BULLETIN DE LA S. M. F.

GUSTAVE CHOQUET

Ensembles singuliers et structure des ensembles mesurables pour les mesures de Hausdorff

Bulletin de la S. M. F., tome 74 (1946), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1946__74__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

ENSEMBLES SINGULIERS ET STRUCTURE DES ENSEMBLES MESURABLES POUR LES MESURES DE HAUSDORFF;

PAR M. GUSTAVE CHOQUET.

Introduction. — M. Carathéodory a édifié [1] une théorie générale de la mesure basée sur la notion d'une fonctionnelle dite « mesure extérieure » satisfaisant aux cinq axiomes suivants [pour fixer les idées, cette fonctionnelle sera supposée définie pour les sous-ensembles de l'espace cartésien R_n; sa valeur pour un ensemble A sera désignée par $\mu^*(A)$] :

I. Le nombre $\mu^*(A)$ est défini pour tout A; il est $\geqq 0$ et peut être égal à $+\infty$. Il y a des A pour lesquels $\mu^*(A)$ est fini et non nul. Pour l'ensemble vide $\emptyset$, on a $\mu^*(\emptyset) = 0$.

II. Si $B \subset A$, on a

$$\mu^*(B) \leqq \mu^*(A).$$

III. Si $A = \bigcup A_i$ (où $i = 1, 2, \ldots$), on a

$$\mu^*(A) \leqq \sum_i \mu^*(A_i).$$

---

(1) CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Berlin, 1927, p. 237-274.

IV. Si la distance entre A et B est non nulle, on a

$$\mu^*(A + B) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Pour énoncer le cinquième axiome, il faut définir ce qu'on appelle ensemble mesurable.

L'ensemble A est dit mesurable lorsque pour tout ensemble W on a

$$\mu^*(W) = \mu^*(A.W) + \mu^*(W - A.W).$$

On désigne alors $\mu^*(A)$ par $\mu(A)$ qu'on appelle mesure de A.

V. Pour tout A, $\mu^*(A) =$ borne inférieure des mesures des ensembles mesurables contenant A.

Les mesures de Carathéodory jouissent de la plupart des propriétés de la mesure spatiale de Lebesgue; toutefois elles ne jouissent pas toujours de la propriété importante suivante : « Tout ensemble mesurable est compris (au sens de l'inclusion) entre deux ensembles boréliens : un F_σ et un G_δ dont la différence $(G_\delta - F_\sigma)$ est de mesure nulle ».

Pour essayer de retrouver cette propriété, Hans Hahn (1) a remplacé l'axiome V de Carathéodory par l'axiome suivant, plus précis.

V_a. Pour tout A, $\mu^*(A) =$ borne inférieure des mesures des G_δ contenant A.

Hahn peut alors démontrer la propriété énoncée, mais seulement pour les ensembles mesurables de mesure finie.

La question se pose donc de savoir si l'on peut énoncer cette proposition sans aucune restriction sur l'ensemble mesurable envisagé, au besoin en précisant encore davantage l'axiome V_a; ou du moins, si l'on peut énoncer une propriété analogue, en remplaçant la famille des ensembles mesurables de comparaison (F_σ et G_δ) par une famille plus étendue (telle que la famille des ensembles boréliens), en assujettissant simplement cette famille à avoir la puissance du continu.

Nous montrerons que si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ de telles extensions sont impossibles, même pour des mesures (non lebesguiennes) les plus régu-

(1) H. Hahn, *Theorie der reellen Funktionen*, vol. 1, 1921, p. 444.

lières, comme la mesure linéaire [1] de Carathéodory : cela résultera de l'existence d'ensembles singuliers, mesurables linéairement, de mesure infinie, dont tout sous-ensemble borélien est dénombrable, et dont tout sous-ensemble est mesurable et de mesure o ou ∞.

Des exemples analogues existent pour toute mesure de Hausdorff attachée à une fonction croissante $\varphi(d)$.

Nous examinerons aussi quelques questions relatives à la structure métrique des ensembles boréliens; et nous énoncerons enfin quelques problèmes relatifs à l'existence des sous-ensembles non mesurables des ensembles mesurables.

1. Pour simplifier l'exposition, il ne sera question dans la suite que d'ensembles plans et de la mesure linéaire de Carathéodory; mais nos résultats s'étendraient immédiatement à tout espace cartésien et à toute mesure de Hausdorff. La notation $\mu^*(A)$ désignera donc toujours la mesure linéaire extérieure de l'ensemble plan A.

Définitions. — 1° Nous dirons que l'ensemble mesurable E jouit de la *propriété A* s'il existe un F_σ et un G_δ tels que

$$F_\sigma \subset E \subset G_\delta \quad \text{et} \quad \mu(G_\delta - F_\sigma) = 0.$$

2° Nous dirons que l'ensemble mesurable E jouit de la *propriété B* s'il existe deux ensembles boréliens B_1 et B_2 tels que

$$B_1 \subset E \subset B_2 \quad \text{et} \quad \mu(B_2 - B_1) = 0.$$

On sait [2] que tout ensemble mesurable de mesure finie jouit de la propriété A. Il en est d'ailleurs de même du complémentaire, par rapport au plan, d'un tel ensemble. Mais nous allons voir qu'il y a des ensembles boréliens très simples qui ne jouissent pas de cette propriété.

THÉORÈME 1. — *Il existe des* G_δ *plans qui ne jouissent pas de la propriété A.*

---

(1) Rappelons que la mesure linéaire, ainsi que toute mesure de Hausdorff, satisfait aux axiomes de Carathéodory et de Hahn.

(2) *Voir* HAHN, *loc. cit.*

Démonstration. — Soit, sur un axe $x'x$, un ensemble borélien e qui ne soit pas un F_σ (par exemple l'ensemble des nombres irrationnels de $x'x$ est un G_δ sans être un F_σ).

Soit E l'ensemble des perpendiculaires Δ à $x'x$ menées par les points de e. Tout $F_\sigma \subset E$ a sur $x'x$ une projection qui est un F_σ; donc pour tout $F_\sigma \subset E$, il y a des droites $\Delta \subset E$ qui n'ont aucun point sur cet F_σ; donc

$$\mu(E - F_\sigma) = \infty.$$

En prenant pour e un ensemble borélien qui ne soit ni un F_σ, ni un G_δ, on obtient pour E un ensemble tel que si $F_\sigma \subset E \subset G_\delta$ on ait toujours

$$\mu(E - F_\sigma) = \mu(G_\delta - E) = \infty.$$

En effet, l'égalité $\mu(E - F_\sigma) = \infty$ résulte de ce qu'on vient de voir; la seconde se démontre par passage au complémentaire.

2. La famille $\mathcal{F}_B$ des ensembles mesurables qui possèdent la propriété B est évidemment plus vaste que la famille de ceux qui possèdent la propriété A, puisque tout ensemble borélien est élément de $\mathcal{F}_B$. Nous allons montrer que :

THÉORÈME 2. — *La famille $\mathcal{F}_B$ forme un corps d'ensembles.*

Démonstration. — Soit (E_i) (où $i = 1, 2, \ldots$) une suite d'éléments de $\mathcal{F}_B$, avec $b_i \subset E_i \subset B_i$, où b_i et B_i sont boréliens et tels que $\mu(B_i - b_i) = 0$.

α. On a

$$\bigcup_i b_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i.$$

Les ensembles $\bigcup_i b_i$ et $\bigcup_i B_i$ sont boréliens et

$$\bigcup_i B_i - \bigcup_i b_i \subset \bigcup_i (B_i - b_i).$$

Donc $E = \bigcup_i E_i$ est un élément de $\mathcal{F}_B$.

β. On a

$$b_1 - B_2 \subset E_1 - E_2 \subset B_1 - b_2.$$

Or

$$(B_1 - b_2) - (b_1 - B_2) \subset (B_1 - b_1) + (B_2 - b_2).$$

Comme $(b_1 - B_2)$ et $(B_1 - b_2)$ sont boréliens, $(E_1 - E_2)$ est un élément de $\mathcal{F}_B$.

En particulier, comme l'espace entier est un élément de $\mathcal{F}_B$, le complémentaire $C(E)$ de tout élément E de $\mathcal{F}_B$ est un élément de $\mathcal{F}_B$.

γ. La formule

$$\bigcap_i E_i = C\left[\bigcup_i C(E_i)\right]$$

montre alors que $E = \bigcap_i E_i$ est aussi un élément de $\mathcal{F}_B$.

Donc $\mathcal{F}_B$ forme bien un corps d'ensembles. *La question se pose maintenant de savoir si tout ensemble mesurable est un élément de* $\mathcal{F}_B$.

Nous allons voir qu'*il n'en est rien.*

Il suffit pour cela, dans la démonstration du théorème 1, de prendre pour e un ensemble tel que e et son complémentaire sur $x'x$ soient chacun la réunion d'un ensemble analytique et d'un complémentaire analytique, sans être eux-mêmes analytiques. L'ensemble E est alors mesurable. On achève ensuite aisément la démonstration en remarquant que la projection de tout ensemble borélien sur $x'x$ est un ensemble analytique.

3. Théorème 3. — *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un ensemble* S *mesurable, de mesure infinie, dont tout sous-ensemble est mesurable et de mesure* 0 *ou* ∞, *et dont tout sous-ensemble borélien ou analytique est dénombrable.*

Démonstration. — Lusin [1] a démontré, en admettant l'hypo-

[1] Lusin, *C. R. Acad. Sc.*, t. 158, 1914; *voir* aussi Lavrentieff, *Fund. Math.*, t. VI, p. 154-155; Sierpinski, *Fund. Math.*, t. VII, p. 188-190; t. XI, p. 302-304; Szpilrajn, *Fund. Math.*, t. XV, p. 126-127.

thèse du continu, l'existence d'ensembles linéaires e de puissance $2^{\aleph_0}$ possédant la propriété L suivante :

Propriété L. — Tout ensemble parfait linéaire non dense contient au plus un ensemble dénombrable de points de e.

M. Sierpinski a montré (¹) que tout ensemble e possédant la propriété L satisfait aussi à la condition C suivante :

C. Pour toute suite infinie de nombres positifs $a_1, a_2, \ldots$, il existe une suite infinie d'intervalles $\delta_1, \delta_2 \ldots$ recouvrant e et telle que pour tout n, la longueur de δ_n soit a_n.

Soit alors, sur l'axe $x'x$, un ensemble e possédant la propriété L, et soit E l'ensemble des perpendiculaires Δ à $x'x$ menées par les points de e.

Je dis que *si* V *est un sous-ensemble quelconque de* E *dont la section par toute droite* Δ *est mesurable*, V *est également mesurable.*

Supposons en effet V non mesurable; il existe alors (²) dans V un sous-ensemble v non mesurable, de mesure extérieure finie $l \neq 0$, et qui est l'intersection de V et d'un ensemble mesurable.

La section de v par toute droite Δ est mesurable, et comme $l < \infty$, ces sections sont de mesure nulle, sauf au plus une infinité dénombrable d'entre elles. Soit v' la réunion des sections de mesure non nulle, et posons $v'' = v - v'$.

Pour tout nombre $\rho \geq 0$, soit $f(\rho)$ la borne supérieure, lorsque x_0 varie, de la mesure extérieure de l'ensemble $v''_{(x_0,\rho)}$, où $v''_{(x_0,\rho)}$ est l'intersection de v'' avec la bande plane définie par

$$x_0 - \frac{\rho}{2} \leq x \leq x_0 + \frac{\rho}{2}.$$

La fonction $f(\rho)$ est une fonction *continue* non décroissante de ρ telle que $f(0) = 0$. En effet, on obtiendrait la même fonction $f(\rho)$ en remplaçant v'' par une enveloppe mesurable d'égale mesure

---

(¹) *Loc. cit.*, p. 5.

(²) *Voir* Carathéodory, *loc. cit.*, pages 268 et 269, théorèmes 10 et 11.

extérieure; et pour une telle enveloppe, la continuité de $f(\rho)$ résulte de la continuité de la mesure dans les opérations de réunion et d'intersection.

On peut donc, pour tout $\varepsilon > 0$, trouver une suite infinie de nombres $a_i > 0$ telle que $\sum f(a_i) < \varepsilon$ (où $i = 1, 2, \ldots$).

En vertu de la condition C vérifiée par e, on voit donc que $\mu^*(v'') < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $\mu^*(v'') = 0$.

Les ensembles v' et v'' étant mesurables, il en est de même de v, contrairement à l'hypothèse. Donc V est mesurable; et chacun de ses sous-ensembles de mesure extérieure finie, et dont toutes les sections par les droites Δ sont de mesure nulle, est de mesure nulle (1).

Supposons alors que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Il est immédiat qu'il existe un sous-ensemble S de E, ayant un point et un seul sur toute droite Δ et sur toute droite $y = \mu$ (où $0 \leqq \mu \leqq 1$).

Nous venons de voir que S est mesurable ainsi que tous ses sous-ensembles; comme sa projection sur $y'y$ a une mesure non nulle, on a $\mu(S) \neq 0$; or tout sous-ensemble de S de mesure finie est de mesure nulle. Donc $\mu(S) = \infty$ et pour tout $s \subset S$, on a $\mu(s) = 0$ ou ∞.

Soit maintenant B un sous-ensemble borélien (ou analytique) de S; sa projection sur $x'x$ est borélienne (ou analytique); comme elle ne peut contenir aucun ensemble parfait (propriété L de e), elle est dénombrable, et il en est de même de B.

On a donc bien démontré toutes les propriétés de S énoncées dans le théorème **3**.

4. Le théorème précédent montre, ce qu'on avait vu déjà dans le paragraphe **2**, que tout ensemble mesurable n'est pas un élément de $\mathcal{F}_B$. Mais n'obtiendrait-on pas une propriété analogue, et valable pour tout ensemble mesurable en remplaçant la classe des ensembles boréliens par une classe plus étendue ?

---

(1) L'ensemble e, bien que non forcément dénombrable, jouit donc ici de propriétés analogues à celles des ensembles dénombrables.

Inversement, la question se pose de savoir si tous les ensembles linéaires jouissant de ces propriétés sont des ensembles possédant la propriété (C).

Définition. — Soit Φ une famille d'ensembles mesurables. On dit qu'un ensemble mesurable E jouit de la *propriété* C_Φ s'il existe deux éléments e_1, e_2 de Φ tels que

$$e_1 \subset E \subset e_2 \quad \text{et} \quad \mu(e_2 - e_1) = 0.$$

Il s'agit de savoir si l'on peut trouver des familles Φ intéressantes telles que tout ensemble mesurable E possède la propriété C_Φ.

Une des conditions naturelles à imposer à Φ est par exemple que Φ ait pour puissance $2^{\aleph_0}$.

Or nous allons voir qu'il n'existe aucune famille Φ satisfaisant à ces conditions, du moins si l'on admet l'hypothèse du continu.

Théorème 4. — *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ *il n'existe aucune famille* Φ *de puissance* $2^{\aleph_0}$ *d'ensembles mesurables, telle que tout ensemble mesurable possède la propriété* C_Φ.

Première démonstration. — Nous utiliserons la même méthode que pour le théorème 1 :

Comme Φ a pour puissance $2^{\aleph_0}$, la puissance de la famille des ensembles-projection des éléments de Φ en $x'x$ est au plus égale à $2^{\aleph_0}$.

Or prenons sur $x'x$ un ensemble e de Lusin de puissance $2^{\aleph_0}$ et soit E l'ensemble réunion des perpendiculaires à $x'x$ menées par les points de e. Comme la famille des sous-ensembles de e a une puissance $> 2^{\aleph_0}$, on peut toujours trouver un sous-ensemble A de E tel que A soit une réunion de perpendiculaires à $x'x$, et que pour tout élément $a \in \Phi$ contenu dans A l'ensemble $(A - a)$ contienne au moins une perpendiculaire à $x'x$. Comme A est mesurable, on a bien $\mu(A - a) = \infty$, ce qui démontre le théorème.

Deuxième démonstration. — Supposons le théorème en défaut et soit Φ une des familles qui le mettent en défaut.

Soit φ la sous-famille de Φ formée des éléments qui sont coupés par toute droite $y = \mu$ suivant un ensemble de mesure nulle. On a $\overline{\overline{\varphi}} \leq 2^{\aleph_0}$.

Il existe donc [1], si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, un ensemble plan E, dont le com-

---

[1] Voir Choquet, *Sur des ensembles cartésiens paradoxaux et la théorie de la mesure*, dans ce volume, théorèmes 1 et 2.

plémentaire est de mesure nulle sur toute droite $y = \mu$, et qui est rencontré par tout élément de φ suivant un ensemble de mesure nulle.

Tout ensemble mesurable, dont toute section par les droites $y = \mu$ est de mesure nulle, rencontre donc E suivant un ensemble de mesure nulle.

Or ceci est impossible [1].

Donc aucune famille Φ ne met le théorème en défaut, du moins si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Ce théorème nous montre l'immense variété des ensembles mesurables linéairement et de mesure infinie.

Il nous conduit à l'étude des ensembles de mesure infinie.

5. *Définition.* — On appelle *ensemble singulier* tout ensemble mesurable de mesure infinie et dont tout sous-ensemble est mesurable et de mesure o ou ∞.

Par exemple l'ensemble S du théorème 3 est singulier. Il résulte immédiatement de la définition que tout ensemble réunion dénombrable d'ensembles singuliers est singulier.

THÉORÈME 5. — *Pour qu'un ensemble mesurable* E *de mesure non nulle, soit singulier, il faut et il suffit que l'une des conditions suivantes soit remplie.*

1° *Pour tout e fermé tel que* $e \subset E$, *on a* $\mu(e) = 0$ *ou* ∞;
2° *Pour tout* $e \subset E$, *on a* $\mu^*(e) = 0$ *ou* ∞;
3° *Pour tout* $e \subset E$, *e est mesurable.*

Démonstration. — 1° *Pour tout e fermé tel que* $e \subset E$, *on a* $\mu(e) = 0$ *ou* ∞.

E ne peut contenir aucun ensemble A tel que $\mu^*(A) = l \neq 0$ et ∞; sinon il existerait dans E un ensemble mesurable A' contenant A et de mesure l. D'après le résultat de Hahn [2], E contiendrait donc un ensemble fermé de mesure finie non nulle.

En particulier on a $\mu(E) = \infty$.

(1) *Voir* CHOQUET, *loc. cit.*, théorème 3.
(2) *Voir* H. HAHN, *loc. cit.*

Comme tout ensemble non mesurable contient un sous-ensemble de mesure extérieure finie non nulle, on en conclut que tout sous-ensemble de E est mesurable.

Donc E est bien singulier.

2° *Pour tout* $e \subset E$, *on a* $\mu^*(e) = 0$ *ou* ∞.

En particulier si e est fermé, on a $\mu(e) = 0$ ou ∞. On est donc ramené au cas précédent.

3° *Pour tout* $e \subset E$, *e est mesurable.*

Soit e un ensemble fermé, avec $\mu(e) = l \neq 0$ et ∞.

En vertu d'un lemme que nous allons démontrer, on peut trouver e', e'', tels que $e' + e'' = e$ et $e' . e'' = 0$, aucun des ensembles e', e'' ne contenant de sous-ensemble parfait.

Les ensembles e' et e'' sont non mesurables, sinon l'un d'eux aurait une mesure finie non nulle et contiendrait donc un ensemble parfait.

L'ensemble e contient donc des ensembles non mesurables. Donc E ne peut contenir aucun sous-ensemble fermé de mesure finie non nulle. En vertu du premier cas étudié, E est donc singulier.

Il reste à démontrer le lemme invoqué.

Lemme. — *Pour tout ensemble* E, *il existe une partition* de E *en deux ensembles* E′, E″ *ne contenant aucun sous-ensemble parfait.*

Démonstration. — Si $\overline{\overline{E}} < 2^{\aleph_0}$, c'est évident.

Si $\overline{\overline{E}} = 2^{\aleph_0}$ rangeons les points a de E, et les ensembles parfaits p de l'espace dans deux suites transfinies semblables

$$\begin{array}{ll} (1) & p_1 p_2 \ldots p_\alpha \ldots \\ (2) & a_1 a_2 \ldots a_\alpha \ldots \end{array} \Bigg\} \text{ avec } \overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}.$$

Soient b'_1 et b''_1 les deux premiers éléments éventuels de la suite (2) qui font partie de p_1. Supposons définis plus généralement $\{ b'_\beta \}$ et $\{ b''_\beta \}$ pour tout $\beta < \alpha$; on désigne par b'_α et b''_α les deux premiers éléments éventuels de la suite (2) qui font partie de p_α sans être contenus dans l'ensemble $\bigcup\limits_{\beta<\alpha} (\{ b'_\beta \} + \{ b''_\beta \})$.

Les deux ensembles $\{b'_\alpha\}$ et $\{b''_\alpha\}$ éventuellement vides sont bien définis pour tout α tel que $\overline{\alpha} < 2^{\aleph_0}$ et tout élément de la suite (2) est identique à un élément b'_α ou b''_α.

On pose

$$E' = \bigcup_\alpha \{b'_\alpha\} \quad \text{et} \quad E'' = \bigcup_\alpha \{b''_\alpha\}.$$

Évidemment

$$E = E' + E'' \quad \text{et} \quad E'.E'' = 0;$$

et aucun des ensembles E′, E″ ne contient d'ensemble parfait puisque tout ensemble parfait p, ou bien a des points dans E′ et E″, ou bien est tel que

$$(\overline{\overline{E'.p}}) < 2^{\aleph_0} \quad \text{et} \quad (\overline{\overline{E''.p}}) < 2^{\aleph_0}.$$

Théorème 6. — *Soit* E *un ensemble mesurable de mesure* l *finie ou infinie. Deux cas seulement s'excluant mutuellement sont possibles :*

1° *Ou bien* E *est la somme de deux ensembles disjoints dont l'un est un* F_σ *de mesure finie, et l'autre un ensemble singulier;*

2° *Ou bien pour tout nombre* ρ *tel que* $0 \leqq \rho < l$ *il existe un ensemble fermé borné* $F \subset E$ *tel que* $\mu(F) = \rho$.

Démonstration. — Soit m la borne supérieure des mesures des sous-ensembles fermés de mesure finie de E.

1° Si $m < l$, soit N un des F_σ de E de mesure m. L'ensemble (E — N) ne contient aucun sous-ensemble fermé de mesure finie non nulle, donc en vertu du théorème 5, c'est un ensemble singulier.

2° Si $m = l$, il existe évidemment pour tout ρ tel que $0 \leqq \rho < l$, un ensemble fermé borné $\Phi \subset E$ tel que

$$\rho < \mu(\Phi) < \infty.$$

Φ possède des points M tels que dans tout voisinage de M, Φ ait une mesure non nulle. Pour un tel point M et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ tel que

$$0 < \mu(\mathcal{V}.\Phi) < \varepsilon.$$

Il existe donc un sous-ensemble fermé Φ_1 de Φ tel que

$$\rho \leqq \mu(\Phi_1) < \mu(\Phi) < \infty.$$

Un raisonnement classique montre alors l'existence d'un sous-ensemble fermé F de Φ tel que $\mu(F) = \rho$.

On pourrait aisément tirer du théorème précédent les conséquences suivantes relatives à la structure des ensembles mesurables.

Théorème 7. — *Si* E *est mesurable, quatre cas seulement, s'excluant mutuellement, sont possibles.*

1° *Ou bien* $\mu(E) = 0$;

2° *Ou bien* $E = E_1 + E_2$ (*avec* $E_1 . E_2 = 0$) *où* $\mu(E_1) = 0$, E_2 *étant une réunion dénombrable d'ensembles fermés bornés de mesure finie non nulle;*

3° *Ou bien* $E = E_1 + E_2$ (*avec* $E_1 . E_2 = 0$), *où* E_1 *est singulier,* E_2 *étant une réunion dénombrable d'ensembles fermés de mesure finie;*

4° *Ou bien* $E = E_1 + E_2$ (*avec* $E_1 . E_2 = 0$), *où* E_1 *est d'un des trois types précédents et où* E_2 *n'est d'aucun des trois types précédents dans aucun voisinage d'aucun de ses points.* E_2 *contient au moins* $\aleph_1$ *ensembles parfaits disjoints de mesure finie non nulle; et si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, E_2 *est la réunion de* $\aleph_1$ *ensembles parfaits disjoints deux à deux dont chacun est de mesure finie non nulle autour de chacun de ses points.*

6. Ce qui précède montre l'importance des ensembles singuliers dans la structure des ensembles mesurables pour une mesure de Hausdorff (ou même de Hahn).

Voici, à leur sujet, quelques problèmes qui se posent :

1° L'existence d'ensembles singuliers est-elle équivalente à l'hypothèse du continu (1) ?

2° *a.* Un ensemble borélien peut-il être singulier (2) ?

(1) S'il existe un ensemble linéaire non mesurable de puissance $\aleph_1$, on peut montrer, sans supposer que $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ qu'il existe des ensembles singuliers.

(2) Un arc simple $y = f(x)$ ne peut être singulier pour la mesure linéaire. On peut en effet montrer qu'il contient toujours des sous-ensembles fermés de mesure linéaire $\neq 0$ et ∞.

2° *b*. Un ensemble borélien dont tout sous-ensemble fermé est de mesure nulle peut-il être singulier ? (autrement dit, peut-il être de mesure non nulle ?).

3° Tout ensemble de mesure extérieure non dénombrablement finie contient-il un sous-ensemble singulier (1) ?

4° On peut montrer qu'il existe des ensembles plans singuliers pour la mesure linéaire, et tels que chacun de leurs sous-ensembles non dénombrables ait pour mesure $+\infty$. On peut donc faire une partition d'un tel ensemble en $2^{\aleph_0}$ ensembles singuliers. On peut même montrer qu'on peut trouver dans un tel ensemble une famille, de puissance $2^{(2^{\aleph_0})}$, d'ensembles singuliers dont les intersections deux à deux sont au plus dénombrables.

De telles partitions et décompositions sont-elles possibles pour tout ensemble singulier ? (on montre assez aisément qu'on peut toujours faire une partition d'un ensemble singulier en $\aleph_0$ ensembles singuliers).

5° Existe-t-il des mesures de Hausdorff pour lesquelles un espace cartésien R_n soit un ensemble singulier ?

Voici d'autres problèmes relatifs à des questions voisines :

6° Tout ensemble plan mesurable linéairement est-il mesurable au sens de Lebesgue (pour l'aire) (2) ?

Question analogue pour d'autres mesures de Hausdorff.

---

(1) C. Pauc, dans un travail en cours sur la mesure (à paraître probablement aux *Fund. Math.*), a pu répondre affirmativement à cette question que nous lui avions communiquée.

(2) Au cours de la correction des épreuves, nous avons pu donner une réponse à cette question : M. Pauc nous a d'ailleurs signalé un Mémoire de M. Besicovitch, dans lequel l'auteur construit un exemple, répondant à la même question. Dans ce même Mémoire l'auteur construit des ensembles qui sont singuliers au sens de la définition du paragraphe 5 ci-dessus [*voir* Besicovitch, *Concentrated and rarified sets of points* (*Acta Math.*, 62, 1933, p. 289-300)].

Théorème. — *Si* $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe des ensembles plans mesurables linéairement et non mesurables superficiellement.*

Soit en effet E un des ensembles plans dont l'existence est démontrée par le théorème 2 de notre mémoire « Sur des ensembles cartésiens paradoxaux... » (dans ce volume). Soit *e* un ensemble mesurable linéairement et de mesure

7° **Existe-t-il un ensemble plan E de mesure superficielle extérieure non nulle (mais de mesure intérieure nulle), ne contenant aucun sous-ensemble de mesure linéaire extérieure finie $\neq 0$ (un tel ensemble E serait singulier pour la mesure linéaire).**

8° **La question posée en note dans le paragraphe 3, sur les ensembles possédant la propriété (C).**

(Manuscrit reçu le 11 juillet 1945.)

---

linéaire finie. Je dis que $(E.e)$ est mesurable linéairement. En effet, l'intersection de $(E.e)$ par toute droite $y = \mu$ est de mesure linéaire nulle, sauf peut-être pour une infinité dénombrable de ces droites. Soit f la réunion de ces intersections de mesure linéaire non nulle. L'ensemble f est mesurable linéairement. Donc $(e - f)$ est de mesure finie et coupe toute droite $y = \mu$ suivant un ensemble de mesure linéaire nulle. Donc $E.(e - f)$ est de mesure linéaire nulle. Comme $(E.e) = E.(e - f) + f$, l'ensemble $(E.e)$ est bien mesurable linéairement. Il en est donc de même de E. Comme E n'est pas mesurable superficiellement, le théorème est bien démontré. On aurait un théorème analogue en remplaçant le couple mesure linéaire-mesure superficielle, par un couple quelconque de mesures de Hausdorff, tel que tout ensemble de mesure finie dans la première, soit de mesure nulle dans la seconde