BULLETIN DE LA S. M. F.

HANS FREUDENTHAL

Sur un théorème topologique de M. Van Dantzig

Bulletin de la S. M. F., tome 75 (1947), p. 56-62
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1947__75__56_0>

SUR UN THÉORÈME TOPOLOGIQUE DE M. VAN DANTZIG;

PAR M. HANS FREUDENTHAL,

à Amsterdam.

Il y a quelques années, M. van Dantzig m'entretenait du beau théorème qui est l'objet de sa note publiée ci-dessus, et en esquissait une démonstration. Le théorème me parut digne de recherches ultérieures, et j'en ai obtenu une démonstration plus simple et qui porte un peu plus loin que la démonstration originale de M. van Dantzig.

M. van Dantzig s'occupe d'*un espace compact divisé d'une manière doublement continue en ensemble* Ω *d'arcs simples munis d'une orientation, qui est fonction continue de l'arc*, *et il démontre qu'un tel espace doit être homéomorphe au produit topologique de* Ω *et d'un arc simple*.

Nous verrons qu'on peut affaiblir la condition de compacité, et qu'on peut remplacer la condition de continuité double de la division en arcs simples par la condition beaucoup plus faible que l'ensemble des points initiaux des arcs de la division et l'ensemble des points finaux sont fermés.

La racine historique du théorème de M. van Dantzig est la théorie de l'homogénéité topologique, mais il existe quelque rapport avec la théorie des ensembles partiellements ordonnés, rapport qui nous a engagé à abandonner l'énoncé de M. van Dantzig. Il nous semblait intéressant d'insister sur ce point en mettant en évidence ce rapport.

1. R sera toujours un espace séparablement métrisable. R sera dit *partiellement ordonné*, si, pour certains couples a, b, d'éléments, il y a une relation asymétrique et transitive $a < b$ ou $b > a$); $a \leqq b$ (ou $b \geqq a$) veut dire : $a < b$ ou $a = b$.

L'ensemble des éléments x comparables à a (c'est-à-dire $x \leqq a$ ou $x > a$) sera appelé T_a.

La réunion de toutes les T_a où $a \in M$ sera appelée T_M.

L'élément le plus petit ou le plus grand de T_a (s'il en existe) sera appelé $\varphi(a)$ ou $\psi(a)$.

Les ensembles (initiaux ou finaux) $\varphi(R)$ et $\psi(R)$ seront respectivement nommés S_0 et S_1.

R est décomposé en ensembles T_a qui n'ont pas de points communs.

2. *L'ordre partiel* est appelé *continu*, si pour

$$\lim a_n = a, \qquad \lim b_n = b,$$
$$a_n \leqq b_n,$$

on a

$$(\mathrm{C}) \qquad a \leqq b.$$

Sous cette condition la décomposition des R en T_a sera ce qu'on appelle une décomposition continue; autrement dit

$$\lim a_n = a$$

entraîne

$$\lim T_{a_n} \subset T_a,$$

où le dernier signe de limite doit être entendu au sens de limite supérieure fermée [1]. Car si b est un point de $\lim T_{a_n}$, il y a une suite partielle $a_{n'}$ de a_n et une suite $b_{n'} \in T_{a_{n'}}$ telle que $\lim b_{n'} = b$. Alors il sera permis de supposer: $a_{n'} \leqq b_{n'}$ pour tous les n' où $b_{n'} \leqq a_{n'}$ pour tous les n'. D'après (C) nous aurons $a \leqq b$ ou $b \leqq a$; dans les deux cas $b \in T_a$, C. Q. F. D.

3. Nous supposons R partiellement ordonné d'une manière continue. Alors pour chaque a fixe l'ensemble $x \leqq a$ est fermé, puisque $\lim x_n = x$ et $x_n \leqq a$ entraînent $x = \lim x_n \leqq \lim a = a$ [d'après (C)].

Si au surplus T_a est compact, les éléments minimum [et maximum] $\varphi(a)$ [et $\psi(a)$] existent, puisque l'intersection de tous les ensembles $x \leqq a'$ (pour tous les a' de T_a) ne peut être vide.

4. L'ordre partiel continu sera appelé *doublement continu*, si pour chaque suite

$$\lim a_n = a$$

et chaque

$$b \in T_a,$$

on peut trouver une suite partielle n' de n et une suite

$$(\mathrm{CC}) \qquad b_{n'} \in T_{a_{n'}}$$

avec

$$\lim b_{n'} = b.$$

Dans ce cas la décomposition de R en T_a sera une décomposition doublement continue, c'est-à-dire

$$\lim a_n = a$$

entraîne

$$\lim T_{a_n} = T_a,$$

où la limite doit être entendue *a priori* au sens de limite supérieure fermée. Mais il est remarquable que la relation reste valable au sens de limite inférieure fermée. Car si b était un point de T_a appartenant à la limite supérieure, mais non à la limite inférieure, nous pourrions trouver une suite partielle n' de n de sorte que b n'appartienne pas même à la limite supérieure de la suite $T_{a_{n'}}$, ce qui contre-

---

[1] Nous rappelons les définitions (HAUSDORFF, *Mengenlehre*, 2e éd., p. 147); a appartient à la limite supérieure (inférieure) fermée de la suite d'ensembles A_n, si chaque voisinage de a a des points communs avec un nombre infini d'ensembles A_n (tous les ensembles A_n).

dirait (CC). Par conséquent, on peut remplacer la propriété (CC) par la propriété suivante, qui semble être plus forte :

Pour chaque suite

$$\lim a_n = a$$

et chaque

$$b \in T_a,$$

il y a une suite

($\overline{\mathrm{CC}}$)
$$b_n \in T_{a_n}$$

avec

$$\lim b_n = b.$$

5. R sera appelé transversalement compact au sens faible ou fort, si R satisfait à (C) ou à (CC) et en outre à

(D) Si M est compact rel. R, T_M est aussi compact rel. R.

Sous cette condition chaque T_a est compact en soi-même.

Chaque espace R compact est transversalement compact.

R sera appelé transversalement connexe au sens faible ou fort. si R satisfait à (C) ou à (CC) et en outre à

(S) Chaque T_a est connexe.

R sera appelé un continu transversal au sens faible ou fort, s'il satisfait à (C) ou à (CC), puis à (D) et (S) et ensuite à

(M) Chaque T_a consiste en deux points au moins.

(Alors chaque T_a est un arc simple.)

6. Si l'ordre de R est doublement continu, les ensembles $S_0 = \varphi(R)$ et $S = \psi(R)$ sont fermés.

Car soit $a_n \in S_0$, $\lim a_n = a$. Si l'on avait $a \notin S_0$, il y aurait un $b < a$. En vertu de (CC) il y aurait une suite $b_n \in T_{a_n}$ ayant la limite b. A cause de $a_n \in S_0$, on a $b_n \geqq a_n$, ce qui contredit $b < a$. La supposition était donc impossible. On traite S_1 d'une manière analogue.

7. Si R est transversalement compact au sens fort, la transformation φ (et de même ψ) est continue.

Car si $\lim a_n = a$, la suite a_n est compacte rel. R. Alors en vertu de (D) la réunion des T_{a_n} est compact rel. R, et la suite $\varphi(a_n)$ doit avoir des points d'accumulation, qui doivent appartenir à S_0 d'après 6 et à T_a d'après (C), et qui, par conséquent, doivent coïncider avec $\psi(a)$, d'où résulte la continuité de φ.

8. Sous des hypothèses supplémentaires on a les réciproques de ces deux derniers théorèmes.

Un continu transversal R, qui a ses transformations φ et ψ continues, ou qui a ses ensembles S_0 et S_1 fermés, est un continu transversal au sens fort.

Cela signifie que nous devons déduire (CC) des autres conditions. Soit $\lim a_n = a$ et (par exemple) $b < a$. En vertu de (D) les $\varphi(a_n)$ auront des points d'accumulation, qui doivent coïncider avec $\varphi(a)$, ou en vertu de la continuité de φ ou en vertu du fait que S_0 est fermé (combiné avec la continuité de la décomposition de R). Les ensembles $x \leq a_n$ sont des continus. Leur limite inférieure fermée contient a et $\varphi(a)$, et par conséquent elle n'est pas vide. La réunion des ensembles $x \leq a_n$ est compacte d'après (D). D'après le théorème de Zoretti [1] leur limite supérieure fermée est connexe. Elle contient tous les points situés entre a et $\varphi(a)$. Pour $b > a$ on raisonne d'une manière analogue. Dans les deux cas on en déduit que chaque point de T_a appartient à la limite supérieure fermée des T_{a_n}, c. q. f. d.

9- Notre but est de démontrer le

THÉORÈME. — *Un continu transversal au sens fort R est homéomorphe au produit cartésien de* S_0 *avec le segment de droite* $E(0 \leq t \leq 1)$, *et l'homéomorphie peut être réalisée de manière qu'à chaque* T_a *corresponde l'ensemble* $a \times E$.

D'après 8 on peut remplacer la condition « continu transversal au sens fort » par la condition plus modeste : R est un continu transversal au sens faible, et S_0 et S_1 sont fermés ; ou par la condition : R est un continu transversal au sens faible, et φ et ψ sont des transformations continues.

Il est évident que le théorème de M. van Dantzig est une conséquence immédiate de notre théorème :

Un espace compact R *décomposé d'une manière doublement continue en ensemble* Ω *d'arcs simples munis d'une orientation qui est fonction continue d'arc, est homéomorphe au produit cartésien de* Ω *et de l'intervalle* $0 \leq t \leq 1$.

La partie principale de la démonstration est contenue dans le numéro 10.

10. Soit R un espace partiellement ordonné. Soit f une fonction réelle, définie dans R. Alors nous désignons par f^* la fonction

$$f^*(a) = \max_{x \leq a} f(x).$$

Si R est un continu transversal au sens fort et si f est continu, f^* est également continu.

Démonstration. Si f^* n'était pas continu au point a, il y aurait un nombre positif α et une suite a_n avec

$$\lim a_n = a$$

et

$$f^*(a) - f^*(a_n) > \alpha \quad \text{ou} \quad < -\alpha.$$

Dans le premier cas nous cherchons un $x \leq a$ avec $f^*(a) = f(x)$ et en vertu de $(\overline{CC})$ une suite

$$x_n \in T_{a_n}$$

avec

$$\lim x_n = x.$$

[1] HAUSDORFF, 2e éd., p. 163. Prendre comme espace la fermeture de la réunion des T_{a_n}.

Si $x_n \geqq a$ *a lieu un nombre infini de fois*, on a $x \geqq a$ à cause de (C), donc $x = a$ et par conséquent

$$f^*(a) = f(a) = \lim f(a_n),$$

et à cause de

$$f(a_n) \leqq f^*(a_n),$$

donc

$$\lim f(a_n) \leqq f^*(a_n) + \alpha \qquad (\text{pour } n > n_0),$$

ce qui contredit l'hypothèse que nous nous trouvons dans le premier cas. *Si, au contraire*, $x_n \leqq a_n$ *pour presque tous les* n, on trouve

$$f^*(a_n) = \max_{y \leqq a_n} f(y) \geqq f(x_n),$$

donc

$$\geqq \lim f(x_n) - \alpha \,(\text{pour presque tous les } n)$$
$$= f(x) - \alpha = f^*(a) - \alpha,$$

ce qui est également contraire à l'hypothèse.

Dans le deuxième cas nous cherchons un $x_n \leqq a_n$ avec $f^*(a_n) = f(x_n)$. La compacité transversale fournit une suite partielle $x_{n'}$ ayant la limite x. Alors nous avons $x \leqq a$, donc

$$f^*(a) \geqq f(x) = \lim f(x_{n'}) = \lim f^*(a_{n'}),$$

donc

$$f^*(a) \geqq \lim f^*(a_{n'}) \geqq f^*(a_{n'}) - \alpha,$$

ce qui est incompatible avec l'hypothèse que nous nous trouvons dans le second cas.

Par conséquent f^* doit être continue.

11. La fonction réelle g sera dite monotone au sens faible ou fort dans l'ensemble **M** de l'espace partiellement ordonné R, si pour chaque couple $x < y$ de points de **M** on a

$$g(x) \leqq g(y)$$

ou

$$g(x) < g(y).$$

Dans la suite nous supposons que R est un continu transversal au sens fort.

Pour chaque point fixe p, T_p est un arc simple. Il est facile de définir en T_p une fonction f_p continue monotone au sens fort, qui est égale à zéro au point $\varphi(p)$ et égale à un au point $\psi(p)$. Nous posons $f_p = 0$ en S_0. Alors f_p est définie d'une manière continue dans une partie (fermée d'après 6) de R, et à l'aide d'un théorème bien connu, on peut prolonger f_p d'une manière continue à tout l'espace R sans en changer le minimum et le maximum. Pour chaque point p, nous avons obtenu une fonction f_p avec les propriétés suivantes :

a. f_p est monotone au sens fort en T_p.

b. f_p est continu en R.

c. $f_p = 0$ en S_0.

d. $0 \leqq f_p \leqq 1$.

La fonction $g_p(x) = f_p^*(x)$ jouit des propriétés suivantes :

a'. g_p est monotone au sens fort en T_p.

b'. g_p est monotone au sens faible et continu en R.

c'. $g_p = 0$ en S_0.
d'. $0 \leqq g_p \leqq 1$.

(b' est une conséquence de b et **10**, tandis que les autres points sont évidents.)

12. La fonction g_p que nous venons de construire jouit même de la propriété a'_m. Il y a un voisinage U de p tel que pour chaque $q \in U$ on ait : pour chaque couple x, y de points de T_q qui vérifient $x < y$ et dont la distance mutuelle est $\geqq \frac{1}{m}$, on a

$$g_p(x) < g_p(y).$$

Démonstration. — Si la proposition était fausse, on aurait une suite q_n, $\lim q_n = p$, et deux suites x_n, $y_n \in T_{q_n}$ avec les distances $(x_n, y_n) \geqq \frac{1}{m}$ et avec

$$x_n < y_n,$$

et quand même

$$g_p(x_n) \geqq g_p(y_n);$$

en vertu de la compacité transversale il est permis de supposer les suites x_n, y_n convergentes avec les limites x, y, qui doivent appartenir à T_p à cause de (C). A cause de (C) on aurait

$$x \leqq y,$$

et même

$$x < y;$$

leur distance est positive, c'est contraire à

$$g_p(x_n) \geqq g_p(y_n).$$

La proposition est donc vraie.

13. Nous allons construire pour chaque nombre naturel m et pour chaque point p de R une fonction h_p^m et un voisinage U_p^m de p, de sorte que h_p^m jouisse des propriétés

$$(a'_m), \quad (b'), \quad (c'), \quad (d')$$

par rapport à U_p^m. (Il suffit de se servir de la fonction g_p du numéro **12**.)

Pour chaque m il y a un nombre dénombrable de U_p^m, nommés $U_{p_1}^m$, $U_{p_2}^m$, ..., qui couvrent l'espace entier R. La suite double $h_{p_n}^m$ peut être écrite sous la forme d'une série simple k_n.

Si $x < y$ et si p est un point de $T_x = T_y$, il y a un nombre naturel m, tel que la distance (x, y) est $\geqq \frac{1}{m}$. p est contenu dans un $U_{p_k}^m$; $h_{p_k}^m = k_n$. k_n satisfait à

$$(a'_m)$$

(avec p_k au lieu de p), donc

$$k_n(x) < k_n(y).$$

Les fonctions k_n ont les propriétés suivantes :

a''. Pour chaque couple $x < y$ il y a un n tel que $k_n(x) < k_n(y)$.
b''. k_n est continu et monotone en R.
c''. $k_n = 0$ en S_0.
d''. $0 \leqq k_n \leqq 1$.

La fonction

$$k = \Sigma 2^{-n} k_n$$

a donc les propriétés suivantes :

a'''. k est monotone au sens fort sur R.
b'''. k est continue.
c'''. $k = 0$ en S_0.
d'''. $0 \leqq k \leqq 1$.

A cause de (**M**) chaque T_a consiste en deux points au moins. Par conséquent k est positif sur S_1. D'après **7** la fonction $\psi(x)$ est continue. Donc

$$l(x) = \frac{k(x)}{k[\psi(x)]}$$

est continue, monotone au sens fort, vaut 0 en S_0, 1 en S_1.

Nous formons

$$R' = S_0 \times E,$$

où E est l'intervalle $0 \leqq t \leqq 1$, et nous définissons pour chaque $x \in R$

$$\Phi(x) = \varphi(x) \times l(x).$$

Φ est continue et univoque, puisque chacun des facteurs l'est. Elle est biunivoque, car $\Phi(x) = \Phi(y)$ entraîne $\varphi(x) = \varphi(y)$ et $l(x) = l(y)$, donc $T_x = T_y$, donc en vertu de la monotonie forte $x = y$.

Φ est même topologique. Car soit

$$\lim \Phi(x_n) = \Phi(x).$$

Alors

$$\lim \varphi(x_n) = \varphi(x),$$
$$\lim l(x_n) = l(x),$$

ce qui entraîne, par suite de la compacité transversale, la compacité de la suite x_n rel. R.

Si la relation

$$\lim x_n = x \text{ était fausse,}$$

il y aurait une suite partielle $x_{n'}$ avec

$$\lim x_{n'} = x' \neq x,$$

tandis que

$$T_{x'} = T_x$$

à cause de (C). La continuité et la monotonie forte de l donneraient lieu à

$$\lim l(x) = l(x') \neq l(x),$$

c'est-à-dire à une contradiction avec

$$\lim l(x_n) = l(x).$$

Donc

$$\lim x_n = x,$$

donc Φ est topologique, ce qui achève la démonstration.

(Manuscrit reçu le 5 août 1946.)