BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEXANDRE DINGHAS

Sur une généralisation du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors

Bulletin de la S. M. F., tome 64 (1936), p. 216-219
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1936__64__216_0>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE DENJOY-CARLEMAN-AHLFORS;

PAR M. ALEXANDRE DINGHAS.

(Berlin.)

1. Dans une Note publiée récemment dans le *Mathematische Zeitschrift* (¹), nous avons montré comment une modification légère de la méthode différentielle de Carleman (²), permet d'obtenir d'une manière fort élégante une inégalité analogue à celle que Milloux a donné dans un travail publié dans les *Acta Mathematica* (³) en utilisant le *Verzerrungssatz* bien connu de Ahlfors.

Dans le cours de recherches engagées dans une toute autre direction, je suis arrivé avec cette même méthode de Carleman convenablement modifiée à une extension du théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors pour les fonctions entières à « croissance régulière » en répondant ainsi en partie à une question que j'ai posée dans un travail antérieur (⁴).

2. Soit $f(z)$ une fonction entière dans un domaine B limité par deux courbes C_1, C_2 issues du point $z = 0$, sans points communs et s'étendant à l'infini. Désignons par s_r l'arc du cercle $|z| = r$ compris entre C_1, C_2 et appartenant à B, par θ_r l'angle correspondant et enfin par $s(r)$, $\theta(r)$ leurs grandeurs respectives. La

(¹) A. DINGHAS, *Bemerkungen zu einer Differentialungleichung von Carleman*, (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 41, 1936, p. 713).

(²) CARLEMAN, *Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques* (*C. R. Acad. Sc.* Paris, 196, 1933, p. 995-997).

(³) MILLOUX, *Sur les domaines de détermination infinie des fonctions entières* (*Acta Mathematica*, 61, 1933, p. 105-134).

(⁴) A. DINGHAS, *Über einen Satz von Phragmen-Lindelöf* (*Mathematische Zeitschrift*, Bd. 39, 1934, p. 455-461).

fonction $f(z)$ soit telle que sur C_1, C_2 l'inégalité

$$\log|f(z)| \leqq \log\gamma(r) = r^{\rho'} \qquad (\rho' > 0) \tag{2.1}$$

soit vérifiée, tandis que à l'intérieur de B on ait au moins pour un z de l'arc

$$|f(z)| > \gamma(r) \qquad (r \geqq r_0). \tag{2.2}$$

Nous définirons comme fonction caractéristique de $f(z)$ dans le domaine B l'intégrale

$$T(r, B) = \frac{1}{\theta(r)} \int_{\theta_r} \overset{+}{\log} |f(re^{i\varphi})| \, d\varphi.$$

Considérons maintenant la fonction

$$m(r, \gamma) = \int_{\theta_r} \left(\overset{+}{\log} \frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)} \right)^2 d\varphi.$$

Nous avons

$$\frac{m'}{2} = \int_{\theta_r} \Phi\Phi_r \, d\varphi \qquad \text{et} \qquad \frac{m''}{2} = \int_{\theta_r} (\Phi\Phi_{rr} + \Phi_r^2) \, d\varphi,$$

où nous avons posé

$$\overset{+}{\log} \frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)} = \Phi(r, \varphi) = \Phi.$$

Soit E l'ensemble des points du domaine B où l'inégalité (2.2) est vérifiée et E' l'ensemble complémentaire. Pour E on aura

$$\Delta\Phi = -\Delta \log\gamma(r)$$

tandis que pour E'

$$\Delta\Phi = 0,$$

donc en tous les cas

$$\Delta\Phi = \Phi_{rr} + \frac{\Phi_r}{r} + \frac{\Phi_{\varphi\varphi}}{r^2} \geqq -\Delta \log\gamma(r).$$

Par des calculs très faciles en utilisant les deux inégalités

$$\int_{\theta_r} \Phi_r^2 \, d\varphi \geqq \frac{1}{4} \frac{m'^2}{m} \qquad \text{et} \qquad \int_{\theta_r} \Phi_\varphi^2 \, d\varphi \geqq \frac{\pi^2}{\theta^2(r)} \int_{\theta_r} \Phi^2 \, d\varphi \quad (^1),$$

(1) *Loc. cit.* p. 714.

on arrive à la relation

$$(2.3)\qquad \frac{m''}{2}+\frac{m'}{2r}-\frac{1}{4}\frac{m'^2}{m}\geqq\frac{\pi^2}{s^2(r)}m-\Delta\log\gamma(r)\int_{\theta_r}\Phi\,d\varphi.$$

D'autre part on tire de l'inégalité de Schwarz

$$(2.4)\qquad \left(\frac{1}{\theta(r)}\int_{\theta_r}\Phi\,d\varphi\right)^2\leqq\frac{m(r)}{\theta(r)},$$

on aura alors *a fortiori*

$$(2.5)\qquad \frac{m''}{2m}+\frac{m'}{2rm}-\frac{1}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\geqq\frac{\pi^2}{s^2(r)}-\sqrt{\frac{\theta(r)}{m(r)}}\,\Delta\log\gamma(r).$$

Maintenant par un raisonnement très simple, on peut démontrer l'inégalité

$$\frac{1}{\theta(r)}\int_{\theta_r}\Phi\,d\varphi=\frac{1}{\theta(r)}\int_{\theta_r}\overset{+}{\log}\frac{|f(re^{i\varphi})|}{\gamma(r)}\,d\varphi\geqq\frac{1}{\theta(r)}\int_{\theta_r}\overset{+}{\log}\,|f(re^{i\varphi})|\,d\varphi-\log\gamma(r),$$

pourvu qu'on ait $\gamma(r)\geqq e$. Cette inégalité combinée avec (2.4) donne

$$(2.6)\qquad \sqrt{\frac{m(r)}{\theta(r)}}\geqq T(r,\,B)-\log\gamma(r).$$

Des formules (2.5) et (2.6), il résulte enfin

$$(2.7)\qquad \frac{m''}{2m}+\frac{m'}{2rm}-\frac{1}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\geqq\frac{\pi^2}{s^2(r)}-\frac{\Delta\log\gamma(r)}{T(r,B)-\log\gamma(r)},$$

le membre droit de (2.6) étant supposé positif.

3. Nous dirons maintenant que la fonction entière d'ordre fini $\rho>\frac{1}{2}$ dans le domaine B soit à croissance régulière, si pour tout $\frac{1}{2}<\rho'<\rho$, on a

$$(3.1)\qquad \lim_{r\to\infty}\frac{T(r,\,B)}{r^{\rho'}}=\infty.$$

Nous supposerons encore, que

$$(3.2)\qquad \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r\theta(r)>0.$$

En premier lieu, nous tirons de la formule (2.7) pour $r\geqq r_0$,

$$(3.3)\qquad m''+\frac{m'}{r}>0,$$

c'est-à-dire

$$rm''+m'=(rm')'>0.$$

Donc rm' est une fonction croissante de r et ne peut s'annuler qu'une fois. En combinant (2.6) et la condition (3.2), on peut voir aisément que $m(r)$ croît plus vite que r^{ε}, $\varepsilon > 0$. Il en résulte que

$$m' > 0 \tag{3.4}$$

pour r suffisamment grand. On peut alors écrire

$$4\left\{\frac{m^2}{2m} + \frac{m'}{2rm} - \frac{1}{4}\left(\frac{m'}{m}\right)^2\right\} = 2\frac{m'}{m}\left(\frac{m''}{m'} + \frac{1}{r}\right) - \left(\frac{m'}{m}\right)^2 \leqq \left(\frac{m''}{m'} + \frac{1}{r}\right)^2. \tag{3.5}$$

En tirant la racine carrée, on aura de (2.7) pour r grand,

$$\left|\frac{m''}{m'} + \frac{1}{r}\right| \geqq \frac{2\pi}{s(r)}[1 + o(1)],$$

ou par (3.3) et (3.4),

$$\frac{d}{dr}\left(\log r \frac{d}{dr} m(r, \gamma)\right) \geqq \frac{2\pi}{s(r)}[1 + o(1)]. \tag{3.6}$$

Deux intégrations successives et un calcul analogue à celui que j'ai utilisé dans ma Note de *Math. Zeitschrift* donnent la relation

$$\varlimsup_{r \to \infty} \frac{\pi}{\log r} \int_{r_0}^{r} \frac{dt}{s(t)} \leqq \rho. \tag{3.7}$$

qui généralise les théorèmes de Lindelöf et de Milloux [1], pour la classe des fonctions entières à « croissance régulière ».

C'est enfin un procédé trop classique pour qu'il soit reproduit ici, qui permet de démontrer en partant de (2.6) le théorème de Denjoy-Carleman-Ahlfors sous la forme suivante : *supposons qu'une fonction entière $f(z)$ vérifie sur n courbes issues du point $z = 0$ sans points communs et s'étendant à l'infini les inégalités* (2.1), (2.2), *tandis que dans chacun des domaines* B_1, B_2, ..., B_n *limités par deux courbes consécutives la fonction $f(z)$ soit à croissance régulière au sens de* (3.1). *Alors on aura encore*

$$n \leqq 2\rho.$$

---

[1] MILLOUX, *loc. cit.* p. 114.