{Q}.d\overline{I}_3 &= -\frac{1}{m\sqrt{\lambda}}\operatorname{sh}\theta\operatorname{ch}\theta\,(du^2 + dv^2),\\ d\overline{I}_3^2 &= \operatorname{sh}^2\theta\, du^2 + \operatorname{ch}^2\theta\, dv^2,\end{aligned}\right.$$

et, d'après

$$P = Q + \frac{1}{m}I_3, \qquad \overline{P} = \overline{Q} - \frac{1}{\lambda m}\overline{I}_3,$$

(¹) *Cf.* B. Gambier, *Mémorial des Sc. Mathém.*, fasc. XXXI, p. 21-22. Sur le problème général que pose ce mode de correspondance, voir É. Cartan, *Les systèmes différentiels extérieurs*, p. 161.

on obtiendra pour S et $\bar{S}$

$$\left\{\begin{aligned} dP^2 &= \frac{1}{m^2}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{ch}\theta\right)^2 du^2 + \frac{1}{m^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{sh}\theta\right)^2 dv^2,\\ \Phi &= \frac{\operatorname{ch}\theta}{m}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{ch}\theta\right) du^2 + \frac{\operatorname{sh}\theta}{m}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{sh}\theta\right) dv^2,\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} d\bar{P}^2 &= \frac{1}{\lambda} dP^2,\\ \bar{\Phi} &= \frac{\operatorname{sh}\theta}{m\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\operatorname{sh}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{ch}\theta\right) du^2 + \frac{\operatorname{ch}\theta}{m\sqrt{\lambda}}\left(\frac{\operatorname{ch}\theta}{\sqrt{\lambda}} - \operatorname{sh}\theta\right) dv^2.\end{aligned}\right.$$

Les formules restent applicables pour $\lambda = 1$; S et $\bar{S}$ sont alors à courbures moyennes constantes et opposées.

17. Cas des surfaces développables. — Dans l'étude précédente, nous avons supposé que l'équation des caractéristiques (121) avait 2 solutions distinctes. Pour que les solutions soient confondues, il faut et il suffit que $F_A'^2 = F_H'^2$. Supposons $F_A' = F_H'$, c'est-à-dire

$$-2(\lambda - 1)A = 2(\lambda - 1)H + 2\lambda m \qquad \text{ou} \qquad H + A = -\frac{\lambda m}{\lambda - 1}.$$

En portant dans (121), on trouve $\lambda m^2 = 0$. Nous écartons $\lambda = 0$ ($\bar{A}$ serait nul) ; reste donc $m = 0$, et (121) se réduit à $K = 0$: la surface est développable, avec $H + A = 0$. Les caractéristiques sont les génératrices rectilignes. Sur $\bar{S}$, on a $\bar{A} = \lambda A$, $\bar{H} = \lambda H$; les 2 surfaces ont des formes asymptotiques identiques, mais les ds^2 sont seulement proportionnels : $d\bar{s}^2 = \frac{ds^2}{\lambda}$.

Si l'on définit S comme le lieu des tangentes à une courbe $P(u)$, d'abscisse curviligne u, on a

$$M = P(u) + v\vec{t}(u),$$

et les formes fondamentales s'écrivent

$$ds^2 = (du + dv)^2 + \frac{v^2\, du^2}{\rho(u)^2}, \qquad \Phi = -\frac{v\, du^2}{\rho\tau}.$$

On a donc, sur S,

$$\varpi_1 = du + dv, \qquad \varpi_2 = \frac{v\, du}{\rho}, \qquad c = -\frac{\rho}{v\tau},$$

et, sur $\bar{S}$,

$$\bar{\varpi}_1 = \frac{\varpi_1}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \bar{\varpi}_2 = \frac{\varpi_2}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \bar{c} = \lambda c,$$

d'où l'on déduit

$$\bar{v} = \frac{v}{\sqrt{\lambda}}, \qquad d\bar{u} = \frac{du}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\lambda}.$$

On tire de là la relation entre les 2 arêtes de rebroussement. Si celle de S a pour équations intrinsèques

$$\frac{d\rho}{du} = f(\rho), \qquad \tau = g(\rho),$$

celle de $\overline{S}$ aura, de son côté, les équations

$$\frac{d\overline{\rho}}{d\overline{u}} = f(\overline{\rho}\sqrt{\lambda}), \qquad \overline{\tau} = \frac{1}{\lambda} g(\overline{\rho}\sqrt{\lambda}),$$

de sorte que la correspondance ponctuelle définie par

$$\overline{\rho} = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}, \qquad \overline{\nu} = \frac{\nu}{\sqrt{\lambda}}$$

entraînera bien

$$\overline{\tau} = \frac{\tau}{\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{d\overline{\rho}}{d\overline{u}} = \frac{d\rho}{du}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d\overline{u} = \frac{du}{\sqrt{\lambda}}.$$

Un *cas singulier* est à signaler. Dans la formule (115), nous avons supposé $w \neq 0$. Si $w = 0$, on a, d'après (112), $p + s = 0$, $q + r = 0$, donc A et $\overline{A}$ sont des constantes; soit toujours λ le rapport $\frac{\overline{A}}{A}$. La relation $\frac{\overline{K}}{\overline{A}} = \frac{K}{A}$ subsiste, car c'est une conséquence de $t = 0$. On a aussi $\frac{d\overline{H}}{\overline{A}} = \frac{dH}{A}$, d'où $\overline{H} = \lambda(H + m)$. Portons dans $\overline{K} = \lambda K$, et écartons $\lambda = 0$, pour une raison déjà donnée. Nous obtenons encore la relation (111), mais A étant constant, il s'ensuit que H aussi est constant, donc $r = 0$, $s = 0$, et par suite, $p = 0$, $q = 0$. Donc $\omega_{11} = 0$, ce qui, différentié extérieurement, donne $K = 0$: la surface S est développable. Prenons $H = A$, c'est-à-dire, $c = 0$, a constante. La surface S est un *cylindre circulaire*, et $\overline{S}$ de même. Comme $r = 0$, $s = 0$, nous nous trouvons dans le cas des surfaces à courbure moyenne constante, qui sera examiné au numéro suivant, mais le fait que p et q aussi sont nuls simplifie tout, du point de vue analytique : le système différentiel est complètement intégrable, sa solution ne dépend que de constantes arbitraires. Tout cylindre de révolution est représentable suivant le mode étudié sur tout autre cylindre de révolution. Les cylindres étant donnés, la correspondance ponctuelle qui réalise la représentation conforme minima dépend évidemment de 2 constantes arbitraires.

18. Surfaces à courbure moyenne constante. — Nous avons toujours supposé jusqu'ici, sauf dans le dernier cas singulier, que r et s n'étaient pas nuls. S'ils le sont, la courbure moyenne est constante sur S et sur $\overline{S}$: $H = H_0$, $\overline{H} = \overline{H}_0$. Dans les formules antérieures, il faudra faire $d\beta - \beta(\omega_{11} + \omega_{22}) = 0$, car cette expression est égale à $\frac{dH}{A}$. Les équations du problème sont toujours (72), auxquelles s'ajoute l'équation finie $H = H_0$. Le système dérivé se réduit à

$$(112) \qquad [\omega_1 \omega_{11}] = 0, \quad [\omega_2 \omega_{22}] = 0, \quad [\omega_1 \overline{\omega}_{11}] = 0, \quad [\omega_2 \overline{\omega}_{22}] = 0.$$

On a l'involution, avec $s_1 = 4$: la solution générale dépend de 4 fonctions arbitraires d'un argument.

Si l'on suppose S donnée, à courbure moyenne constante, on peut poser $\omega_1 = du$, $\omega_2 = dv$, et le système qui définit $\overline{S}$ est

$$(113) \qquad \begin{cases} \overline{\omega}_1 = du, \quad \overline{\omega}_2 = dv, \quad \overline{\omega}_3 = 0, \\ \overline{\omega}_{13} = du + \overline{\beta}\, dv, \quad \overline{\omega}_{23} = \overline{\beta}\, du + dv. \end{cases}$$

La différentiation extérieure donne

$$(114)\qquad \begin{cases} [\bar{\omega}_{11}\, du] = 0, & [\bar{\omega}_{22}\, dv] = 0; \\ [(d\bar{\beta} - \bar{\beta}\,\bar{\omega}_{11})\, dv] = 0, & [(d\bar{\beta} - \bar{\beta}\,\bar{\omega}_{22})\, du] = 0. \end{cases}$$

Les relations de la dernière ligne se résolvent par

$$d\bar{\beta} - \bar{\beta}(\bar{\omega}_{11} + \bar{\omega}_{22}) = 0 \qquad \left(\text{d'où } \bar{\beta} = \frac{\bar{H}_0}{\bar{A}}\right).$$

Le système (113), ainsi prolongé, est en involution, et sa solution dépend de 2 fonctions arbitraires d'un argument; c'est le degré de généralité qu'indique d'ailleurs la théorie pour une surface de Weingarten, quand on connaît la relation $F(A, H) = 0$.

Si S et $\bar{S}$ sont données, à courbure moyenne constante toutes les deux, la représentation conforme minima s'obtient en rapportant chaque surface aux pseudo-arcs de ses lignes minima (ce qui est possible), u, v, pour S, $\bar{u}$, $\bar{v}$ pour $\bar{S}$, et en posant

$$d\bar{u} = du, \qquad d\bar{v} = dv;$$

cette correspondance dépend de 2 constantes arbitraires.

Pour résoudre le *problème de Cauchy*, on se donne une bande $\rho(v)$, $\tau(v)$, $\varpi(v)$; le trièdre B est connu en chaque point de cette bande, en vertu de

$$\frac{\cos\varpi}{\rho} = H_0 + A\cos 2\theta, \qquad \frac{d\varpi}{dv} + \frac{1}{\tau} = -A\sin 2\theta,$$

qui déterminent A et θ. On peut ensuite se donner $\bar{A}(v)$, et $\bar{v}(v)$ s'obtient par $d\bar{v} = dv\sqrt{\frac{A}{\bar{A}}}$. Sur $\bar{S}$, $\bar{\theta}$ a la même valeur que θ sur S; il suffira donc de se donner l'une des 3 fonctions $\bar{\rho}(v)$, $\bar{\tau}(v)$, $\bar{\varpi}(v)$, (et $\bar{H}_0$) pour pouvoir déterminer les 2 autres, Nous avons de la sorte une solution à une dimension dépendant de 5 fonctions arbitraires, nombre qu'on peut réduire d'une unité en partant d'une courbe plane.

Les *caractéristiques* sont les lignes minima. Étudions une solution à une dimension vérifiant $\omega_2 = 0$, d'où $\omega_1 = d\sigma$. On voit que, sur cette solution,

$$\omega_{22} = 0, \qquad \bar{\omega}_{22} = 0,$$

ce qui entraîne

$$\frac{1}{A}\frac{dA}{d\sigma} = -p, \qquad \frac{1}{\bar{A}}\frac{d\bar{A}}{d\sigma} = -\bar{p} \qquad (\bar{\sigma} = \sigma).$$

Prenons une courbe minima (L_1), d'invariant $h(\sigma)$; sa pseudo-courbure géodésique $p(\sigma)$ sera déterminée par l'équation

$$h(\sigma) = \frac{dp}{d\sigma} + \frac{p^2}{2} - H_0.$$

Or $p(\sigma)$ permet de placer, en chaque point de la courbe minima, la normale à la surface S. Comme l'équation définissant p est une équation de Riccati, nous voyons, en passant, que *si 4 surfaces, à même courbure moyenne constante, contiennent une même courbe minima, leurs normales ont un rapport anharmonique constant le long de cette courbe.*

A sera ensuite déterminé par $\frac{1}{A}\frac{dA}{d\sigma} = -p$. L'intégration introduit une constante multiplicative pour A, d'où le théorème : *si 2 surfaces à même courbure moyenne constante se raccordent le long d'une ligne minima, le rapport de leurs asphéricités est constant le long de cette ligne.*

Choisissant ensuite $\overline{A}(\sigma)$, on aura $\overline{p}$, par $\overline{p} = -\frac{1}{\overline{A}}\frac{d\overline{A}}{d\sigma}$, puis $\overline{h}$, par $\overline{h} = \frac{d\overline{p}}{d\sigma} + \frac{\overline{p}^2}{2} - \overline{H}_0$, et la seconde courbe minima se trouvera essentiellement déterminée, ainsi que le trièdre $\overline{B}$. La solution caractéristique à une dimension dépend seulement de 2 fonctions arbitraires d'un argument.

* * *

Le problème de la représentation conforme minima, qui vient d'être traité, pourra paraître artificiel. Il n'a évidemment pas la même importance que celui de l'application des surfaces. Mais dès lors que la définition du repère biisotrope était posée, l'examen de ce problème s'imposait.

On peut aussi se demander jusqu'à quel point l'emploi des formes minima promet d'être fécond dans l'étude des problèmes classiques de la théorie des surfaces. Un travail que j'ai en préparation sur le problème bien connu d'Ossian Bonnet est de nature à dissiper tous les doutes. J'ai d'ailleurs reconnu récemment que les formes minima peuvent être introduites, équivalemment, sans invoquer aucunement la théorie des lignes minima : leurs parties réelle et imaginaire sont des formes susceptibles d'une définition extrêmement simple.

(Manuscrit remis le 1er octobre 1947.)