Bulletin de la S. M. F.

Jacqueline Ferrand

Sur l'inégalité d'Ahlfors et son application au problème de la dérivée angulaire

Bulletin de la S. M. F., tome 72 (1944), p. 178-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1944__72__178_0>

SUR L'INÉGALITÉ D'AHLFORS ET SON APPLICATION AU PROBLÈME DE LA DÉRIVÉE ANGULAIRE;

PAR M^{lle} JACQUELINE FERRAND.

1. Grâce à ses inégalités fondamentales ([1]), M. Ahlfors a pu donner des conditions intéressantes pour l'existence d'une dérivée angulaire dans la représentation conforme, sans toutefois parvenir à énoncer une condition géométrique, à la fois nécessaire et suffisante. Nous avons déjà pu, dans notre thèse ([2]), améliorer ces résultats, en utilisant simultanément la méthode de M. Ahlfors, la mesure conforme et l'intégrale de Poisson, et résoudre ainsi des cas qui échappaient aux critères connus. Nous allons montrer, plus simplement, qu'en perfectionnant les inégalités de M. Ahlfors, on peut améliorer ces résultats et éliminer certaine « condition de régularité » introduite artificiellement par la mesure conforme, ce qui permet d'énoncer une condition suffisante, nécessaire dans les deux cas suivants :

A. Le domaine est tout entier contenu dans un cercle dont la circonférence passe par le point-frontière considéré.

B. Le domaine contient l'intérieur ou l'extérieur d'un tel cercle.

Soit Δ un domaine simplement connexe du plan $\zeta = \xi + iy$ que l'on représente conformément sur le demi-plan droit $D(x > 0)$ du plan $z = x + iy$ par les fonctions $\zeta = f(z)$, $z = \varphi(\zeta)$, inverses l'une de l'autre.

On étudie le domaine Δ au voisinage d'un point accessible α de sa frontière, auquel la représentation fait correspondre un point a de l'axe $y'y$. On appelle *dérivée angulaire* la limite, si elle existe, du rapport $\frac{f(z)-\alpha}{z-a}$ lorsque $z \to a$ dans un angle $|\operatorname{Arg}(z-a)| \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon$.

([1]) L. AHLFORS, *Acta Soc. Sc. Fennicæ* (*Nova series* A, I, n° 9, 1930, p. 1-40).

([2]) J. FERRAND, *Ann. Éc. Norm. sup.*, t. 59, 1942, p. 43-106. Dans la suite ce Mémoire sera désigné par la notation [T].

Si cette limite existe, nous dirons que le domaine est *valable* au point considéré.

Pour plus de commodité on envoie les points a et α à l'infini par deux transformations homographiques. Nous supposerons ces transformations effectuées. La dérivée angulaire est alors la limite de $\frac{f(z)}{z}$ lorsque $z \to \infty$ dans un angle $S_\varepsilon \left[|\operatorname{Arg} z| \leqq \frac{\pi}{2} - \varepsilon \right]$; pour que ce rapport ait une limite il suffit que Δ soit contenu dans un domaine valable et que le module du rapport reste borné inférieurement lorsque $z \to \infty$ dans un angle S_ε, ou que Δ contienne un domaine valable et que le module du rapport reste borné supérieurement. On peut en effet se ramener, par une représentation conforme, à une simple application du théorème de Julia-Carathéodory. Les cas A et B correspondent respectivement à ceux où le domaine Δ est contenu dans un demi-plan ou contient un demi-plan.

2. Pour que la représentation soit conforme, il faut déjà qu'elle soit semi-conforme (*winkeltreu*) ([3]), ce qui exige évidemment que Δ contienne des secteurs angulaires d'ouverture aussi voisine de π que l'on veut, et aucun d'ouverture supérieure. Si par une rotation éventuelle de Δ on amène les directions à l'infini des axes réels à se correspondre dans les deux domaines, quel que soit ε, pour R_0 assez grand, Δ devra contenir le secteur $|\operatorname{Arg}\zeta| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$, $|\zeta| > R_0$. Pour démontrer l'inégalité de M. Ahlfors, cette hypothèse n'est pas nécessaire. Nous supposerons cependant au moins, pour l'amélioration en vue, que Δ contient une portion illimitée de l'axe réel ($\xi > R_0$). Le choix de l'origine étant indifférent pour une étude à l'infini, nous supposerons en outre le point $\zeta = 0$ non intérieur à Δ.

Nous poserons

$$\sigma = \log \zeta = X + iy,$$
$$s = \log z = u + iv.$$

La fonction $\sigma(\zeta)$ représente Δ sur un domaine Ω illimité, contenant la portion de l'axe réel $X > \log R_0$.

([3]) *Voir* Ostrowski, *Prace Mat. Fiz.*, t. 44, Varsovie, 1936, p. 371-471. Pour l'étude de la semi-conformité, *voir* [T], paragraphes 30 et suiv.

La fonction $s(z)$ représente D sur la bande $|v| < \frac{\pi}{2}$. Soit R_1, R_2, ..., R_n, ... ($R_n \to \infty$) une suite positive croissante quelconque. Posons

$$\delta_n = \log R_{n+1} - \log R_n.$$

Parmi les coupures du domaine Δ portées par le cercle $|\zeta| = \rho (\rho > R_0)$ et séparant le point $\zeta = R_0$ du point accessible α à l'infini, il y en a une et une seule, soit $\beta\rho$, qui rencontre l'axe réel; son image dans le plan σ est le segment-coupure $\Theta\rho$ du domaine Ω considéré par M. Ahlfors, d'abscisse $X = \log \rho$. Nous désignerons par $y(\rho)$ et $y'(\rho)$ les ordonnées des extrémités de ce segment $[y(\rho) > 0 > y'(\rho)]$.

Du fait que la frontière de Δ est un continu on déduit facilement que chacune des fonctions $y(\rho)$ et $-y'(\rho)$ est semi-continue inférieurement, donc atteint effectivement son minimum sur le segment $R_n \leq \rho \leq R_{n+1}$. y_n désignant le minimum de $y(\rho)$ et $-y'_n$ celui de $-y(\rho)$ on pourra poser $y_n = y(\rho_n)$, $y'_n = y'(\rho'_n)$. Si l'un ou l'autre de ces minima était atteint en plusieurs points ou prendrait pour ρ_n (ou ρ'_n) l'un quelconque d'entre eux. La quantité $\Theta_n = y_n - y'_n$ représente la hauteur du plus grand rectangle (de largeur δ_n) ayant deux côtés portés par les droites $X = \log R_n$, $X = \log R_{n+1}$ et contenu dans Δ.

Nous allons montrer, sous la seule condition que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$ soit convergente, que l'on peut dans la première inégalité de M. Ahlfors remplacer dans chaque intervalle $R_n \leq \rho < R_{n+1}$ la fonction $\Theta(\rho) = y(\rho) - y'(\rho)$ par la quantité Θ_n, *au plus égale au minimum* de $\Theta(\rho)$ dans cet intervalle, pourvu seulement qu'on change la constante additive qui y figure. On voit ainsi le progrès réalisé.

3. La méthode de M. Ahlfors s'appliquerait à une famille quelconque de coupures parallèles entre elles, sans point commun deux à deux. Nous allons dans cet esprit modifier légèrement chaque coupure Θ_ρ en la remplaçant par la coupure Θ^*_ρ ainsi constituée (pour $R_n \leq \rho < R_{n+1}$) :

a. Le segment $S_\rho(X = \log \rho,\ y'_n \leq y \leq y_n)$;

b. Un arc de cercle C_ρ de centre $\sigma_n = \log\rho_n + iy_n$, ayant pour origine le point $\sigma = \log\rho + iy_n$ et pour extrémité le premier point de rencontre avec la frontière de Ω de la circonférence de centre σ_n passant par σ lorsque, partant de σ, on décrit d'abord le demi-cercle *supérieur* $(y > y_n)$;

c. Un arc de cercle C'_ρ défini de façon semblable (de centre $\sigma'_n = \log\rho'_n + iy'_n$, d'origine $\sigma' = \log\rho + iy'_n$) mais dont l'extrémité s'obtient en parcourant d'abord le demi-cercle *inférieur* $(y < y'_n)$.

Les cercles considérés coupent en effet nécessairement la frontière de Ω, car elle est illimitée et passe par les centres des cercles. Donc les arcs C_ρ et C'_ρ existent. Ils peuvent d'ailleurs se réduire à des points si $y(\rho) = y_n$ ou $y'(\rho) = y'_n$. Dans tous les cas ils sont inférieurs à trois quarts de circonférence, car si l'extrémité de C_ρ (resp. C'_ρ) était sur le quatrième quadrant, elle aurait son abscisse comprise entre $\log\rho$ et $\log\rho_n$, et son ordonnée inférieure à y_n (resp. supérieure à y'_n) ce qui est contraire à la définition de y_n (resp. y'_n).

Montrons que chacun des arcs $[C_\rho, C'_\rho]$ est tout entier d'un même côté de l'axe réel, de sorte que ces arcs sont sans point commun et que la coupure $\Theta^\star_\rho$ est sans point double. Si en effet C_ρ coupait l'axe réel $X'X$, avec la partie de cet arc située au-dessus de $X'X$, le segment $X = \log\rho$, $0 \leqq y \leqq y_n$ et le segment de l'axe réel joignant le point $X = \log\rho$, au point de rencontre avec C_ρ, on formerait un continu fermé complètement intérieur à Ω et contenant à son intérieur le point frontière σ_n, ce qui est absurde. On raisonnerait de même pour C'_ρ.

Enfin, deux coupures $\Theta^\star_\rho$, $\Theta^\star_{\rho'}$, quelconques sont toujours sans point commun intérieur à Ω, de sorte que l'aire balayée par $\Theta^\star_\rho$, quand ρ varie, ne l'est qu'une seule fois. Sinon, en supposant pour fixer les idées le point commun au-dessus de $X'X$, plusieurs cas de figures seraient à distinguer selon qu'il y aurait intersection de C_ρ et $C_{\rho'}$, ou de C_ρ et $S_{\rho'}$, ou de $C_{\rho'}$ et S_ρ. Dans chacun d'eux les portions des coupures situées au-dessus de l'axe réel et limitées à leur premier point commun rencontré en partant de cet axe formeraient avec le segment $\log\rho \leqq X \leqq \log\rho'$ de $X'X$, un continu entièrement intérieur à Δ et entourant l'un au moins des centres des arcs (σ_n pour C_ρ et σ_p pour $C_{\rho'}$), ce qui est absurde.

4. La coupure $\Theta_\rho^\star$ est ainsi formée d'une partie rectiligne de longueur Θ_n (pour $R_n \leqq \rho < R_{n+1}$) et de deux « crochets » circulaires C_ρ et $C_{\rho'}$; elle sépare dans Ω le point $\sigma = \log R_0$ de l'axe réel du point accessible à l'infini dans la direction de cet axe. Son image dans le plan s est donc une coupure $T_\rho^\star$ qui relie les deux bords de la bande B, et dont la longueur est par conséquent au moins égale à $\sqrt{\pi^2+\omega^2(\rho)}$, $\omega(\rho)$ étant l'oscillation de $u = \log|\varphi(e^\sigma)|$ sur $\Theta_\rho^\star$.

Reprenons le calcul de M. Ahlfors. On obtient par application de l'inégalité de Schwarz, $\Theta^\star(\rho)$ désignant la longueur de la coupure $\Theta_\rho^\star$ (¹)

$$\pi^2+\omega^2(\rho) \leqq \left[\int_{\Theta_\rho^\star}\left|\frac{ds}{d\sigma}\right| |d\sigma|\right]^2 \leqq \Theta^\star(\rho)\int_{\Theta_\rho^\star}\left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 |d\sigma|$$

$$\int_{R_0}^{R}\frac{\pi^2+\omega^2(\rho)}{\Theta^\star(\rho)}\,\frac{d\rho}{\rho} \leqq \int_{R_0}^{R}\int_{\Theta_\rho^\star}\left|\frac{ds}{d\sigma}\right|^2 |d\sigma|\,\frac{d\rho}{\rho}.$$

L'intégrale double du deuxième membre représente l'aire balayée par $T_\rho^\star$ lorsque ρ varie de R_0 à R. En effet les coupures $\Theta_\rho^\star$ formant dans le plan σ une famille de courbes parallèles, l'élément d'aire de ce plan est $d\omega = |d\sigma_\rho|\frac{d\rho}{\rho}$, $d\sigma_\rho$ étant l'élément d'arc sur $\Theta_\rho^\star$.

Si l'on désigne par $\overline{u}(\rho)$ et $\underline{u}(\rho)$ respectivement le maximum et le minimum de $u = \log|z|$ sur $T_\rho^\star$, l'aire balayée par $T_\rho^\star$, ne pouvant se recouvrir, est inférieure à $\pi[\overline{u}(R) - \underline{u}(R_0)]$. D'autre part $\omega(\rho) = \overline{u}(\rho) - \underline{u}(\rho)$ ce qui permet de montrer que l'on a

$$(1)\qquad \underline{u}(R) - \overline{u}(R_0) \geqq \pi\int_{R_0}^{R}\frac{d\rho}{\rho\Theta^\star(\rho)} - 4\pi$$

pourvu que soit vérifiée l'inégalité

$$(2)\qquad \int_{R_0}^{R}\frac{d\rho}{\rho\Theta^\star(\rho)} > 2.$$

(¹) La fonction est en général discontinue, mais peut être considérée comme limite d'une suite croissante de fonctions n'ayant, dans tout intervalle fini, qu'un nombre fini de points de discontinuité. Elle est donc mesurable et toutes les intégrales écrites existent au sens de Lebesgue.

Or cette dernière inégalité est vérifiée dès que R est assez grand. En effet, les rayons des crochets C_ρ et C'_ρ étant (pour $R_n \leqq \rho < R_{n+1}$) inférieurs à $\delta_n = \log R_{n+1} - \log R_n$, et Θ_n lui-même inférieur à 2π, on a (chaque crochet étant inférieur à trois quarts de circonférence)

$$\int_{R_0}^{R_n} \frac{d\rho}{\rho\Theta^*(\rho)} > \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{2+3\delta_i}.$$

Or la série du deuxième membre diverge comme $\sum_{i=1}^{n} \delta_i$. Donc pour n assez grand, et $R \geqq R_n$, (2) sera satisfaite. Alors (1) le sera aussi. Posons, dans chaque intervalle $R_i \leqq \rho < R_{i+1}$

$$\Theta^*(\rho) = \Theta_i + \varepsilon(\rho).$$

$\varepsilon(\rho)$ représente la somme des longueurs des crochets C_ρ et C'_ρ et satisfait à

$$(3) \qquad 0 \leqq \varepsilon(\rho) < \frac{3\pi}{2}[|\log\rho - \log\rho_i| + |\log\rho - \log\rho'_i|].$$

On aura alors

$$\frac{1}{\Theta^*(\rho)} = \frac{1}{\Theta_i + \varepsilon(\rho)} \geqq \frac{1}{\Theta_i} - \frac{\varepsilon(\rho)}{\Theta_i^2},$$

$$\int_{R_i}^{R_i+1} \frac{d\rho}{\rho\Theta^*(\rho)} \geqq \frac{\delta_i}{\Theta_i} - \frac{1}{\Theta_i^2}\int_{R_i}^{R_i+1} \frac{\varepsilon(\rho)}{\rho}\, d\rho;$$

on voit facilement, d'après (3), que

$$\int_{R_i}^{R_i+1} \varepsilon(\rho)\frac{d\rho}{\rho} < \frac{3\pi}{2}\int_{\log R_i}^{\log R_i+1} [|X - \log\rho_i| + |X - \log\rho'_i|]\, dX \leqq \frac{3\pi}{2}\delta_i^2,$$

donc on aura

$$\int_{R_0}^{R_n} \frac{d\rho}{\rho\Theta^*(\rho)} > \sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\Theta_i} - \frac{3\pi}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i^2}{\Theta_i^2}$$

$$(4) \qquad \underline{u}(R_n) - \overline{u}(R_0) > \pi\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i}{\Theta_i} - \frac{3\pi^2}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta_i^2}{\Theta_i^2} - 4\pi.$$

Si la série $\sum_{i=1}^{\infty} \delta_i^2$ converge et si Θ_i est borné inférieurement (c'est-à-dire si Δ contient un secteur angulaire d'accessibilité au point à l'infini considéré) l'inégalité (4) entraînera l'inégalité

$$\underline{u}(R_n)-\overline{u}(R_0)>\pi\sum_{i=1}^{n}\frac{\delta_i}{\Theta_i}-K \qquad [K=\text{constante}]. \tag{5}$$

Désignons par $\overline{\Theta}(\rho)$ la fonction discontinue, constante et égale à Θ_i dans chaque intervalle $R_i\leq\rho<R_{i+1}$. Si R n'est pas un nombre de la suite $R_0, R_1, \ldots, R_n, \ldots$, on écrira l'inégalité (5) pour le plus grand nombre R_n de cette suite inférieur à R et l'on aura

$$\underline{u}(R)-\overline{u}(R_0)>\underline{u}(R_n)-\overline{u}(R_0)$$
$$>\pi\int_{R_0}^{R_n}\frac{d\rho}{\rho\overline{\Theta}(\rho)}-K=\pi\int_{R_0}^{R}\frac{d\rho}{\rho\overline{\Theta}(\rho)}-\pi\int_{R_n}^{R}\frac{d\rho}{\rho\overline{\Theta}(\rho)}-K'$$

$$\underline{u}(R)-\overline{u}(R_0)>\pi\int_{R_0}^{R}\frac{d\rho}{\rho\overline{\Theta}(\rho)}-K', \tag{6}$$

K' désignant une autre constante, car $\int_{R_n}^{R}\frac{d\rho}{\rho\overline{\Theta}(\rho)}<\frac{\delta_n}{\Theta_n}$ est borné. Le résultat annoncé est donc établi.

5. Dans les applications que nous avons en vue, $\Theta_n\to\pi$ lorsque $n\to\infty$. Il sera plus avantageux de transformer d'une autre manière l'inégalité (1). Nous pouvons écrire

$$\Theta^\star(\rho)=\pi+\varepsilon(\rho)+[\Theta_i-\pi]$$
$$\frac{1}{\Theta^\star(\rho)}\geqq\frac{1}{\pi}-\frac{\varepsilon(\rho)}{\pi^2}-\frac{\Theta_i-\pi}{\pi^2}.$$

Pour n assez grand, on aura donc

$$\underline{u}(R_n)-\overline{u}(R_0)>\int_{R_0}^{R_n}\frac{d\rho}{\rho}-\frac{1}{\pi}\int_{R_0}^{R_n}\varepsilon(\rho)\frac{d\rho}{\rho}-\frac{1}{\pi}\int_{R_0}^{R_n}(\Theta_i-\pi)\frac{d\rho}{\rho}-4\pi$$

d'où, en tenant compte de (3),

$$\underline{u}(R_n)-\overline{u}(R_0)>\log R_n-\log R_0-\frac{3}{2}\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2-\frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}(\Theta_i-\pi)\delta_i-4\pi. \tag{7}$$

Donc en supposant seulement la série $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^2$ convergente (sans que Θ_i soit borné inférieurement), on aura l'inégalité

$$(8) \quad \underline{u}(R_n) - \overline{u}(R_0) > \log R_n - \log R_0 - \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{n}(\Theta_i - \pi)\delta_i - K \qquad (K = \text{const.}).$$

6. **Première application**. — Ceci nous permet tout d'abord d'énoncer une condition nécessaire, plus restrictive que celle de M. Ahlfors, *pour que le domaine* Δ *soit valable à l'infini :* $u(R) - \log R$ devant rester fini lorsque $R \to \infty$, avec les notations du paragraphe 2, *il faut que, pour toute suite* R_n *telle que la série* $\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2$ *soit convergente, les sommes associées* $\sum_{i=1}^{\infty}(\pi - \Theta_i)\,\delta_i$ *soient bornées supérieurement lorsque* $n \to \infty$.

Nous allons montrer que pour un domaine Δ contenu dans le demi-plan $\xi > 0$, cette condition nécessaire [que nous désignerons par (N_1)] entraîne la condition suffisante établie antérieurement [T., § 42], que nous désignerons par (S_1).

Rappelons que cette condition (S_1) était l'existence d'une suite R_n telle que, λ_n désignant le plus grand des nombres $\frac{\pi}{2} - y_n$ et $\frac{\pi}{2} + y'_n$, les séries $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\,\delta_n$ soient convergentes.

Supposons (N_1) satisfaite. Ici la série $\sum_{i=1}^{\infty}(\pi - \Theta_i)\,\delta_i$ est à termes positifs, donc convergente. On a évidemment

$$\pi - \Theta_n = \frac{\pi}{2} - y_n + \frac{\pi}{2} + y'_n \geqq \lambda_n.$$

Donc la série $\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\,\delta_i$ converge pour toute suite R_n telle que $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^2 < \infty$. Montrons qu'on peut déterminer, par récurrence, une suite R_n pour laquelle $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n^2 < \infty$. R_0 étant donné, supposons $R_1, R_2, \ldots, R_n$ connus. Soit, pour $\delta > 0$, $\lambda(\delta)$ le maximum de $\frac{\pi}{2} - |\operatorname{Arg}\zeta|$ sur la portion de frontière de Δ comprise dans l'anneau $R_n \leqq |\zeta| \leqq R_n e^{\delta}$; désignons par $\mu(\delta)$ le plus grand des nombres $\lambda(\delta)$ et $u_n(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2)$, le nombre positif u_n étant le terme général d'une série *divergente* mais telle que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty$, et par ailleurs quelconque. La fonction $\mu(\delta)$ est non décroissante et bornée. Donc, pour δ assez grand, on aura

$$\mu(\delta) \leqq \delta(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2).$$

Nous prendrons pour δ_n la borne inférieure (évidemment non nulle) des nombres δ satisfaisant à cette inégalité; nous aurons donc

$$R_{n+1} = R_n e^{\delta_n}, \qquad \lambda(\delta_n) = \lambda_n.$$

Par définition on a

$$\mu(\delta_n + 0) \leqq \delta_n \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2 \leqq \mu(\delta_n - 0)$$

et puisque la fonction $\mu(\delta)$ est non décroissante

$$\mu(\delta_n - 0) = \mu(\delta_n + 0) = \mu(\delta_n) = \delta_n \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i^2.$$

La quantité δ_n est donc tout d'abord supérieure à u_n, ce qui montre que la série de terme général δ_n est divergente, et que $R_n \to \infty$ avec n. Mais on a aussi

$$\delta_n < \frac{\lambda_n}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2} + u_n,$$

ce qui permet de montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2 < \infty$ car la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n^2}{(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2)^2}$$

est toujours convergente et que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2 < \infty$.

D'après (N_1), supposée vérifiée, il faut donc que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \delta_n$ soit convergente, et comme on a

$$\delta_n > \frac{\lambda_n}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_{n-1}^2},$$

ceci exige que la série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ soit elle-même convergente.

C. Q. F. D.

7. **Deuxième application.** — Si les sommes $\sum_{i=1}^{n} (\Theta_i - \pi)\,\delta_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$ sont bornées supérieurement, on aura, pour n assez grand,

$$(9) \qquad \underline{u}(R_n) - \overline{u}(R_0) > \log R_n - \log R_0 - C \qquad (C = \text{const.}).$$

On en déduirait facilement, puisque δ_n tend vers zéro, que pour R quelconque mais assez grand on a

$$\underline{u}(R) - \overline{u}(R_0) > \log R - \log R_0 - C' \qquad (C' = \text{const.}).$$

Donc lorsque le point $\zeta = R$ s'éloigne à l'infini sur l'axe réel, le rapport $\frac{|\varphi(R)|}{R}$ reste borné inférieurement.

Si la représentation conforme de Δ sur D est semi-conforme au point accessible α à l'infini, pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ le rapport $\frac{|\varphi(Re^{i\theta})|}{R}$ sera aussi borné inférieurement, donc, pour $|\psi| < \frac{\pi}{2}$ le rapport $\frac{|f(re^{i\psi})|}{r}$ sera borné supérieurement quand $r \to \infty$, quel que soit ψ fixé.

Ceci nous permet immédiatement d'établir une condition suffisante (S_2) *pour qu'un domaine Δ contenant un domaine valable à l'infini, soit lui-même valable : il suffit que l'on puisse trouver une suite croissante R_n ($R_n \to \infty$) telle que les sommes associées $\sum_{i=1}^{n} (\Theta_i - \pi)\,\delta_i$ et $\sum_{i=1}^{n} \delta_i^2$ soient bornées supérieurement.* Prenons le cas particulier d'un domaine Δ contenant le demi-plan droit $\xi > 0$. On peut poser ici $y_i = \frac{\pi}{2} + \theta_i$, $y'_i = -\frac{\pi}{2} - \theta'_i$, θ_i et θ'_i

étant des quantités positives, d'où

$$\Theta_i = \pi + \theta_i + \theta'_i .$$

Pour que la somme $\sum_{i=1}^{n}(\Theta_i - \pi)\,\delta_i$ soit bornée il faut et il suffit que les séries $\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i\,\delta_i$ et $\sum_{i=1}^{\infty}\theta'_i\,\delta_i$ soient convergentes. Nous trouvons donc comme condition suffisante l'existence d'une suite R_n permettant la convergence des trois séries

$$\sum_{i=1}^{\infty}\theta_i\,\delta_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\theta'_i\,\delta_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\delta_i^2 .$$

8. On peut montrer, en reprenant un raisonnement esquissé précédemment (T., § 46), que cette condition (S_2) est *nécessaire* lorsque Δ contient le demi-plan droit $\xi > 0$.

On peut alors supposer, sans restreindre la généralité, que $\zeta = 0$ est un point frontière accessible. Le *noyau* Δ_0 de Δ, engendré par les coupures β_ρ lorsque ρ varie de zéro à l'infini, étant contenu dans Δ et contenant le même demi-plan $\xi < 0$, est encore valable (T., § 42). Nous pouvons raisonner sur Δ_0 au lieu de Δ, car pour ces deux domaines les fonctions $\Theta(\rho)$ et $\overline{\Theta}(\rho)$ sont les mêmes. Nous désignerons par $\zeta = f_0(z)$ l'une des fonctions qui réalisent la représentation conforme de Δ_0 sur D, avec correspondance des points $\zeta = 0$, $z = 0$, d'une part, et $\zeta = \infty$, $z = \infty$, d'autre part.

Supposons d'abord la frontière Γ_0 de Δ_0 régulière (courbe de Jordan); la correspondance entre les frontières de Δ_0 et D étant alors continue, on sait qu'une condition analytique nécessaire et suffisante ponr l'existence d'une dérivée angulaire à l'infini est la convergente de l'intégrale

$$\int_0^{\infty}[g(y) - g(-y)]\,\frac{y\,dy}{1+y^2}, \tag{12}$$

où

$$g(y) = \operatorname{Arg}\frac{f(iy)}{iy} \qquad (\textit{voir } [\mathrm{T.}]\ \S\, 41).$$

Δ_0 contenant le demi-plan $\xi > 0$, $g(y)$ est du signe de y, et la convergence de (12) exige celle des deux intégrales

$$\int^{\infty} g(y) \frac{dy}{y} \tag{13}$$

$$\int^{\infty} g(-y) \frac{dy}{y}. \tag{14}$$

On peut montrer (T., § 46) que la convergence de (13) entraîne l'existence d'une suite croissante $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ ($y_n \to \infty$) telle que, en posant $\log y_{n+1} - \log y_n = d_n$, $g(y_n) = \psi_n$, les séries $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2$ convergent. La construction s'effectue par récurrence; si y_n est connu, d_n est la borne supérieure [finie à cause de la convergence de (13)] des nombres d tels que $y < y_n e^d$ entraîne $G(y) > d$, $G(y)$ désignant le plus grand des nombres $g(y)$ et $h(y)$, $h(y)$ étant lui-même une fonction positive continue, décroissante, quelconque, telle que l'intégrale (15) $\int^{\infty} h(y) \frac{dy}{y}$ soit convergente.

D'après la construction, on a, la fonction $G(y)$ étant continue, $d_n = G(y_{n+1}) \geq h(y_{n+1})$, ce qui montre que y_n ne peut avoir une limite finie lorsque $n \to \infty$, mais tend vers l'infini. Mais on a aussi

$$\int_{y_n}^{y_{n+1}} G(y) \frac{dy}{y} > \int_{y_n}^{y_{n+1}} \log \frac{y}{y_n} \frac{dy}{y} = \frac{1}{2} d_n^2.$$

La convergence de (13) et (15) entraîne donc celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} d_n^2$, et comme $d_n = G(y_{n+1}) \geq g(y_{n+1}) = \psi_{n+1}$, elle entraîne aussi celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^2$.

Posons $|f(iy_n)| = r_n$, $u_n = \log \frac{r_{n+1}}{r_n}$, et comparons u_n à d_n. Dans le plan z, d_n est équivalent à $\frac{\alpha_n}{\sqrt{2}}$, α_n étant la mesure conforme dans D du segment $y_n \leq y \leq y_{n+1}$ de $y'y$ vu du point $z = y_n$ de l'axe réel $\left(\text{car } \alpha_n = 2 \operatorname{Arg} \frac{y_n - iy_n}{y_n - iy_{n+1}}\right)$ égale à la mesure conforme dans le domaine Ω_0 transformé de Δ_0 par $\sigma = \log \zeta$, de l'arc de frontière compris entre les points $\sigma_n = \log f(iy_n)$ et $\sigma_{n+1} = \log f(iy_{n+1})$ vu du point $\tau_n = \log f(y_n)$. La représentation de Δ_0 sur D étant nécessairement semi-conforme, lorsque $n \to \infty$, $\operatorname{Arg} f(y_n) \to 0$ et $\left|\frac{f(y_n)}{f(iy_n)}\right| \to 1$, d'après le « premier théorème sur les plis » de M. Ostrowski. On en déduit que $f(y_n)$ est équivalent à $|f(iy_n)| = r_n$; α_n est donc équivalent à la mesure conforme dans Ω_0 de l'arc $\widehat{\sigma_n \sigma_{n+1}}$ de frontière vu du point $\tau'_n = \log r_{n+1}$ de l'axe réel, soit β_n. D'après le « principe de l'agrandissement du domaine », β_n est supérieur à la mesure conforme, dans le domaine Ω_1 du plan $\sigma = u + iv$ formé par la réunion de la bande $|v| < \frac{\pi}{2}$ avec la demi-bande $v \geqq \frac{\pi}{2}$, $\log r_n < u < \log r_{n+1}$, des portions de frontières définies par

$$u = \log r_n, \qquad v > \frac{\pi}{2} + \psi_n;$$

$$u = \log r_{n+1}, \qquad v > \frac{\pi}{2} + \psi_{n+1};$$

vues du point $\tau'_n = \log r_{n+1}$ de l'axe réel.

Alors, ou bien $u_n < d_n$, et la comparaison est achevée, ou bien $u_n > d_n > \psi_{n+1}$, et β_n est supérieur à la mesure conforme γ_n dans Ω_1 de la portion de frontière définie par $u = \log r_{n+1}$, $v > \frac{\pi}{2} + u_n$, vue du point $\tau'_n = \log r_{n+1}$, quantité qui ne dépend plus que de u_n. La représentation conforme de Ω_1 sur D peut se réaliser, selon la méthode de Schwarz, par des fonctions élémentaires. Le calcul montre qu'il existe une constante k, indépendante de u_n telle que l'on ait $\gamma_n > k\, u_n$. On en déduit $d_n > \frac{k}{\sqrt{2}}(1 - \varepsilon_n) u_n$ $\left[\varepsilon_n \text{ tendant vers zéro avec } \frac{1}{n}\right]$, donc pour n assez grand, on a : $d_n > \frac{k}{2} u_n$, inégalité vérifiée dans tous les cas (car $k < 2$).

Donc la convergence de la série $\sum_{1=n}^{\infty} d_n^2$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$.

On opérerait de même avec l'intégrale (14). Il y a donc sur la frontière de Δ_0, deux suites de points

$$\zeta_p = r_p e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \psi_p\right)}, \qquad \zeta'_q = r'_q e^{-i\left(\frac{\pi}{2} + \psi'_q\right)}$$

telles que, en posant

$$\log \frac{r_{p+1}}{r_p} = u_p, \qquad \log \frac{r'_{q+1}}{r'_q} = u'_q,$$

les séries $\sum_{p=1}^{\infty} u_p^2$, $\sum_{p=1}^{\infty} \psi_p^2$, $\sum_{q=1}^{\infty} u_q'^2$, $\sum_{q=1}^{\infty} \psi_q'^2$ soient convergentes.

Jusqu'ici nous avons supposé Δ_0 limité par une courbe de Jordan. S'il n'en était pas ainsi, on pourrait considérer Δ_0 comme la limite d'une suite croissante de domaines à frontières régulières; pour Δ_0 les intégrales (13) et (14) existent alors au sens de Lebesgue et doivent converger. Le raisonnement reste valable.

D'autre part la frontière de Δ_0 étant composée de portions de frontière de Δ et d'arcs de cercle de centre $\zeta = 0$, limités à des points frontières de Δ, l'existence sur la frontière de Δ_0 des suites ζ_p, ζ'_q satisfaisant aux conditions énoncées entraîne l'existence sur la frontière de Δ, de suites satisfaisant aux mêmes conditions, et que nous désignerons par ζ_p, ζ'_q.

9. Montrons que cette condition nécessaire (N_2) entraîne la condition suffisante (S_2).

Supposant (N_1) vérifiée, voici l'un des moyens de former une suite R_n vérifiant (S_2) :

Prenons $R_0 > 0$ quelconque et procédons par récurrence. R_n étant supposé connu et différent de tous les nombres r_p et r'_q, soient r_{p_n} et r'_{q_n} les plus petits nombres des deux suites supérieurs à R_n. Si r_{p_n} est le plus grand nous prendrons R_{n+1} quelconque dans l'intervalle $r_{p_n} < \rho < r_{p_n+1}$. Nous aurons alors en posant $\log \frac{R_{n+1}}{R_n} = \delta_n$, $\delta_n < u_{p_n-1} + u_{p_n}$.

Si r'_{q_n} est le plus grand nous prendrons R_{n+1} quelconque dans l'intervalle $r'_{q_n} < \rho < r'_{q_n+1}$. Nous aurons alors $\delta_n < u'_{q_n-1} + u'_{q_n}$. Dans tous les cas

$$\delta_n < u_{p_n-1} + u_{p_n} + u'_{q_n-1} + u'_{q_n}.$$

Chaque indice p_n, q_n ne pouvant se retrouver qu'une fois au plus, la convergence des séries $\sum_{p=1}^{\infty} u_p^2$ et $\sum_{q=1}^{\infty} u_q'^2$ entraîne celle de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$.

L'anneau $R_n \leqq |\zeta| \leqq R_{n+1}$ contenant les points ζ_{p_n} et ζ'_{q_n} de la frontière de Δ, le minimum y_n des valeurs positives de $\operatorname{Arg}\zeta$ sur la portion de frontière contenue dans cet anneau est au plus égal à $\frac{\pi}{2} + \psi_{p_n}$ et le maximum y'_n des valeurs négatives au moins égal à $-\frac{\pi}{2} - \psi'_{q_n}$. On a donc

$$\theta_n = y_n - \frac{\pi}{2} < \psi_{p_n}, \qquad \theta'_n = -y'_n - \frac{\pi}{2} < \psi'_{q_n}.$$

Donc les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^2$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \theta'^2_n$ sont convergentes, et l'inégalité de Schwarz nous montre que les séries $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \delta_n$ et $\sum_{n=1}^{\infty} \theta'_n \delta_n$ sont aussi convergentes. C. Q. F. D.

La convergence des trois séries (11) *est une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine* Δ *contenant le demi-plan droit* $\xi > 0$ *soit valable.*

Nous venons de voir qu'une condition en apparence plus restrictive, mais qui est aussi nécessaire et suffisante, est la convergence des trois séries $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta'^2_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$.

En rapprochant ces résultats de ceux du paragraphe 16 nous pouvons énoncer, avec les notations du paragraphe 2 :

Théorème. — *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un domaine* Δ *contenu dans le demi-plan droit* $\xi > 0$ *ou contenant ce demi-plan, soit valable, est qu'il existe une suite croissante de nombres* R_n *entraînant la convergence des séries* $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \theta'^2_n$.

Pour un domaine Δ quelconque cette condition est suffisante. Nous n'avons pu encore démontrer qu'elle est nécessaire.

(Manuscrit reçu le 24 octobre 1944).