BULLETIN DE LA S. M. F.

OTTON MARTIN NIKODÝM

Sur l'existence du potentiel uniforme sur une surface de Riemann quelconque

Bulletin de la S. M. F., tome 61 (1933), p. 220-245

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1933__61__220_0>

SUR L'EXISTENCE DU POTENTIEL UNIFORME SUR UNE SURFACE DE RIEMANN QUELCONQUE;

Par M. Otton Nikodym.

Au cours du *IIᵉ Congrès des Mathématiciens roumains* à Turnu Severin, j'ai présenté une méthode nouvelle permettant de démontrer l'existence de la solution du problème de Dirichlet pour l'équation différentielle

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(p\frac{\partial U}{\partial z}\right)-qU=0,$$

où $p(x, y, z)$, $q(x, y, z)$ satisfont à certaines conditions de régularité et aux inégalités

$$0<\alpha<p<\beta, \qquad 0\leqq q<\gamma,$$

où α, β, γ sont des constantes. Le domaine du problème est borné, d'ailleurs quelconque. La méthode est celle du principe du minimum simplifiée par l'application de théorèmes très élémentaires concernant l'espace de M. Hilbert à une infinité de dimensions.

Or, j'ai remarqué que, si l'on modifie convenablement la méthode en question, on peut obtenir une démonstration très naturelle de l'existence du potentiel uniforme sur une surface de Riemann quelconque.

La démonstration que je présente ici, tout en restant au fond la même que celle qui se trouve dans le livre de M. H. Weyl : *Die Idee der Riemannschen Fläche*, est débarrassée de tous les artifices y contenus qui, quoique ingénieux, compliquent l'exposé considérablement.

Pour mettre en évidence la méthode, je ne l'expose que dans le cas de la surface de Riemann répandue sur le plan de la variable complexe. D'une manière générale, je considère le cas d'une surface quelconque séparable et connexe à deux dimensions pourvue d'une métrique partout localement euclidienne. Le cas plus général de la surface abstraite de Riemann-Klein-Weyl peut être traité par la même méthode si, au lieu du groupe des mouvements locaux et euclidiens, on introduit le groupe des transformations conformes.

Je considère au lieu de l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

l'équation plus générale du type elliptique

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial U}{\partial y}\right) - qU = 0.$$

où p, q sont des fonctions du point de la surface, cette généralisation ne compliquant pas essentiellement le traitement du problème. La méthode s'étend facilement aux espaces à un nombre fini quelconque de dimensions.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons les notations suivantes :

$\mathfrak{F}$D désignera la frontière de l'ensemble D.

$\bar{E}$ désignera la fermeture de E, c'est-à-dire la somme de l'ensemble E et de son ensemble dérivé.

I. — L'espace réel abstrait de M. Hilbert.

1. On appelle ainsi toute classe non vide H d'êtres quelconques (appelés *vecteurs*) à condition que les axiomes suivants se trouvent vérifiés :

1° $$f + g = g + f; \qquad f + (g + h) = (f + g) + h;$$

si $f + g' = f + g''$, on a $g' = g''$; $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$;

$$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f; \qquad \lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f; \qquad 1.f = f,$$

f, g, h désignant des vecteurs et λ, μ des nombres réels quelconques.

$f + g$, λf représentent des opérations toujours exécutables et donnant des vecteurs : $f = g$ est une correspondance entre vecteurs et vecteurs appelée *égalité* et satisfaisant aux conditions usuelles : $f = f$: si $f = g$, on a $g = f$: si $f = g$ et $g = h$, il en résulte $f = h$.

2° $f + g$, λf sont des invariants par rapport à l'égalité des vecteurs et l'égalité des nombres.

Les axiomes 1° et 2° impliquent la possibilité de la *soustraction des vecteurs* et l'existence du *vecteur nul* θ (unique par rapport à la notion d'égalité), caractérisé par les formules

$$f + \theta = f; \qquad 0.f = \theta.$$

3° $[f, g] = [g, f]$: $[f, f] \geq 0$: $[f, f] = 0$ équivaut à $f = \theta$:

$$[\lambda f, g] = \lambda[f, g] : \qquad [f' + f'', g] = [f', g] + [f'', g].$$

4° L'opération $[f, g]$ toujours exécutable et donnant des nombres réels, est invariante par rapport à la notion de l'égalité des vecteurs.

2. En posant $\|f\| = \sqrt{[f, f]}$ et en appelant ce nombre *la norme de f*, on introduit la notion de *la limite d'une suite infinie de vecteurs*, en définissant

$$\overline{\lim}\, f_n = f$$

par la relation

$$\|f_n - f\| \to 0 \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

La notion de la limite une fois fixée, on peut se servir de la notion de la *séparabilité* et de celle de la *complétété* dans le sens admis dans la théorie des ensembles.

Voici maintenant deux lemmes fondamentaux qui vont servir de base pour le contenu du travail.

Lemme I (Généralisation d'un théorème de M. Zaremba). — *Soit* H′ *un sous-espace vectoriel de* H *et soit f un vecteur quelconque de* H. *Si l'on suppose que* H′ *est complet, il existe un vecteur (unique) f' tel que $f' \in$* H′ *et* $[f - f', g'] = 0$ *pour tout* $g' \in$ H′. On a $\|f'\| \leq \|f\|$.

Lemme II. — *Si* H⁰ *est un hyperplan de* H *(c'est-à-dire, si*

$f \in H^0$, $g \in H^0$, *on a aussi* $\frac{\lambda f + \mu g}{\lambda + \mu} \in H^0$ *pour tous les nombres réels* λ, μ, *où* $\lambda + \mu \neq 0$), *et, si* H^0 *est complet, il existe un vecteur unique* $h \in H^0$ *tel que* $\|h\|$ *est minimum*.

Nous n'aurons besoin de ces théorèmes que dans le cas où H est séparable et complet (1).

II. — Variété partout localement euclidienne.

1. Soit V un *espace topologique*, c'est-à-dire un ensemble non vide d'êtres quelconques que nous considérerons au point de vue des axiomes connus de M. F. Hausdorff (2).

D'une manière plus précise nous considérons une correspondance fixée Φ faisant correspondre à tout élément $P \in V$ une classe non vide φ_P de sous-ensembles de V, appelés *voisinages de* P et satisfaisant aux axiomes suivants :

1° Si $a \in \varphi_P$, on a $P \in a$;

2° Si $a \in \varphi_P$, $b \in \varphi_P$, il existe un voisinage c de P tel que $c \subset a.b$;

3° Si $a \in \varphi_P$, $Q \in a$, il existe un voisinage c de Q tel que $c \subset a$;

4° Si $P \in V$, $Q \in V$, $P \neq Q$, il existe des voisinages a, b où $a \in \varphi_P$, $b \in \varphi_Q$ tels que $a.b = 0$.

Toute correspondance Φ satisfaisant aux axiomes ci-dessus sera appelée *correspondance topoforme* pour V. C'est cette correspondance qui caractérise l'espace topologique. (Elle pourrait être considérée par définition comme l'espace même.)

Deux correspondances Φ, Ψ topoformes pour V s'appellent *équi-*

---

(1) Pour la démonstration *voir* par exemple mon travail : *Sur un théorème de M. S. Zaremba concernant les fonctions harmoniques* (à paraître dans le *Journ. de Math.*, t. XII, fasc. I, 1933).

La démonstration du lemme II (dans le cas de séparabilité paraîtra dans mon travail *Sur le principe du minimum* dans un des recueils mathématiques roumains où seront publiés les travaux du *IIe Congrès des Mathématiciens roumains*.

(2) Félix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig, 1914, p. 213.

valentes, si la condition suivante est satisfaite : quel que soit $P \in V$ et si $a \in \varphi_P$, il existe un voisinage $a' \in \psi_P$, tel que $a' \subset a$ et, si $b' \in \psi_P$, il existe un voisinage $b \in \varphi_P$, tel que $b \subset b'$.

Si deux correspondances topoformes sont équivalentes, elles représentent par définition le même espace topologique.

2. Supposons que l'espace $V = V_\Phi$ peut partout être métrisé localement de la manière euclidienne et plane. En voici la signification :

Il existe une correspondance topoforme Φ^0, équivalente à Φ, telle que tout voisinage de Φ^0 est homéomorphe à un cercle ouvert situé sur le plan euclidien. On peut attacher à tout voisinage φ de Φ^0 un cercle k ouvert, situé sur le plan euclidien et une correspondance d'homéomorphie $R(\varphi, k)$ entre les points de φ et ceux de k telle que, si φ_1 et φ_2 sont deux voisinages de Φ^0, où $\varphi_1 . \varphi_2 \neq 0$, les correspondances

$$R(\varphi_1, k_1)[R(\varphi_2, k_2)]^{-1}, \qquad R(\varphi_2, k_2)[R(\varphi_1, k_1)]^{-1}$$

sont des correspondances isométriques [1]. Ce sont des mouvemouvements euclidiens (conservant l'indicatrice, ou non). Cela étant posé, on peut à tout couple de points A, B situés dans un même voisinage φ de Φ^0 attacher un nombre $|A, B|$ appelé distance de A à B. En effet, on peut poser $|A, B|$ égal à la distance euclidienne des points a, b qui correspondent respectivement à A, B par la correspondance $R(\varphi, k)$. — *N. B.* Il faut fixer une longueur-unité pour pouvoir mesurer les segments rectilignes du plan euclidien. On a ainsi partout imposé à V une métrique plane locale et euclidienne.

3. Soient P_0 un point de V et ρ un nombre positif. Appelons *cercle normal centré en* P_0 *et de rayon* ρ l'ensemble de tous les points P tels que $|P, P_0| < \rho$, mais dans le cas où cet ensemble est homéomorphe à un cercle euclidien.

Or, on peut démontrer que, quel que soit P_0, il existe un nombre ρ_0 tel que, si $0 < \rho < \rho_0$, il existe un cercle normal centré

---

[1] On a ainsi une fonction « définie » pour tous les voisinages φ de Φ^0 et dont les « valeurs » sont des correspondances.

en P_0 et de rayon ρ. On vérifie sans peine qu'il existe une correspondance topoforme, équivalente à Φ et telle que tout voisinage soit un cercle normal. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite infinie $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ de points de V tende vers P_0 est qu'on puisse attacher à chaque cercle normal centré en P_0 un indice à partir duquel les points de la suite soient situés dans ce cercle.

Voilà en quoi s'exprime ce que V peut partout être métrisé localement de la manière euclidienne et plane.

4. Soit a^0 un cercle normal de la variété considérée. Appelons *système des coordonnées dans* a^0 toute fonction faisant correspondre d'une manière biunivoque et bicontinue à chaque point de a^0 un couple ordonné de nombres réels. Nous allons introduire une classe de systèmes des coordonnées pour tout cercle normal.

Soit a^0 un cercle normal et $R(a^0, k)$ la correspondance isométrique entre a^0 et le cercle euclidien k comme plus haut.

Choisissons dans le plan euclidien un système ordinaire des coordonnées rectangulaires et transformons-le de toutes les manières possibles au moyen des relations que voici :

$$\xi' = \alpha_{11}\xi + \alpha_{12}\eta + \alpha_{13},$$
$$\eta' = \alpha_{21}\xi + \alpha_{22}\eta + \alpha_{23},$$

où

$$\alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = 0, \qquad \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = 1,$$

les nombres α_{ik} étant réels. Soit Δ un des systèmes obtenus ainsi et soit (ξ'_p, η'_p) le couple des coordonnées du point p variable du cercle k (par rapport à Δ). Soit P le point bien déterminé de a^0 auquel correspond le point p. Or, attachons à P le couple des nombres $x_P = \xi'_p$, $y_P = \eta'_p$. On a obtenu ainsi un système local des coordonnées sur V. Les systèmes des coordonnées locaux qu'on peut obtenir de la manière indiquée s'appelleront *systèmes normaux des coordonnées sur* V.

5. Soient a^0, a_1^0 deux cercles normaux, tels que $a^0 . a_1^0 \neq 0$ et Γ^0, Γ_1^0 des systèmes normaux des coordonnées respectives dans a^0 et a_1^0. Disons que Γ^0 et Γ_1^0 *s'accordent bien*, s'il existe des constantes n, m telles que, quel que soit le point $B \in a^0 . a_0^1$

et (x, y), (x_1, y_1) ses coordonnées respectivement par rapport à Γ^0, Γ_1^0, on a

$$x_1 = x + m, \qquad y_1 = y + n.$$

On voit aisément que, si l'on se donne deux cercles normaux arbitraires a^0, a_1^0 tels que $a^0 . a_1^0 \neq 0$ et un système normal Γ^0 des coordonnées dans a^0, il existe toujours un système Γ_1^0 dans a_1^0 qui s'accorde bien avec Γ^0. Si x_1, y_1 sont des coordonnées variables pour a_1^0 s'accordant bien avec Γ^0, il en est de même pour $x_1 + m'$, $y_1 + n'$, où m', n' sont des constantes arbitraires.

Abstraction faite de ces constantes additives (d'une translation), le système Γ_1^0 est déterminé parfaitement par Γ^0.

6. Nous admettons encore deux axiomes concernant notre variété :

La variété est séparable.

La variété est connexe.

Il en résulte l'existence d'un nombre au plus dénombrable de cercles normaux recouvrant toute la variété V. Ces cercles peuvent être choisis de manière qu'aucun point $P \in V$ ne se trouve couvert par un nombre infini de ces cercles. Dans ce qui va suivre, les cercles en question seront désignés par $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Chaque a_n peut être pourvu d'une classe $\{\Gamma_{a_n}\}$ des systèmes des coordonnées normaux de manière que la condition suivante soit satisfaite : si l'on envisage une suite finie quelconque

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_\nu}$$

de cercles $\{a_n\}$, telle que

$$a_{i_k} . a_{i_{k+1}} \neq 0 \qquad (k = 1, \ldots, \nu - 1)$$

et, si l'on choisit arbitrairement un système Γ_1 appartenant à $\{\Gamma_{a_{i_1}}\}$ il existe des systèmes

$$\Gamma_k \in \{\Gamma_{a_{i_k}}\} \qquad (k = 2, \ldots, \nu)$$

tels que Γ_k et Γ_{k+1} s'accordent bien. En vertu de la séparabilité de V les classes $\{\Gamma_{a_n}\}$ peuvent être admises au plus dénombrables.

7. Pour donner des exemples des variétés à deux dimensions

qui peuvent être métrisées partout localement de la manière euclidienne, remarquons que toute surface de Riemann dans le sens propre du mot ([1]) est une telle surface. Le tore ordinaire peut de même être pourvu d'une métrique partout euclidienne. En effet, il est homéomorphe à la surface

$$x_1 = \cos\varphi, \qquad x_2 = \sin\varphi, \qquad x_3 = \cos\psi, \qquad x_4 = \sin\psi$$

plongée dans l'espace à quatre dimensions ([2]), et l'on a

$$dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 = d\varphi^2 + d\psi^2.$$

Le « ruban » de Mœbius en offre aussi un exemple. Remarquons qu'il est impossible d'attacher à la surface de la sphère ordinaire une métrique partout localement euclidienne.

III. — L'équation différentielle et ses invariants.

1. Soit donnée une variété V topologique à deux dimensions, séparable, connexe et pourvue d'une métrique partout localement euclidienne. Considérons un ensemble au plus dénombrable de cercles normaux $\{a_n\}$ couvrant V de manière que tout point ne soit contenu que dans un ensemble fini de ces cercles. Attachons à chacun des cercles a_n une classe $\{\Gamma_{a_n}\}$ de systèmes normaux des coordonnées rectangulaires s'accordant bien mutuellement conformément au n° 6 du paragraphe précédent.

Soit P_0 un point de V. Considérons l'équation différentielle partielle

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial U}{\partial y}\right) - qU = 0, \tag{1}$$

où $p(P)$, $q(P)$ sont des fonctions du point variable P de la

([1]) En ce qui concerne la définition précise d'une telle surface, *voir* mon travail : *Sur les surfaces de Riemann des fonctions analytiques d'une variable* (*Comptes rendus du Ier Congrès des Mathématiciens des pays slaves*, 1929; Varsovie, 1930, p. 159-165).

([2]) M. E. Cartan, à qui je dois cet exemple, a posé (pendant son cours, professé à la Sorbonne en 1926, sur la géométrie différentielle des espaces métriques de Riemann) le problème intéressant de déterminer toutes les variétés à *n* dimensions capables d'être partout métrisées localement d'une manière euclidienne.

variété, définies partout dans un certain voisinage de P_0. Supposons que $p(P)$ y est continu ainsi que les dérivées $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, la dérivation étant exécutée par rapport à un des systèmes normaux considérés des coordonnées locales. Quant à l'équation (1), on voit aisément qu'elle a un sens indépendant du choix du système normal des coordonnées. En effet, si l'on pose $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x'_1 = x'$, $x'_2 = y'$,

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^{2} a_{i\alpha} x'_\alpha + a_{i3} \qquad (i = 1, 2),$$

où $a_{i\beta}$ sont des nombres réels satisfaisant à la condition d'orthogonalité

$$\sum_{i=1}^{2} a_{i\alpha} a_{i\beta} = 0 \quad \text{ou} \quad 1,$$

suivant le cas, où $\alpha \neq \beta$ ou $\alpha = \beta$, on trouve que le membre gauche de (1) n'altère pas. En effet, on a, en se bornant aux fonctions U(P) continues ainsi que leurs dérivées partielles de deux premiers ordres,

$$(2) \qquad \frac{\partial U}{\partial x_i} = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial U}{\partial x'_\alpha} a_{i\alpha} \qquad (i = 1, 2),$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{\beta=1}^{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(p \frac{\partial U}{\partial x'_\alpha}\right) \sum_{i=1}^{2} a_{i\alpha} a_{i\beta}\right],$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p \frac{\partial U}{\partial x_i}\right) = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x'_\alpha}\left(p \frac{\partial U}{\partial x'_\alpha}\right)$$

Nous voyons ainsi que, si l'on a affaire aux fonctions $p(P)$, $q(P)$ et $U(P)$ définies dans un domaine ouvert de la variété V et suffisamment régulières, l'équation (1) possède un sens bien déterminé.

2. Remarquons que la forme différentielle

$$p\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right] + q U^2$$

représente aussi un invariant par rapport aux transformations locales et orthogonales. En effet, (2) implique :

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2=\sum_{\beta=1}^{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x'_\alpha}\frac{\partial U}{\partial x'_\beta}\sum_{i=1}^{2}a_{i\alpha}a_{i\beta}\right).$$

$$(3)\qquad \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)^2=\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x'_\alpha}\right)^2.$$

La relation (3) est valable lorsque p, q sont définies dans le voisinage en question et U y possède des dérivées premières continues. Mais on peut remarquer, et cela sera d'importance pour ce qui va suivre, que (3) subsiste presque partout dans un domaine plan, même si l'on ne suppose que les dérivées premières de U par rapport à x_1, x_2 et par rapport à x'_1, x'_2 existent presque partout et que la relation (2) a lieu aussi presque partout.

3. Convenons d'appeler *quasi harmonique* dans D toute fonction U(P) définie et continue dans D ainsi que ses dérivées partielles de deux premiers ordres et y satisfaisant partout à l'équation donnée (1).

IV. — Les fonctions (L_D).

1. Cela étant posé, considérons un domaine arbitraire ouvert et connexe D de la variété V. Supposons que $p(P)$, $q(P)$ sont définies presque partout dans D et que

$$q(P)\geq 0,\qquad 0<\alpha\leq p(P)\leq\beta,$$

où α, β sont des constantes positives. Désignons par (L_D) la classe de toutes les fonctions $f(P)$ définies presque partout dans D et jouissant des propriétés suivantes.

Quel que soit a_n, où $a_n.D\neq 0$ et le système Γ des coordonnées appartenant à la classe $\{\Gamma_{a_n}\}$ dont nous avons parlé plus haut, on a :

1° $f(P)$ est *absolument continue intérieurement* sur presque toute *droite relative à* $a_n.D$ *et* Γ. Par une droite relative à $a_n.D$ et Γ nous entendons tout ensemble $l.a_nD$, où l est une droite parallèle aux axes du système Γ, mais à condition que $l.a_n.D\neq 0$.

Le terme « presque toute droite relative » $x = \xi$, où $y = \eta$, n'exige pas de définition. « $f(P)$ est absolument continue intérieurement sur la droite relative $x = \xi$ » exprime par définition que, si l'on envisage un segment droit et fermé contenu dans $a_n . D$ et situé sur la droite $x = \xi$, $f(P)$ y est absolument continue dans le sens de G. Vitali, si l'on ne considère $f(P)$ que sur ce segment.

2° Les dérivées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent presque partout dans $a_n . D$ et y sont sommables avec leur carré.

3° Si Γ' et Γ'' sont deux systèmes de coordonnées appartenant à $\{\Gamma_{a_n}\}$, et si le passage de Γ' à Γ'' s'exprime par les formules

$$x'' = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}, \qquad y'' = a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23},$$

on a presque partout, dans $a_n . D$,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x''} a_{11} + \frac{\partial f}{\partial y''} a_{21}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x''} a_{12} + \frac{\partial f}{\partial y''} a_{22}.$$

4° L'intégrale $\int\int_{a_p . D} q f^2 \, d\omega$ existe.

5° Si l'on considère l'ensemble de tous les domaines ouverts $b_1, b_2, \ldots, b_m, \ldots$ maximaux et contenus dans

$$D - \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{F} a_n,$$

où $\mathfrak{F} a_n$ désigne la frontière de a_n, la somme

$$(1) \qquad \sum_m \int\int_{b_m} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \right] + q f^2 \right\} d\omega$$

converge dans le cas où elle est infinie.

2. Remarquons que, d'après ce qui précède, le nombre non négatif (1) ne dépend pas du choix des systèmes des coordonnées dans les cercles a_n, à condition que ces systèmes appartiennent à $\{\Gamma_{a_n}\}$. On démontre aussi que (1) ne dépend pas du choix du système a_n de cercles normaux qui couvrent la variété V. C'est

seulement la métrique et les systèmes des coordonnées qui y jouent un rôle ([1]).

3. On peut démontrer que la série

$$[f, g]_D \underset{df}{=} \sum_m \int\int_{b_m} \left\{ p \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} \right] + q\, fg \right\} d\omega$$

converge absolument si f et g appartiennent à (L_D). Il en résulte que, si $f \in (L_D)$, $g \in (L_D)$, il en est de même pour $f+g$ et pour λf, où λ est une constante réelle arbitraire.

Posons

$$\|f\|_D \underset{df}{=} \sqrt{[f, f]_D}$$

et convenons de dire que deux fonctions f, g de la classe (L_D) sont « égales » : $f \doteq g$, si

$$\|f - g\|_D = 0.$$

On démontre sans peine que la condition nécessaire pour que l'on ait $f \doteq g$ pour deux fonctions f, g de (L_D) est que f soit égale presque partout à $g +$ const. dans D. Cette condition est aussi suffisante dans le cas où $q = 0$ presque partout dans D. Dans le cas contraire, la condition nécessaire et suffisante est $f = g$ presque partout dans D.

V. — L'espace de M. Hilbert attaché à l'équation différentielle et au domaine D.

1. La classe (L_D) peut être considérée comme une réalisation de l'espace vectoriel abstrait et réel de M. Hilbert. En effet, $[f, g]_D$ constitue le *produit scalaire* de deux vecteurs f, g; $f + g$ représente la *somme* et $\lambda . f$ la *multiplication* du vecteur f par le nombre réel λ.

Si l'on considère l'égalité « $f \doteq g$ » comme une interprétation de l'égalité des vecteurs f, g, on vérifie aisément que les axiomes du paragraphe I sont des propositions vraies.

2. L'espace vectoriel (L_D) est séparable. Démontrons qu'il est

---

([1]) La classe (L_D) représente une analogie avec la classe de fonctions que j'ai introduite dans le travail cité, concernant le principe du minimum.

complet. Supposons donc que

$$(1) \qquad \lim_{n,m\to\infty} \| f_n - f_m \|_D = 0 ;$$

il s'agit de démontrer l'existence d'une fonction $f \in (L_D)$ telle que

$$\| f_n - f \|_D \to 0 \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

D'après (1) on a, dans le cas où $a_\nu . D \neq 0$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$:

$$\lim_{n,m\to\infty} \int\!\!\int_{a_\nu . D} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial (f_n - f_m)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (f_n - f_m)}{\partial y} \right)^2 \right] + q (f_n - f_m)^2 \right\} d\omega = 0.$$

Il en résulte [1] qu'il existe dans $a_\nu . D$ une fonction $f(P)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \int\!\!\int_{a_\nu . D} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial (f_n - f)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (f_n - f)}{\partial y} \right)^2 \right] + q (f_n - f)^2 \right\} d\omega = 0.$$

La fonction $f(P)$ jouit des propriétés suivantes :

1° Elle est définie presque partout dans $a_\nu . D$.

2° Elle est absolument continue intérieurement sur presque chaque droite relative à $a_\nu . D$ et par rapport à chaque système des coordonnées appartenant à $\{\Gamma_{a_\nu}\}$.

3° L'intégrale

$$\int\!\!\int_{a_\nu . D} \left\{ p \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right] + q f^2 \right\} d\omega$$

existe pour tout $\{\Gamma_{a_\nu}\}$.

4° Pour tout domaine D' connexe contenu dans $a_\nu . D$, il existe une suite de constantes $\{\alpha_n\}$ telle que $f_n + \alpha_n$ tend, en moyenne carrée ordinaire, vers f dans tout ensemble fermé contenu dans D'. Pour qu'une suite $\{\beta_n\}$ jouisse de la même propriété (dans D'), il faut et il suffit que $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n - \beta_n) = 0$.

5° Si Γ' et Γ'' sont deux systèmes des coordonnées de la classe $\{\Gamma_{a_\nu}\}$ et si les formules

$$x'' = a_{11} x' + a_{12} y' + a_{13}, \qquad y'' = a_{21} x' + a_{22} y' + a_{23}$$

---

[1] On peut trouver les moyens suffisants pour le démontrer dans mon travail suivant : ***Sur une classe de fonctions considérées dans l'étude du problème de Dirichlet*** (à paraître dans les ***Fund. Math.***, t. 21).

représentent le passage de Γ' à Γ'', on a presque partout, dans $D.a._v$,

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x''} a_{11} + \frac{\partial f}{\partial y''} a_{21}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x''} a_{12} + \frac{\partial f}{\partial y''} a_{22}.$$

Ces propriétés nous permettent de démontrer qu'il existe une fonction $f(P)$ uniforme et définie presque partout dans D jouissant des propriétés 1°, 2°, 3°, 4° spécifiées dans le paragraphe précédent.

3. Pour démontrer que $f \in (L_D)$, il suffit de démontrer la propriété 5°.

Posons d'une manière générale :

$$[g, h]_E \underset{df}{=} \int\int_E \left\{ p \left[\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right] + qgh \right\} d\omega,$$

$$\| g \|_E \underset{df}{=} \sqrt{[g, g]_E},$$

dans le cas où ces expressions ont un sens bien déterminé; E désigne un ensemble mesurable, d'ailleurs quelconque.

La supposition (1) peut s'exprimer :

$$(2) \qquad \lim_{n, m \to \infty} \sum_{\nu=1} \| f_n - f_m \|^2_{b_\nu} = 0.$$

Nous ne considérerons que le cas où la somme est infinie, parce que le cas contraire est évident.

La série

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \| f_n \|^2_{b_\nu}$$

converge pour tout n et l'on a

$$(3) \qquad \| f_n - f \|^2_b \to 0 \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Supposons que

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \| f \|^2_{b_\nu}$$

diverge. Alors, quel que soit $N > 0$, il existe des indices $\alpha < \beta$ tels que

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta} \| f \|^2_{b_\nu} > N.$$

Mais on trouve sans peine que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=\alpha}^{\beta}\|f_n\|_{b_\nu}^2=\sum_{\nu=\alpha}^{\beta}\|f\|_{b_\nu}^2.$$

Donc, pour n suffisamment grand, on a

$$\sum_{\nu=\alpha}^{\beta}\|f_n\|_{b_\nu}^2>\frac{N}{2}.$$

Il en résulte qu'il existe une suite partielle k_n d'indices telle que

$$\|f_{k_n}\|_{\mathrm{D}}\to\infty \qquad \text{pour} \quad n\to\infty.$$

Mais cette conclusion peut être aisément amenée à une contradiction avec (2). La fonction f appartient ainsi à $(\mathrm{L}_{\mathrm{D}})$.

4. Il reste à démontrer que

$$\|f_n-f\|_{\mathrm{D}}\to 0.$$

Pour démontrer cela, supposons le contraire. On peut évidemment supposer, sans restreindre la généralité, que

$$(4)\qquad \|f_n-f\|_{\mathrm{D}}>\sigma>0 \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Soit $\varepsilon>0$. En vertu de l'hypothèse, il existe un nombre μ tel que les inégalités $n>\mu$, $m>\mu$ entraînent

$$(5)\qquad \|f_n-f_m\|_{\mathrm{D}}<\varepsilon.$$

D'après (4), il existe un ensemble F égal à la somme d'un nombre fini d'ensembles b_ν, tel que

$$(6)\qquad \|f_n-f\|_{\mathrm{F}}>\frac{\sigma}{2}.$$

De (3) il résulte que

$$\lim_{m\to\infty}\|f_m-f\|_{\mathrm{F}}=0;$$

donc il existe un nombre $m>n$ tel que

$$(7)\qquad \|f_m-f\|_{\mathrm{F}}<\varepsilon.$$

De (6) et (7), il suit que

$$\|f_n-f_m\|_{\mathrm{E}}\geqq\|f_n-f\|_{\mathrm{F}}-\|f_m-f\|_{\mathrm{F}}>\frac{\sigma}{2}-\varepsilon,$$

ce qui entraîne

$$\|f_n - f_m\|_D \geqq \frac{\sigma}{2} - \varepsilon.$$

En tenant compte de (5), on en obtient $\frac{\sigma}{2} - \varepsilon < \varepsilon$, donc $\varepsilon > \frac{\sigma}{4}$, ce qui est impossible, si l'on choisissait $\varepsilon < \frac{\sigma}{4}$. Nous avons ainsi démontré que

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_D = 0.$$

En résumant, nous pouvons affirmer que l'espace (L_D) est complet.

VI. — Hypothèses du théorème d'existence.

1. Soit S un domaine ouvert de la variété V homéomorphe à un domaine plan et borné.

Soit la frontière $\mathcal{F}$S de S une courbe simple fermée à tangente continue. Soit $\Phi(P)$ une fonction définie et quasi harmonique dans le voisinage de tout point de $\mathcal{F}$S.

Supposons que

$$\frac{d\Phi}{dN} = 0 \tag{1}$$

partout sur $\mathcal{F}$S, où N désigne la direction de la normale intérieure à la courbe $\mathcal{F}$S. Par exemple, $\Phi(P)$ peut être une fonction quasi harmonique dans $\overline{S}$, sauf un ensemble de points de S, où elle peut avoir des singularités prescrites. Si l'équation différentielle est celle de Laplace et si l'on pose [1]

$$\Phi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x}{\rho^2},$$

où ρ désigne le rayon du cercle S centré en (0, 0), les hypothèses sont satisfaites.

Admettons de plus les hypothèses suivantes concernant notre équation différentielle :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\,\frac{\partial U}{\partial y}\right) - q\,U = 0. \tag{2}$$

---

[1] *Voir* H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig et Berlin, 1913, p. 92).

II. On a

$$0 < \alpha < p(\mathrm{P}) < \beta, \qquad 0 \leqq q(\mathrm{P}) < \gamma,$$

partout dans V, où α, β, γ sont des constantes.

$p(\mathrm{P})$ est définie et continue partout dans V ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres. $q(\mathrm{P})$ est continue dans V.

III. Quel que soit le point $\mathrm{A}_0 \in \mathrm{V}$, il existe au voisinage de A_0 une solution principale [1] de (2)

$$\mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{P}) = \mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{P}) \log |\mathrm{A}, \mathrm{P}| + \mathrm{N}(\mathrm{A}, \mathrm{P}),$$

où :

1°
$$\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \frac{1}{p(\mathrm{A})}$$

dans le voisinage de $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$;

2° $\mathrm{M}(\mathrm{A}, \mathrm{P})$, $\mathrm{N}(\mathrm{A}, \mathrm{P})$ sont continues dans le voisinage de $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$, $\mathrm{P} = \mathrm{A}_0$, ainsi que leurs dérivées partielles jusqu'au troisième ordre;

3° $|\mathrm{A}, \mathrm{P}|$ désigne la distance de A à P;

4° $\mathrm{H}(\mathrm{A}, \mathrm{P})$, considérée comme une fonction du point P et du paramètre A, satisfait à l'équation (2) dans le voisinage de $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0$, $\mathrm{P} = \mathrm{A}_0$, sauf les points $\mathrm{A} = \mathrm{P}$.

IV. Quel que soit le point $\mathrm{A} \in \mathrm{V}$ et le nombre $\varepsilon > 0$, il existe un cercle [2] Σ centré en A et de rayon inférieur à ε tel que le deuxième problème des limites est résoluble pour Σ dans le sens que voici.

Si $\lambda(x, y)$ est un polynome (satisfaisant à la condition

$$\int_{\mathcal{F}\Sigma} p\lambda\, ds = 0$$

dans le cas où $q = 0$ partout dans Σ), il existe une fonction $\mathrm{F}(\mathrm{P})$ satisfaisant à l'équation (2) dans Σ, continue ainsi que ses dérivées premières dans le cercle fermé $\overline{\Sigma}$ possédant les dérivées deuxièmes

---

[1] En ce qui concerne l'existence de la solution principale, *voir* p. ex. E. E. LEVI, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittique alle derivate parziali* (*Rend. di Palermo*, t. 24, 2e sem. 1907).

[2] Le cercle Σ peut être remplacé par une courbe quelconque suffisamment petite et régulière.

continues et bornées dans Σ et satisfaisant à la condition

$$\frac{dF}{dN} = \lambda$$

partout sur $\mathfrak{F}\Sigma$ (où N désigne la direction de la normale intérieure à $\mathfrak{F}\Sigma$).

Remarquons que dans le cas de l'équation de Laplace les hypothèses II, III et IV sont satisfaites.

VII. — Théorème d'existence.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Si V *représente une variété topologique à deux dimensions, séparable connexe et pourvue d'une métrique partout localement euclidienne, si les hypothèses* I, II, III, IV *sont satisfaites, alors il existe une fonction* $U^*(P)$ *définie dans* $V - S$, *sur* $\mathfrak{F}S$ *et dans tous les points de* S *ou* $\Phi(P)$ *est définie, et jouissant des propriétés suivantes :*

1° $U^*(P)$ *est uniforme partout où elle est définie et quasi harmonique dans* $V - S$ *et au voisinage de tout point de* $\bar{S}$, *où* $\Phi(P)$ *est quasi harmonique ;*

2° *Il existe une fonction* $W(P)$, *quasi harmonique dans* S *et au voisinage de tout point de* $\mathfrak{F}S$, *telle que*

$$U^*(P) = \Phi(P) + W(P)$$

dans chaque point de $\bar{S}$, *où* $\Phi(P)$ *est définie.*

Démonstration :

1. D'après l'hypothèse I du paragraphe VI, il existe deux domaines S' et S'' ouverts dont les frontières $\mathfrak{F}S'$, $\mathfrak{F}S''$ sont des courbes simples fermées et tels que

1° $\bar{S}' \subset S$, $\bar{S} \subset S''$;

2° S'' est homéomorphe à un domaine plan ; $\mathfrak{F}S''$ possède la tangente continue ;

3° $\Phi(P)$ est quasi harmonique au voisinage de tout point de la couronne $\overline{S'' - S'}$.

Considérons la classe (z) de toutes les fonctions $G(P)$ définies presque partout dans V et satisfaisant aux conditions suivantes :

— $G(P)$ est du type L_S si l'on ne la considère que dans S.
— $G(P)$ est du type $L_{V-\bar{S}}$, si l'on ne la considère que dans $V-\bar{S}$.

La classe (z) n'est pas vide, parce que la fonction égale partout à zéro y appartient assurément.

Étant données deux fonctions $G_1(P)$ et $G_2(P)$ de (z), posons

$$(1) \qquad |G_1, G_2| \underset{\mathrm{df}}{=} |G_1, G_2|_S + |G_1, G_2|_{V-\bar{S}},$$

les symboles spécifiés dans le second membre ayant la signification introduite plus haut. Posons aussi

$$(2) \qquad \|G\| \underset{\mathrm{df}}{=} \sqrt{|G, G|}.$$

Il est aisé de voir que, les définitions (1), (2) admises, on peut considérer (z) comme un espace réel de M. Hilbert, où (1) désigne le produit scalaire de deux « vecteurs » G_1, G_2.

Deux fonctions sont « égales » suivant la norme (2) dans le cas et, seulement dans le cas, où elles sont égales suivant la norme $\|\ldots\|_S$ et suivant la norme $\|\ldots\|_{V-\bar{S}}$. L'espace (z) est séparable et complet, ce qu'il est aisé de vérifier.

2. Nous allons définir maintenant un sous-ensemble (z') linéaire de (z) représentant l'analogie d'un hyperplan de l'espace ordinaire à un nombre fini de dimensions.

Considérons la classe (z') de toutes les fonctions $G(P)$ de (z) telles que : il existe une fonction $\tilde{G}(P)$ du type $L_{S''}$ satisfaisant dans $S''-\bar{S}$ à l'équation

$$G(P) - \tilde{G}(P) \stackrel{\lambda}{=} \Phi(P),$$

l'égalité étant relative à la norme $\|\ldots\|_{S''-\bar{S}}$ et satisfaisant dans S, à l'équation

$$G(P) - \tilde{G}(P) \stackrel{\lambda}{=} 0,$$

l'égalité étant relative à la norme $\|\ldots\|_S$. Démontrons d'abord que la classe (z') n'est pas vide. Dans ce but prenons un quatrième domaine S''' dont la frontière $\mathcal{F}S'''$ est une courbe simple fermée, à tangente continue et que 1° $S'' \subset S'''$; 2° $S''' - \bar{S}''$ est homéomorphe à un anneau circulaire et plan.

Posons $G'(P) = 0$ partout dans $V - S'''$ et dans S, $G'(P) = \Phi(P)$ dans $\bar{S}'' - \bar{S}$. La fonction $G'(P)$ est partout égale à 0 sur la courbe $\mathcal{F}S'''$ et égale à $\Phi(P)$ sur $\mathcal{F}S''$. En résolvant le problème de Dirichlet ordinaire pour la couronne $S''' - S''$ et pour l'équation $\Delta U = 0$, on obtient dans cette couronne une fonction qui, composée avec les fonctions déjà définies dans $V - S'''$, S et dans $\bar{S}'' - \bar{S}$, donne une fonction du type (z). Si l'on pose $\tilde{G}'(P) = 0$ dans S'', on voit que $G'(P)$ appartient à (z').

Nous avons ainsi montré que (z') n'est pas vide.

3. Soit maintenant $G_1 \in (z')$, $G_2 \in (z')$ et soient λ, μ deux nombres réels tels que $\lambda + \mu \neq 0$.

Posons

$$G \underset{\mathrm{df}}{=} \frac{\lambda G_1 + \mu G_2}{\lambda + \mu}.$$

G appartient évidemment à (z). Pour montrer que $G \in (z')$, considérons des fonctions $\tilde{G}_1$, $\tilde{G}_2$ qui correspondent respectivement à G_1 et G_2.

On a

$$\begin{aligned} &G_1 - \tilde{G}_1 \stackrel{\cdot}{=} \Phi, && G_2 - \tilde{G}_2 \stackrel{\cdot}{=} \Phi && \text{dans } S'' - S, \\ &G_1 - \tilde{G}_1 \stackrel{\cdot}{=} 0, && G_2 - \tilde{G}_2 \stackrel{\cdot}{=} 0 && \text{dans } S. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$\tilde{G} \underset{\mathrm{df}}{=} \frac{\lambda \tilde{G}_1 + \mu \tilde{G}_2}{\lambda + \mu},$$

on voit que $\tilde{G} \in L_{S''}$ et, en outre,

$$\begin{aligned} &G - \tilde{G} \stackrel{\cdot}{=} \Phi && \text{dans } S'' - S, \\ &G - \tilde{G} \stackrel{\cdot}{=} 0 && \text{dans } S \end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré que (z') est un ensemble linéaire.

4. Démontrons que (z') est complet, ou, ce qui revient ici au même, que (z') est fermé. Soient G_1, G_2, ..., G_n, ..., une suite

infinie de fonctions de (z') tendant vers G suivant la norme $\|\ldots\|$ attachée à l'espace (z). Soient $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots, \tilde{G}_n, \ldots$, des fonctions correspondant respectivement à $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$.

Posons

$$(3) \quad \begin{cases} \tilde{G}_0(P) \underset{\mathrm{df}}{=} G(P) & \text{dans } S \\ \tilde{G}_0(P) = G(P) - \Phi(P) & \text{dans } S'' - \overline{S}. \end{cases}$$

On a

$$(4) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \| G_n - G \|_S = 0, \\ \lim\limits_{n \to \infty} \| G_n - G \|_{V - \overline{S}} = 0, \end{cases}$$

d'où

$$(5) \quad \lim_{n \to \infty} \| G_n - G \|_{S'' - \overline{S}} = 0.$$

Comme

$$\tilde{G}_n(P) \stackrel{*}{=} G^n(P) \qquad \text{dans } S,$$

$$\tilde{G}_n(P) \stackrel{*}{=} G_n(P) - \Phi(P) \qquad \text{dans } S'' - \overline{S},$$

il résulte de (3), (4) et (5) :

$$(6) \quad \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}_0(P) \|_S = 0, \\ \lim\limits_{n \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}_0(P) \|_{S'' - \overline{S}} = 0, \end{cases}$$

la norme étant un invariant par rapport à « l'égalité ».

Il en résulte :

$$\lim_{n, m \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}_m(P) \|_S = 0,$$

$$\lim_{n, m \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}_m(P) \|_{S'' - \overline{S}} = 0.$$

d'où

$$\lim_{n, m \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}_m(P) \|_{S''} = 0,$$

ce qui entraine l'existence d'une fonction $\tilde{G}(P)$ du type $L_{S''}$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}(P) \|_{S''} = 0.$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}(P) \|_S = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \| \tilde{G}_n(P) - \tilde{G}(P) \|_{S'' - S} = 0.$$

En tenant compte de (6) et de l'unicité de la limite d'une suite infinie convergente suivant la norme, on trouve

$$\tilde{G}(P) \doteq \tilde{G}_0(P) \qquad \text{dans } S \text{ et } S'' - \overline{S}.$$

Par conséquent, en tenant compte de (3), on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{G}(P) &\doteq G(P) && \text{dans } S, \\ \tilde{G}(P) &\doteq G(P) - \Phi(P) && \text{dans } S'' - \overline{S}. \end{aligned}$$

La fonction $G(P)$ appartient donc à (z'), ce qu'il fallait démontrer.

5. Appliquions maintenant à (z') le théorème fondamental II (§ I) concernant l'espace de M. Hilbert. Il existe donc une fonction $M(P)$ appartenant à (z') et rendant parmi toutes les fonctions de (z') la norme $\|M(P)\|$ minimum.

Pour démontrer que $M(P)$ est dans $V - \overline{S}$ « égale » à une fonction quasi harmonique et qu'il en est de même pour le domaine S, on peut se servir précisément de la même méthode que j'ai employée dans mon travail cité concernant le principe du minimum.

En renvoyant le lecteur au dit travail je me contente de remarquer que c'est le lemme fondamental I du paragraphe I qui sert de base à la démonstration. Les hypothèses II et III du paragraphe VI permettent de démontrer que l'ensemble de fonctions « égales » aux fonctions quasi harmoniques dans les domaines en question forment un sous espace complet de l'espace de M. Hilbert.

Le lemme II permet de remplacer $M(P)$ au voisinage de n'importe quel point du domaine considéré par une fonction quasi harmonique qui, en vertu de l'hypothèse IV du paragraphe VI, s'accorde bien avec le reste de la fonction $M(P)$. L'unicité du minimum implique alors que la fonction changée est « égale » à $M(P)$.

6. La fonction $M(P)$ étant du type (z'), il existe une fonction $\tilde{M}(P)$ du type $L_{S''}$ et telle que

$$(7) \quad \begin{cases} M(P) - \tilde{M}(P) \doteq \Phi(P) & \text{dans } S'' - S, \\ M(P) - \tilde{M}(P) \doteq 0 & \text{dans } S. \end{cases}$$

La fonction $\overline{M}(P)$ étant absolument continue intérieurement sur presque toute droite relative à S'' et par rapport à n'importe quel système des coordonnées admises, de plus, la fonction $\Phi(P)$ étant aux dérivées premières continues dans $S'' - \overline{S}'$, il s'ensuit que $M(P)$ considérée dans $S'' - \overline{S}$, et $M(P) + \Phi(P)$ considérée dans $S - \overline{S}'$, admettent des valeurs limites et frontières sur $\mathcal{F}S$ bien déterminées, si l'on s'y approche sur les droites en question. En vertu de (7) ces valeurs limites sont sur $\mathcal{F}S$ presque partout égales. Donc si l'on définit une fonction dans $S'' - \overline{S}'$ en la posant identique à $M(P)$ dans $S'' - S$ et identique à $M(P) + \Phi(P)$ dans $S - \overline{S}'$, et si on la définit sur $\mathcal{F}S$ en la posant identique presque partout aux valeurs limites et frontières en question, on obtient une fonction absolument continue intérieurement dans la couronne $S'' - S'$ sur presque toute droite relative à $S'' - \overline{S}'$.

Posons

$$U(P) \underset{\text{df}}{=} \begin{cases} M(P) + \Phi(P) & \text{dans } \overline{S}, \\ M(P) & \text{dans } V - S. \end{cases}$$

$U(P)$ considérée dans $V - \overline{S}'$ est une fonction du type $L_{V-\overline{S}'}$.

En imitant le raisonnement employé dans le livre cité de M. Weyl [1] nous allons démontrer que $U(P)$ est égale suivant la norme $\|\ldots\|_{V-\overline{S}'}$ à une fonction quasi harmonique dans $V - \overline{S}'$.

Elle l'est assurément au voisinage [2] de tout point de $V - \overline{S}$ et au voisinage de tout point de $S - \overline{S}'$, parce que M et Φ sont égales aux fonctions quasi harmoniques.

Il ne reste qu'à examiner ce qui se passe au voisinage d'un point arbitraire P_0 situé sur $\mathcal{F}S$.

7. Soit donc $P_0 \in \mathcal{F}S$. Traçons autour de P_0 un petit cercle Σ, où $\overline{\Sigma} \subset S'' - \overline{S}'$. La fonction $U(P)$ étant du type L_Σ dans Σ, il existe une fonction quasi harmonique $U_0'(P)$ dans Σ et admettant à la frontière $\mathcal{F}\Sigma$ les mêmes valeurs limites et frontières que $U(P)$

---

(1) p. 94-95.

(2) C'est-à-dire il existe un voisinage $\mathcal{E}$ du point en question que l'égalité a lieu par rapport à la norme $\|\ldots\|_{\mathcal{E}}$.

si l'on s'y approche sur presque chaque droite relative à Σ et par rapport à un système donné des coordonnées admises. L'existence d'une telle fonction est établie à l'aide du principe du minimum dans mon travail cité. Cette fonction est du type L_Σ.

On peut démontrer sans peine qu'elle est absolument continue non seulement dans l'intérieur de presque toute droite relative à Σ, mais aussi sur presque toute droite relative à Σ entière. Donc si l'on définit une fonction, en la posant dans Σ identique à cette fonction quasi harmonique et identique dans $V - \Sigma$ à $U(P)$, et si on la définit sur $\mathfrak{F}\Sigma$ en lui attribuant des valeurs limites et frontières en question, on obtient une fonction absolument continue intérieurement sur presque toute droite relative à $S'' - S'$. Remarquons que, si $U(P)$ n'était pas « égale » à une fonction quasi harmonique au voisinage de P_0, on aurait nécessairement

$$\| U'_0 \|_\Sigma < \| U \|_\Sigma .$$

8. Supposons qu'il existe un point $P_0 \in \mathfrak{F}S$ tel que $U(P)$ n'est pas « égale » à une fonction quasi harmonique au voisinage de P_0. On a donc

$$\| U'_0 \|_\Sigma < \| U \|_\Sigma . \tag{8}$$

Formons la fonction auxiliaire

$$N(P) = \begin{cases} U'_0(P) - \Phi(P) & \text{dans } \Sigma.(S - S'), \\ U'_0(P) & \text{dans } \bar{\Sigma}.(S'' - \bar{S}), \\ M(P) & \text{dans le reste de la variété } V. \end{cases}$$

La fonction $N(P)$ appartient, si l'on y attribue sur $\mathfrak{F}\Sigma$ des valeurs limites et frontières dont nous avons parlé dans le numéro précédent, au type (σ'). En effet elle est du type L_S dans S en vertu de ce que nous avons dit dans le numéro 6; elle est aussi du type L_{V-S} dans $V - S$. Si l'on pose

$$\tilde{N}(P) \underset{\mathrm{df}}{=} N(P) \qquad \text{dans } S,$$

$$\hat{N}(P) \underset{\mathrm{df}}{=} N(P) - \Phi(P) \qquad \text{dans } S'' - \bar{S},$$

et qu'on y attribue sur $\mathfrak{F}S$ des valeurs limites et frontières aisées à préciser, on trouve que $\tilde{N}(P)$ est du type $L_{S''}$. De plus $\tilde{N}(P)$ est la fonction correspondant à $N(P)$ conformément à la définition de la classe ($\mathfrak{z}'$).

Nous allons démontrer que $\|N\| < \|M\|$. En effet, on a (¹)

$$\begin{aligned}\|N\|_\Sigma^2 &= \|U'_0 - \Phi\|^2_{\Sigma.S} + \|U'_0\|^2_{\Sigma.(V-S)}\\ &= \|U'_0\|^2_{\Sigma.S} + \|U'_0\|^2_{\Sigma.(V-\bar{S})} + \|\Phi\|^2_{\Sigma.S} - 2[U'_0, \Phi]_{\Sigma.S},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|M\|_\Sigma^2 &= \|U - \Phi\|^2_{\Sigma.S} + \|U\|^2_{\Sigma.(V-\bar{S})}\\ &= \|U\|^2_{\Sigma.S} + \|U\|^2_{\Sigma.(V-\bar{S})} + \|\Phi\|^2_{\Sigma.S} - 2[U, \Phi]_{\Sigma.S},\end{aligned}$$

d'où

$$\|M\|^2_\Sigma - \|N\|^2_\Sigma = \|U\|^2_\Sigma - \|U'_0\|^2_\Sigma - 2[U - U'_0, \Phi]_{\Sigma.S}.$$

Mais on peut montrer que

$$[U - U'_0, \Phi]_{\Sigma.S} = \int_{\mathcal{F}(\Sigma.S)} p(U - U'_0)\frac{d\Phi}{dN_i}\, dS,$$

N_i désignant la normale intérieure.

Or, sur la partie du contour $\mathcal{F}(\Sigma.S)$ se trouvant sur $\mathcal{F}S$, la dérivée $\frac{d\Phi}{dN}$ s'évanouit d'après l'hypothèse I du paragraphe VI. Dans la deuxième partie du contour, on a $U = U'_0$ presque partout.

Par conséquent

$$[U - U'_0, \Phi]_{\Sigma.S} = 0.$$

Il en résulte que

$$\|M\|^2_\Sigma - \|N\|^2_\Sigma = \|U\|^2_\Sigma - \|U'_0\|^2_\Sigma,$$

donc, en vertu de (8),

$$\|N\|^2_\Sigma < \|M\|^2_\Sigma, \qquad \text{d'où} \qquad \|N\|^2 < \|M\|^2.$$

Mais, en vertu de l'unicité du minimum, on doit avoir nécessairement $N = M$ par rapport à la norme attachée à ($\mathfrak{z}$). Donc $\|N\| = \|M\|$ contrairement à l'inégalité obtenue.

Nous avons ainsi démontré que $U(P)$ est partout localement égale dans $V - S'$ à une fonction quasi harmonique. Il en résulte que $U(P)$ est « égale » à une fonction quasi harmonique dans $V - S'$. Par conséquent il existe une fonction $U^*(P)$ définie partout dans V

(¹) $\|N\|^2_\Sigma$ désigne : $\|N\|^2_{\Sigma.S} + \|N\|^2_{\Sigma.(V-S)}$.

telle que : 1° $U^*(P) - \Phi(P)$ est quasi harmonique au voisinage de tout point du domaine fermé $\overline{S}$; 2° $U^*(P)$ est quasi harmonique au voisinage de tout point du domaine fermé $V - S$.

Le théorème est donc démontré.

En particulier, nous avons ainsi démontré l'existence d'un « potentiel » uniforme sur toute la variété V et possèdant dans un point P_0 arbitrairement choisi la singularité prescrite d'un dipol magnétique. En effet les hypothèses II, III et IV sont vérifiées, la solution principale étant le logarithme de la distance.

On voit sans peine que la méthode s'applique aussi à l'espace à un nombre fini quelconque de dimensions pourvu partout d'une métrique localement euclidienne.

Remarquons que, si l'on remplace le groupe des mouvements locaux euclidiens par celui des transformations conformes, on démontre par la même méthode l'existence d'un potentiel sur une surface abstraite de Riemann-Klein-Weyl quelconque.