BULLETIN DE LA S. M. F.

H. MILLOUX

Sur le théorème de Picard

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 181-207
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__181_0>

SUR LE THÉORÈME DE PICARD ;

PAR M. H. MILLOUX.

La théorie des familles normales de fonctions a conduit MM. Montel et Julia à de nombreuses propriétés des fonctions uniformes aux environs d'un point singulier essentiel.

En utilisant le théorème de Schottky et une inégalité due à M. Carleman, j'ai obtenu dans ma thèse des propriétés générales des fonctions méromorphes à valeur asymptotique. De ces propositions découlent, en particulier, certains théorèmes établis par M. G. Julia.

Je me propose, dans cet article, d'établir, en utilisant le théorème de M. Landau, l'existence de ce que j'ai appelé des *cercles de remplissage*. Dans ces cercles, la fonction méromorphe à valeur asymptotique $Z = \varphi(z)$ *remplit* des régions de plus en plus étendues du plan des Z, à mesure que l'on se rapproche du point à l'infini; l'étendue de ces régions, et les rayons des cercles de remplissage, dépendent simplement de la manière dont la fonction $\varphi(z)$ tend vers sa valeur asymptotique sur le chemin de détermination.

La méthode employée ici permet de préciser et d'étendre les divers résultats déjà trouvés, notamment en ce qui concerne le nombre des racines de l'équation $\varphi(z) - a = 0$ dans un cercle de remplissage.

Les principaux résultats de cet article ont été résumés dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, le 16 mars 1925.

1. Rappelons et précisons certaines propositions sur les fonctions holomorphes dans un cercle, et admettant deux valeurs exceptionnelles.

Le théorème suivant, de M. Landau, est à ce sujet d'une importance capitale :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, *où elle ne prend pas les valeurs zéro et un. Elle satisfait, dans le cercle* $|z| = \rho < 1$, *à l'inégalité*

$$|f(z)| < e^{\frac{\chi(a_0)}{1-\rho}}.$$

$\chi(a_0)$ *désigne une fonction de* $a_0 = f(0)$ *n'ayant pour points singuliers que zéro, un et l'infini.*

Il s'ensuit que si la fonction $f(z)$, *holomorphe dans le cercle* $|z| = 1$, *n'y prend pas les valeurs un et deux, et si l'on a* $|f(0)| < \frac{1}{2}$, *la fonction* $f(z)$ *vérifie, à l'intérieur du cercle* $|z| = \rho'$, *l'inégalité*

$$(1) \qquad |f(z)| < e^{\frac{k}{1-\rho'}},$$

k désignant une constante numérique.

2. Parmi les fonctions holomorphes admettant deux valeurs exceptionnelles à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, notre étude va se fixer plus particulièrement sur celles qui sont très voisines d'une valeur donnée sur un arc traversant le domaine.

Rappelons d'abord une proposition, qui découle immédiatement d'une inégalité due à M. Carleman :

Soit $f(z)$ *une fonction holomorphe et inférieure en module à* M *dans le cercle* $|z| = 1$, *et à m le long d'un arc de courbe* C *issu de l'origne et aboutissant à la circonférence. A l'intérieur du cercle* $|z| = \rho$, *on a l'inégalité*

$$(2) \qquad |f(z)| < M^{1-\lambda(1-\rho)}\, m^{\lambda(1-\rho)},$$

λ *désignant une constante numérique* (1).

3. Combinons maintenant les inégalités (1) et (2) pour une fonction $f(z)$ satisfaisant aux conditions correspondantes. Cette fonction vérifie, dans le cercle de rayon $\rho < \rho'$, l'inégalité

$$|f(z)| < e^{\frac{k}{1-\rho'}\left[1-\lambda\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)\right]}\, m^{\lambda\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)} < e^{\frac{k}{1-\rho'}-\lambda\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)\log\frac{1}{m}}.$$

---

(1) H. Milloux, Thèse, *Le théorème de M. Picard, suites de fonctions holomorphes, fonctions méromorphes et fonctions entières* (*J. de Math.*, 1924, p. 347).

Laissons ρ fixe, et cherchons à donner à ρ' (quantité comprise entre ρ et 1) une valeur telle que la limitation de $|f(z)|$, fournie par l'inégalité précédente, soit la meilleure possible. Le minimum de l'expression

$$\frac{k}{1-\rho'} - \lambda\left(1-\frac{\rho}{\rho'}\right)\log\frac{1}{m} \tag{3}$$

est obtenu lorsque l'on a

$$\frac{k}{(1-\rho')^2} - \frac{\lambda\rho}{\rho'^2}\log\frac{1}{m} = 0.$$

Cette équation sera vérifiée pour une valeur acceptable de ρ' si le premier membre, qui est fonction croissante de ρ', est négatif pour $\rho' = \rho$, c'est-à-dire si l'on a

$$1-\rho > \sqrt{\frac{k}{\lambda\log\frac{1}{m}}}.$$

Nous supposerons cette dernière inégalité vérifiée. Dans ces conditions, un calcul simple montre que le minimum de l'expression (3) est inférieur à

$$2\lambda\left[2\sqrt{\frac{2k}{\lambda\log\frac{1}{m}}} - (1-\rho)\right]\log\frac{1}{m}$$

et, en supposant

$$1-\rho > 4\sqrt{\frac{k}{\lambda\log\frac{1}{m}}},$$

ce minimum sera inférieur à

$$-\frac{\lambda}{2}(1-\rho)\log\frac{1}{m}.$$

On en déduit le théorème suivant :

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, et n'y prenant pas les valeurs un et deux. Si le module de $f(z)$ est inférieur à une quantité m assez petite sur un arc de courbe **C** *issu de l'origine et aboutissant à la circonférence, la fonction $f(z)$ vérifie, dans le cercle $|z| = \rho$, l'iné-*

galité

$$|f(z)| < e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}$$

si

$$1-\rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}};$$

k et k_1 sont des constantes numériques positives.

4. Nous allons étendre cette proposition au cas où la fonction $f(z)$ est méromorphe, et admet trois valeurs exceptionnelles satisfaisant à certaines inégalités que nous préciserons.

Tout d'abord, prenons pour valeurs exceptionnelles a, $a+1$ et ∞, au lieu de un, deux et ∞ (toutes choses égales d'ailleurs) et, pour fixer les idées, supposons a inférieur en module à 10. Montrons que la proposition précédente ne cesse pas d'être valable. Il nous suffit évidemment d'établir que la fonction $f(z)$ satisfait encore à l'inégalité (1) dans le cercle $|z| = \rho$.

Ceci est évident lorsque les modules de a et $a+1$ sont supérieurs à une quantité fixe, $\frac{1}{4}$ par exemple. En effet, le théorème de M. Landau est applicable à la fonction $f(z) - a$, dont la valeur à l'origine est voisine de $-a$. La fonction $f(z) - a$ satisfait donc à l'inégalité (1). Il en est donc de même de $f(z)$.

Le raisonnement précédent est en défaut lorsque l'une des valeurs exceptionnelles a et $a+1$ est inférieure en module à $\frac{1}{4}$: la valeur à l'origine de $f(z) - a$ est alors voisine de l'un des points singuliers zéro et un de la fonction $\chi(a_0)$. Dans ce cas, posons, avec M. Montel [1],

$$F(z) = \sqrt{f(z - a}.$$

La fonction $F(z)$ est holomorphe dans le cercle $|z| = 1$, où elle ne prend pas les valeurs -1 et $+1$. Sa valeur à l'origine est voisine de la quantité $\sqrt{-a}$, dont le module est inférieur à $\frac{1}{2}$. Par

---

[1] *Voir* P. MONTEL, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Normale*, 1912, p. 487; *voir* p. 500 et 517).

suite, la fonction $F(z)$ satisfait à l'inégalité (1); il en est donc de même de $f(z)$, en augmentant, s'il le faut, la constante numérique k.

5. Passons maintenant au cas d'une fonction holomorphe $f(z)$ admettant les deux valeurs exceptionnelles a et b (dont la plus petite en module est a) et posons

$$\varphi(z) = \frac{f(z)-a}{f(z)-b} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}\,\frac{f(z)}{f(z)-b}.$$

La fonction $\varphi(z)$, holomorphe dans le cercle $|z| = 1$, n'y prend pas les valeurs $-\frac{a}{b}$ et $-\frac{a}{b}+1$, qui rentrent dans la catégorie des valeurs exceptionnelles qui viennent d'être étudiées.

Sur l'arc de courbe C, la fonction $f(z)$ est inférieure en module à m; en supposant b supérieur en module à $2m$, on a, sur cet arc de courbe,

$$|\varphi(z)| < \frac{4m}{|b|} = \mu.$$

Si μ est assez petit, le théorème du n° 3 s'applique à la fonction $\varphi(z)$, dont le module est, par suite, à l'intérieur du cercle $|z| = \rho$, inférieur à

$$e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{\mu}}$$

si

$$1-\rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{\mu}}}. \tag{4}$$

On en déduit, pour la fonction $f(z)$, l'inégalité

$$\left|\frac{f(z)}{f(z)-b}\right| < \left|\frac{b}{b-a}\right| e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{\mu}}.$$

Supposons maintenant que $|b|$ et $\left|\frac{1}{b-a}\right|$ sont inférieurs à

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}},$$

d'où il s'ensuit que $|b|$ est supérieur à la moitié de l'inverse de cette quantité, puisque b est supérieur en module à a. Nous désignons par k_2 une constante numérique positive assez petite.

La fonction $f(z)$ satisfait, d'après la valeur de μ, à l'inégalité

$$\left|\frac{f(z)}{f(z)-b}\right| < e^{-\left(\frac{k}{2}-2k_2\right)(1-\rho)\log\frac{1}{m}}$$

et, en supposant k_2 suffisamment petit, à

$$|f(z)| < e^{-\frac{k}{10}(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

L'inégalité conditionnelle (4) peut être remplacée par l'inégalité

$$1-\rho \geqq \frac{2k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}}.$$

En résumé, le théorème du n° 3 s'applique à une fonction holomorphe $f(z)$ admettant, toutes choses égales d'ailleurs, deux valeurs exceptionnelles a et b, dont les modules, ainsi que $\left|\frac{1}{b-a}\right|$, sont inférieurs à la quantité

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}},$$

k_2 étant une constante numérique positive.

6. Examinons maintenant le cas général d'une fonction $\varphi(z)$ méromorphe dans le cercle $|z|=1$, où elle ne prend pas les valeurs a, b, c, rangées par ordre de modules non décroissants. La fonction

$$\psi(z) = \frac{-c\varphi(z)}{\varphi(z)-c} = \varphi(z)\left[1-\frac{\varphi(z)}{\varphi(z)-c}\right]$$

est holomorphe dans le cercle $|z|=1$, où elle ne prend pas les valeurs

$$\alpha = -\frac{ca}{a-c}, \qquad \beta = -\frac{cb}{b-c}$$

dont la différence, égale à $\frac{c^2}{(a-c)(b-c)}(b-a)$ est supérieure en module à $\frac{1}{4}|b-a|$.

Les modules des quantités α, β et $\frac{1}{\alpha-\beta}$ seront inférieurs à

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}}$$

si les modules des quantités a, b, $\frac{1}{a-c}$, $\frac{1}{b-c}$ et $\frac{1}{a-b}$ sont inférieurs à

$$e^{\frac{k_2}{3}(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

En supposant ces conditions réalisées, les valeurs exceptionnelles de la fonction holomorphe $\psi(z)$ vérifient les conditions requises au numéro précédent.

Ceci posé, le module de la fonction $\varphi(z)$ est, sur l'arc de courbe C, inférieur à m; celui de la fonction $\psi(z)$ est, en supposant $|c| > 3m$, inférieur à $\frac{m}{2}$. Appliquons le théorème du n° **3** : à l'intérieur du cercle $|z| = \rho$, on a

$$(5) \qquad |\psi(z)| < e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}$$

si

$$1-\rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}}.$$

On en déduit une limitation du module de $\varphi(z)$. L'inégalité (5) s'écrit

$$\left|\frac{\varphi(z)}{\varphi(z)-c}\right| < \frac{1}{|c|}e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

D'après les conditions imposées aux valeurs exceptionnelles, on a

$$\frac{1}{|c|} < \frac{1}{2}e^{-\frac{k_2}{3}(1-\rho)\log\frac{1}{m}},$$

et, en prenant la constante k_2 suffisamment petite, la fonction $\varphi(z)$ vérifie, dans le cercle $|z| = \rho$, l'inégalité

$$|\varphi(z)| < e^{-\frac{k}{2}(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

7. Nous pouvons maintenant énoncer la proposition qui étend aux fonctions méromorphes le théorème du n° 3.

Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur du cercle $|z| = 1$, et n'y prenant pas trois valeurs a, b, c, telles que les modules de deux de ces valeurs et les inverses des côtés du *triangle abc, soient inférieurs à*

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

Si l'on a $|\varphi(z)| < m$ *sur un arc de courbe* C *issu de l'origine et aboutissant à la circonférence* $|z|=1$, *la fonction* $\varphi(z)$ *vérifie, à l'intérieur du cercle* $|z|=\rho$, *l'inégalité*

$$|\varphi(z)| < e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

si

$$1-\rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}}:$$

k, k_1 *et* k_2 *sont des constantes numériques positives.*

8. La fonction $\varphi(z)$, très petite sur l'arc de courbe C, reste donc très petite à l'intérieur du cercle $|z|=\rho$. Si le domaine où l'on étudie la fonction $\varphi(z)$ est, non plus le cercle $|z|=1$, mais un domaine (D) quelconque, on en fera la représentation conforme sur le cercle. A la circonférence $|z|=\rho$ correspond une courbe $\Gamma(\rho)$; il sera intéressant, pour la suite, de rechercher une limite supérieure de la distance d'un point de la courbe $\Gamma(\rho)$ à la frontière du domaine (D).

Comme domaine (D), nous considérerons seulement un secteur de couronne circulaire, dont nous réaliserons la représentation conforme sur le cercle par l'intermédiaire d'un rectangle et d'un demi-plan.

9. Étudions d'abord la représentation conforme d'un rectangle ABCD sur un demi-plan, lorsque le rapport des dimensions du rectangle croît indéfiniment.

On réalise cette représentation conforme par la formule

$$X = \int_i^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-a^2)}},$$

a est réel et supérieur à un.

Aux points du plan des x d'affixes i, o, 1, a, ∞, $-a$, -1, correspondent respectivement dans le plan des X les points O' (origine), E, B, C, F, D et A, de sorte que les côtés du rectangle ont pour longueurs respectives

$$AB = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-a^2)}},$$

$$BC = \int_1^a \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(a^2-x^2)}}.$$

Cherchons ce que deviennent ces quantités lorsque a tend vers un. On peut supposer a inférieur à deux. Un calcul immédiat donne

$$\frac{2}{\sqrt{6}}\operatorname{Log}\frac{4}{a-1} < AB < 2\operatorname{Log}\frac{6}{a-1},$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} < BC < \frac{\pi}{\sqrt{6}}.$$

Lorsque a tend vers un, le côté BC reste fini, tandis que AB augmente indéfiniment comme $\operatorname{Log}\frac{1}{a-1}$.

10. On réalise une représentation conforme du demi-plan des x sur le cercle $|z| \leqq 1$ au moyen de la transformation

$$z = \frac{x-i}{x+i}.$$

Au cercle $|z| = \rho$ correspond, dans le plan des x, le cercle $\gamma(\rho)$ d'équation

$$\left|\frac{x-i}{x+i}\right| = \rho$$

et, dans le plan des X, une courbe $\Gamma(\rho)$. Nous nous proposons de rechercher une limite supérieure de la distance de cette courbe au contour du rectangle ABCD. Nous supposerons $1-\rho$ assez petit pour que le cercle $\gamma(\rho)$ soit assez rapproché des points $x = 1$ et $x = a$.

Soit x_0 un point du plan des x, d'affixe réelle et comprise entre $-a$ et $+a$, par exemple positive; et soit $x_0 + i\tau$ (τ réel et petit) le point, de même abscisse, situé sur le cercle $\gamma(\rho)$. [On prend le plus proche du point x_0.]

A ces deux points correspondent, dans le plan des X, deux points d'affixes X_0 et X_1, situés respectivement sur l'un des côtés AD, AB ou BC du rectangle, et sur la courbe $\Gamma(\rho)$. Une étude simple de l'intégrale

$$X_1 - X_0 = \int_{x_0}^{x_0+i\tau} \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(x^2-a^2)}}$$

fournira une limite supérieure de la distance de ces deux points.

L'intégrale précédente est inférieure à

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{|x_0+it-1|\,|x_0+it-a|}}.$$

Le minimum de la quantité sous radical, lorsqu'on fait varier x_0 de o à a, t restant fixe, est : soit $t(a-1)$ si t est inférieur à $\frac{a-1}{2}$, soit $t^2 + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ si t est supérieur à $\frac{a-1}{2}$. On en déduit immédiatement les limites supérieures correspondantes de I :

1° Si $\tau < \frac{a-1}{2}$, on a

$$I < \sqrt{\frac{2\tau}{a-1}};$$

2° Si $\tau > \frac{a-1}{2}$, on a

$$I < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Log} \frac{2\tau}{a-1}.$$

Exprimons ces résultats en fonction de ρ. L'équation de $\gamma(\rho)$ est

$$\rho = \left|\frac{x-i}{x+i}\right| = \left|\frac{x_0+it-i}{x_0+it+i}\right|$$

et les ordonnées τ des points d'abscisse a sont données par l'équation

$$\tau^2(1-\rho^2) - 2\tau(1+\rho^2) + (a^2+1)(1-\tau^2) = 0.$$

Elle a des racines si a est inférieur à $\frac{3}{2}$ et si ρ est supérieur à $\frac{1}{2}$. La plus petite racine, la seule qui nous intéresse, est inférieure à $10(1-\rho)$.

Nous pouvons déduire de ce qui précède le résultat suivant :

Soit X_0 un point quelconque des côtés AB, BC et AC du rectangle. Sa distance à la courbe $\Gamma(\rho)$ est inférieure :

$$1^\circ \ \mathrm{A} \qquad \sqrt{\frac{20(1-\rho)}{a-1}} \qquad \text{si} \qquad 1-\rho \leqq \frac{a-1}{20};$$

$$2^\circ \ \mathrm{A} \qquad 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{20(1-\rho)}{a-1} \qquad \text{si} \qquad 1-\rho > \frac{a-1}{20}.$$

Il nous reste à examiner le cas d'un point X_0 pris sur le côté CD du rectangle, correspondant à un point x_0 d'abscisse supérieure à a ou inférieure à $-a$.

On ramène au cas précédent, en posant $x' = -\frac{a}{x}$, ce qui n'altère pas la forme de l'intégrale; x_0 est changé en un point d'affixe x'_0 inférieure en module à un. La distance cherchée résulte de l'étude de l'intégrale

$$X_1 - X_0 = \frac{1}{a}\int_{x'_0}^{x'_0+i\tau'} \frac{dx'}{\sqrt{(x'^2-1)(x'^2-a^2)}}$$

et le second membre est inférieur en module aux limites trouvées plus haut.

La liaison entre τ' et ρ s'établit immédiatement, et montre que l'on a encore $\tau' < 10(1-\rho)$, de sorte que les résultats précédents subsistent. Résumons ces résultats :

Tout point du rectangle est à une distance de la courbe $\Gamma(\rho)$ *inférieure*

$$1^\circ \ A \qquad \sqrt{\frac{20(1-\rho)}{a-1}} \qquad \textit{si} \qquad 1-\rho \leqq \frac{a-1}{20};$$

$$2^\circ \ A \qquad 1+\log\frac{20(1-\rho)}{a-1} \qquad \textit{si} \qquad 1-\rho > \frac{a-1}{20}.$$

Cet énoncé suppose $1-\rho$ et $a-1$ suffisamment petits.

Rappelons encore que le côté AB du rectangle est égal à $k \log \frac{1}{a-1}$, k restant compris entre deux valeurs numériques. Le côté BC est compris entre $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ et $\frac{\pi}{\sqrt{6}}$.

11. Nous allons effectuer la même étude pour un secteur de couronne circulaire, en nous bornant à un secteur d'ouverture 2π. Soit R et R' les rayons des circonférences limitant la couronne. Le rapport $\frac{R'}{R}$, supérieur à un, est supposé voisin de cette valeur.

On réalise une transformation conforme du secteur de couronne envisagé sur un rectangle par la formule

$$X = \lambda \frac{R}{R'-R} \log Z,$$

λ étant une constante. Les côtés du rectangle ont respectivement pour longueurs

$$\lambda \frac{R}{R'-R} \log \frac{R'}{R} \quad \text{et} \quad 2\pi \frac{R}{R'-R} \lambda.$$

Ce rectangle sera identique au rectangle ABCD étudié précédemment si l'on prend pour valeur de λ une certaine valeur comprise entre $0,7$ et $1,2$, et une valeur de a donnée par l'équation

$$\log \frac{1}{a-1} = k \frac{R}{R'-R},$$

le facteur k étant compris entre 1 et $9,5$.

Supposons que le segment de droite limitant le secteur de couronne se trouve sur la partie négative de l'axe réel. Au point $X = 0$ du rectangle correspond le point Z d'affixe $\sqrt{RR'}$.

Au cercle $|z| = \rho$ du plan des z correspond dans le plan de la couronne, par l'intermédiaire du plan du rectangle, une courbe $C(\rho)$. Nous nous proposons de rechercher une limite supérieure de la distance d'un point de cette courbe au contour du secteur de couronne.

Nous avons obtenu précédemment une limite supérieure de la distance de deux points X_0 et X_1 voisins, appartenant respectivement au contour du rectangle et à la courbe $\Gamma(\rho)$. A ces points correspondent deux points Z_0 et Z_1, vérifiant l'égalité

$$X_1 - X_0 = \lambda \frac{R}{R'-R} \log \frac{Z_1}{Z_0},$$

ou encore

$$Z_1 - Z_0 = Z_0 \left[e^{\frac{X_1 - X_0}{\lambda} \frac{R'-R}{R}} - 1 \right]. \tag{6}$$

D'après les résultats du numéro précédent, la distance des points X_0 et X_1 est inférieure à

$$\sqrt{\frac{20(1-\rho)}{a-1}}$$

si $1-\rho$ ne surpasse pas $\frac{a-1}{20}$. Cette dernière condition est entraînée par l'inégalité

$$1-\rho \leqq e^{-10\frac{R}{R'-R}}$$

que nous supposons vérifiée.

La formule (6) donne alors pour $|Z_1 - Z_0|$ la limitation suivante :

$$|Z_1 - Z_0| < 7(R'-R)\sqrt{\frac{1-\rho}{a-1}} < (R'-R)\sqrt{1-\rho}\, e^{\frac{5R}{R'-R}}.$$

Résumons ce résultat :

En transformant conformément, d'une manière particulière, le cercle $|z| \leqq 1$ *sur un secteur de couronne circulaire d'ouverture* 2π, *dont les circonférences extrêmes ont pour rayons* R *et* R' $\left(\frac{R'}{R}\right.$ *étant voisin de l'unité*$\left.\right)$, *à la circonférence* $|z| = \rho$ *correspond une courbe* $\Gamma(\rho)$ *dont tous les points sont à une distance du contour du secteur inférieure à*

$$(R'-R)\sqrt{1-\rho}\, e^{\frac{5R}{R'-R}}$$

si

$$1-\rho \leqq e^{-10\frac{R}{R'-R}}.$$

En supposant que le secteur se termine à la partie négative de l'axe réel (de part et d'autre de cet axe), au centre du cercle $|z| \leqq 1$ correspond, dans la transformation envisagée, le point $Z = \sqrt{RR'}$, que nous appellerons, pour cette raison, le *centre du secteur de couronne circulaire*.

12. L'étude d'un secteur de couronne circulaire d'ouverture $2\pi\alpha$ se ramène à celle du secteur d'ouverture 2π par la transformation

$$Z_1 = [RR']^{\frac{1-\alpha}{2}} Z^{\alpha}.$$

Les centres de ces secteurs sont les mêmes, quel que soit α. Les arcs de circonférence ont pour rayons respectifs

$$R\left[\frac{R'}{R}\right]^{\frac{1-\alpha}{2}} \quad \text{et} \quad R'\left[\frac{R}{R'}\right]^{\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Lorsque α décroît de 1 à 0, ces secteurs s'emboîtent les uns dans les autres. Un calcul simple montre (ce qui est à peu près évident) que pour tous ces secteurs les courbes $\Gamma(\rho)$ satisfont encore à la proposition du numéro précédent, en prenant, bien entendu, comme contour du secteur celui du secteur d'ouverture $2\pi\alpha$.

13. Abordons maintenant l'étude des fonctions méromorphes dans des couronnes circulaires.

Soit une couronne circulaire dont les rayons extrêmes sont R et R' $\left(\frac{R'}{R}\text{ voisin de l'unité}\right)$. Soit $\varphi(z)$ une fonction méromorphe dans cette couronne, et inférieure en module à une quantité m suffisamment petite sur un arc de courbe L traversant la couronne. Nous pouvons supposer que la partie positive de l'axe réel passe par le point A de L de module $\sqrt{RR'}$.

Nous allons examiner le cas où la fonction $\varphi(z)$ ne prend pas, dans la couronne circulaire, trois valeurs distinctes de la valeur asymptotique zéro; par exemple les valeurs 1, 2, ∞. Nous montrerons que, sous certaines conditions imposées à l'épaisseur relative de la couronne, la fonction $\varphi(z)$ reste encore petite dans une couronne circulaire intérieure à la précédente, et nous obtiendrons une limite supérieure de $|\varphi(z)|$ dans cette couronne.

Effectuons, dans la couronne circulaire donnée, une coupure suivant la partie négative de l'axe réel. Nous constituons ainsi un secteur de couronne circulaire, d'ouverture 2π, de centre A, tel que ceux que nous avons étudiés au n° **11**.

Posons

$$1-\rho = e^{-12\frac{R}{R'-R}}.$$

D'après la proposition du n° **11**, la distance d'un point de $\Gamma(\rho)$ au contour du secteur est inférieure à la quantité

$$d = (R'-R)\,e^{-\frac{R}{R'-R}}.$$

La couronne circulaire dont les rayons extrêmes sont $R+d$ et $R'-d$, est donc intérieure à la courbe $\Gamma(\rho)$, à l'exception d'une région (δ) avoisinant la partie négative de l'axe réel, et située à une distance de cet axe inférieure à d.

En désignant par B un point situé à proximité de la partie négative de l'axe réel, à la distance d de cet axe, et à la distance $\frac{R+R}{2}$ de l'origine, on peut englober la région (δ) dans un cercle de centre B et de rayon $\frac{R'-R}{2} - \frac{d}{4}$. Il suffit, pour qu'il en soit ainsi, de supposer

$$19\,d < 3(R'-R) \qquad \text{ou} \qquad e^{\frac{R}{R'-R}} > \frac{19}{3}.$$

Ceci posé, la fonction $\varphi(z)$ admettant les trois valeurs exceptionnelles $1, 2, \infty$, dans la couronne circulaire de rayons extrêmes R et R′, on peut appliquer le théorème du n° 7 (après transformation conforme).

Il s'ensuit que si l'inégalité

$$(7) \qquad \frac{k_1}{\sqrt{\log \frac{1}{m}}} \leqq 1 - \rho = e^{-12\frac{R}{R'-R}}$$

est vérifiée, le module de $\varphi(z)$ est inférieur, à l'intérieur de la courbe $\Gamma(\rho)$, à la quantité

$$\mu = e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

Il en est ainsi, en particulier, sur une ligne issue de B et aboutissant à la circonférence de centre B et de rayon $\frac{R'-R}{2}$. Appliquons de nouveau le théorème du n° 7 à ce cercle, dans lequel la fonction $\varphi(z)$ ne prend pas les valeurs $1, 2, \infty$. Dans cette application, nous devons prendre $1-\rho = \frac{d}{2(R'-R)}$. La fonction $\varphi(z)$ vérifie, à l'intérieur du cercle de centre B et de rayon $\frac{R'-R}{2} - \frac{d}{4}$, l'inégalité

$$(8) \qquad |\varphi(z)| < e^{-k\frac{d}{2(R'-R)}\log\frac{1}{\mu}}$$

si

$$\frac{d}{2(R'-R)} \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log \frac{1}{\mu}}}.$$

Cette dernière inégalité, qui s'écrit

$$e^{-\frac{R}{R'-R}} \geqq \frac{2k_1}{\sqrt{k e^{-12\frac{R}{R'-R}} \log \frac{1}{m}}},$$

est une conséquence de l'inégalité (7)

Enfin l'inégalité (8) est de la forme

$$|\varphi(z)| < e^{-k e^{-13\frac{R}{R'-R}} \log \frac{1}{m}} < e^{-k\left[\log \frac{1}{m}\right]^{\frac{11}{24}}}$$

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit $\varphi(z)$ *une fonction holomorphe dans la couronne circulaire* $R \leqq |z| \leqq R'$, *dans laquelle elle ne prend pas les valeurs un et deux* (¹), *et dont le module est inférieur à une quantité* m *très petite sur un arc* L *traversant la couronne. Si l'inégalité*

$$e^{-12\frac{R}{R'-R}} \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log \frac{1}{m}}}$$

est vérifiée, la fonction $\varphi(z)$ *satisfait, dans la couronne circulaire*

$$R + (R'-R)e^{-\frac{R}{R'-R}} < |z| < R' - (R'-R)e^{-\frac{R}{R'-R}},$$

à l'inégalité

$$(9) \qquad |\varphi(z)| < e^{-k\left[\log \frac{1}{m}\right]^{\frac{11}{24}}}.$$

Remarque. — Il n'est pas nécessaire, d'après le raisonnement, que l'arc de courbe L traverse la couronne. Il suffit que cet arc

---

(¹) La fonction $\varphi(z)$ peut avoir des valeurs exceptionnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème du nº 7, et en particulier deux valeurs b et c (au lieu de un et de deux) telles que les modules de ces valeurs et l'inverse de $|b-c|$ sont supérieurs à la quantité

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}} = e^{k_2 e^{-\frac{12R}{R'-R}}\log\frac{1}{m}}.$$

La proposition ne cesse pas d'être valable.

parte d'un point A situé à la distance $\sqrt{RR'}$ de l'origine, pour aboutir à la frontière de la couronne.

Nous utiliserons plus loin cette remarque dans l'étude des fonctions entières.

14. Le théorème précédent s'applique en particulier à une fonction $Z = \varphi(z)$ méromorphe dans tout le plan et possédant une valeur asymptotique. Nous pouvons supposer que cette valeur asymptotique est zéro. Nous désignerons par $m(r)$ une fonction positive de r tendant vers zéro avec $\frac{1}{r}$, en restant supérieure à la valeur de $|\varphi(z)|$ au point $|z| = r$ du chemin de détermination zéro.

Soit A un point où l'on a $|\varphi(z)| < m(r)$ si, dans la couronne circulaire qui a été définie au numéro précédent, la fonction $\varphi(z)$ ne prend pas les trois valeurs $1, 2, \infty$, cette fonction vérifie l'inégalité (9) dans le domaine précisé plus haut, et en particulier sur le cercle, de centre origine, passant par le point A [on remplace m par $m(r)$].

Il est clair qu'une telle inégalité ne peut être vérifiée pour toute valeur de r, sans quoi $\varphi(z)$ convergerait uniformément vers zéro lorsque z s'éloigne indéfiniment. Ainsi, nous sommes conduits à étudier la fonction $\varphi(z)$ dans une suite infinie de couronnes circulaires, dans lesquelles elle prend au moins l'une des valeurs $1, 2, \infty$.

Considérons l'une de ces couronnes, et les secteurs de couronne circulaire S_α d'ouverture $2\pi\alpha$ qui s'en déduisent (*voir* n° **12**), tous ces secteurs ayant pour centre le point A situé sur le chemin de détermination zéro.

Lorsque α est suffisamment petit, le secteur S_α est très rapproché du point A, et par continuité la fonction $\varphi(z)$ y est très voisine de sa valeur asymptotique zéro : elle ne prend donc pas les valeurs $1, 2, \infty$.

Augmentons d'une façon continue la valeur de α : les secteurs s'emboîtent les uns dans les autres. Pour une certaine valeur α_0 de α, inférieure à l'unité, la fonction $\varphi(z)$ est égale à l'une au moins des valeurs $1, 2, \infty$ en un point M du contour du secteur S_{α_0}, la fonction étant dépourvue de ces valeurs à l'intérieur du secteur; en effet, le secteur S_1 contient à son intérieur l'une au moins des racines des équations

$$\varphi(z) - 1 = 0, \qquad \varphi(z) - 2 = 0, \qquad \frac{1}{\varphi(z)} = 0.$$

En faisant la représentation conforme du secteur S_{α_0} sur le cercle $|x| = 1$, au cercle $|x| = \rho$ correspond à la courbe $\Gamma(\rho)$, à l'intérieur de laquelle la fonction $\varphi(z)$ satisfait à l'inégalité

$$(10) \qquad |\varphi(z)| < e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}$$

si

$$e^{-12\frac{R}{R'-R}} \geqq 1 - \rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}}$$

(R et R′ désignent toujours les rayons des circonférences limitant le secteur S_1 d'ouverture 2π).

Soit ω le point de $\Gamma(\rho)$ le plus rapproché du point M. La distance ωM est, d'après notre étude de la représentation conforme, inférieure à

$$(R' - R)\sqrt{1-\rho}\, e^{\frac{5R}{R'-R}}.$$

Traçons le cercle $C(r)$ de centre ω et dont le rayon est égal au double de cette quantité. Nous appellerons $C(r)$ un *cercle de remplissage* ; nous justifierons plus loin cette dénomination en précisant les propriétés de la fonction $\varphi(z)$ dans ce cercle.

Sur une ligne issue du centre ω et aboutissant à la circonférence $C(r)$, ligne intérieure à la courbe $\Gamma(\rho)$, l'inégalité (10) est vérifiée. D'autre part, à l'intérieur du cercle $C'(r)$ concentrique à $C(r)$ et de rayon moitié, la fonction $\varphi(z)$ prend (au point M) l'une des valeurs 1, 2, ∞.

Je dis que dans le cercle de remplissage $C(r)$ *la fonction* $\varphi(z)$ *ne peut avoir trois valeurs exceptionnelles* a, b, c, telles que les modules de deux de ces valeurs et les inverses des côtés du triangle abc sont inférieurs à la quantité

$$e^{k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

Si, en effet, la fonction $\varphi(z)$ avait trois valeurs exceptionnelles a, b, c satisfaisant à ces conditions, par application du théorème du n° 7, on aurait, dans le cercle $C'(r)$, l'inégalité

$$|\varphi(z)| < e^{-k(1-\rho)\log\frac{1}{m}}.$$

ce qui est impossible, puisqu'à l'intérieur de ce cercle la fonction $\varphi(z)$ prend l'une des valeurs 1, 2, ∞.

Les valeurs que ne prend pas la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle de remplissage $C(r)$ peuvent donc être localisées, soit dans deux petits cercles de rayons

$$\mu = e^{-k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m}},$$

situés à une distance de l'origine inférieure à $\frac{1}{\mu}$, soit dans l'un de ces petits cercles, et à l'extérieur du grand cercle de centre origine et de rayon $\frac{1}{\mu}$. S'il n'en était pas ainsi, la fonction $\varphi(z)$ aurait trois valeurs exceptionnelles satisfaisant aux conditions d'application du théorème du n° 7.

Nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Soit $Z = \varphi(z)$ *une fonction méromorphe à valeur asymptotique zéro, et* $m(r)$ *une fonction positive de* r, *tendant vers zéro avec* $\frac{1}{r}$, *en restant supérieure à la valeur de* $|\varphi(z)|$ *au point* z *de module* r *du chemin de détermination zéro.*

Soient R, R' *et* ρ *trois fonctions de* r *telles que*

$$\sqrt{RR'} = r,$$

$$e^{-12\frac{R}{R'-R}} \geqq 1 - \rho \geqq \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m(r)}}}.$$

Il existe une suite de cercles de remplissage $C(r_1)$, $C(r_2)$, ..., $C(r_n)$, ... *s'éloignant indéfiniment. Le cercle de remplissage* $C(r)$ *est à une distance de l'origine comprise entre* R *et* R'. *Son rayon est égal à*

$$2(R'-R)\sqrt{1-\rho}\, e^{\frac{5R}{R'-R}},$$

et, à son intérieur, les valeurs que ne prend pas la fonction $Z = \varphi(z)$ *sont : ou bien situées dans deux petits cercles au plus du plan des* Z, *dont les rayons sont égaux à*

$$\mu = e^{-k_2(1-\rho)\log\frac{1}{m(r)}},$$

et qui sont à une distance de l'origine inférieure à $\frac{1}{\mu}$, *ou bien situées dans l'un de ces petits cercles, et à l'extérieur du cercle* $|Z| = \frac{1}{\mu}$.

En particulier, il y aura un cercle de remplissage $C(r)$ pour toutes les valeurs de r telles que sur le cercle $|z| = r$, l'inégalité

$$(9) \qquad |\varphi(z)| < e^{-k\left[\log \frac{1}{m(r)}\right]^{\frac{11}{24}}}$$

ne se trouve pas vérifiée.

15. Dans les cercles $C(r_1)$, $C(r_2)$, ..., $C(r_n)$, ..., la fonction $Z = \varphi(z)$ *remplit* des régions de plus en plus étendues du plan des Z, puisque la quantité μ tend vers zéro avec $\frac{1}{r}$. D'où le nom de *cercles de remplissage* donnés à ces cercles.

Remarquons que dans une suite de cercles de remplissage s'éloignant indéfiniment, la fonction $\varphi(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus.

Dans ma Thèse, j'ai établi l'existence des cercles de remplissage en me basant sur le théorème de M. Schottky et l'inégalité de M. Carleman. La proposition générale que j'avais obtenue est un peu moins précise que la proposition précédente, qui sera complétée dans la suite.

M. G. Julia [1], en se basant sur la théorie bien connue des familles normales, due à M. Montel, a démontré des théorèmes généraux, d'allure qualitative, sur les valeurs exceptionnelles des fonctions entières, ou des fonctions méromorphes pourvues de valeur asymptotique. Tel est, par exemple, le théorème suivant :

Il existe un angle, d'ouverture arbitrairement petite, dans lequel la fonction méromorphe $\varphi(z)$ *prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus.*

Ces théorèmes se déduisent aisément, comme je l'ai montré dans ma Thèse, de l'existence des cercles de remplissage.

Soit, par exemple, ω un argument limite des centres des cercles

---

[1] *Voir* G. JULIA, *Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé* (Paris, Gauthier-Villars, 1924).

de remplissage. Traçons la droite Δ faisant avec l'axe réel l'angle ω. Un angle A d'ouverture arbitrairement petite, ayant pour bissectrice Δ, contient à son intérieur une infinité de cercles de remplissage, puisque les rapports des rayons des cercles aux distances de leurs centres à l'origine tendent vers zéro avec $\frac{1}{r}$.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, dans une suite quelconque de cercles de remplissage s'éloignant indéfiniment, la fonction $\varphi(z)$ prend une infinité de fois toute valeur, sauf deux au plus. Le théorème de M. Julia, cité plus haut, se trouve ainsi démontré.

16. La méthode que nous avons employée dans ce Mémoire permet de préciser les propriétés de la fonction $\varphi(z)$ dans le cercle de remplissage $C(r)$.

Dans le théorème du n° 14, nous n'avons pas fixé les valeurs exactes de R, R′ et ρ. En faisant varier ces quantités dans les limites permises, le rayon du cercle de remplissage se trouve réduit ou augmenté; les inégalités auxquelles satisfait la fonction $\varphi(z)$ dans ce cercle sont plus larges, ou plus resserrées.

Précisons maintenant de la façon suivante les valeurs de R, R′ et ρ

$$e^{-12\frac{R}{R'-R}} = 1 - \rho = \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m}}}.$$

Le rayon du cercle de remplissage est alors

$$\frac{k_2(R'-R)}{\left[\log\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{24}}} = \frac{k_3 R}{\left[\log\frac{1}{m}\right]^{\frac{1}{24}}\log\log\frac{1}{m}}.$$

Sur une ligne L issue du centre ω du cercle de remplissage et aboutissant à la circonférence, on a l'inégalité

$$|\varphi(z)| < e^{-k\sqrt{\log\frac{1}{m}}}, \tag{11}$$

et dans le cercle $C'(r)$ concentrique et de rayon moitié, la fonction $\varphi(z)$ prend l'une des valeurs 1, 2, ∞.

Supposons que la fonction $\varphi(z)$ ne prenne pas, dans le cercle de remplissage $C(r)$, une valeur a dont le module est inférieur à un et supérieur à

$$e^{-\frac{k}{2}\sqrt{\log\frac{1}{m}}}$$

(le cas d'une valeur exceptionnelle supérieure en module à un sera examiné plus loin), et considérons la fonction

$$\psi(z) = \frac{\varphi(z)}{\varphi(z)-a}.$$

Cette fonction est holomorphe à l'intérieur du cercle de remplissage $C(r)$. Sur le chemin L, elle est inférieure en module à

$$2e^{-\frac{k}{2}\sqrt{\log\frac{1}{m}}} < e^{-\frac{k}{3}\sqrt{\log\frac{1}{m}}} = m'.$$

A l'intérieur du cercle $C'(r)$, la fonction $\psi(z)$ prend l'une des valeur

$$\frac{1}{1-a}, \quad \frac{2}{2-a}, \quad 1,$$

qui sont, toutes trois, supérieures à $\frac{1}{2}$ en module.

Supposons maintenant que la fonction $\psi(z)$ ne prenne pas, à l'intérieur du cercle $C(r)$, plus de p fois chacune de deux valeurs B et C satisfaisant à certaines conditions que nous préciserons dans la suite. Il existe une couronne circulaire Γ, de centre ω, située à l'intérieur de $C(r)$ et à l'extérieur de $C'(r)$, dont l'épaisseur relative $\frac{R'_1-R_1}{R_1}$ est inférieure ou égale à $\frac{1}{8p}$, et qui ne contient pas à son intérieur de racine des équations

$$\psi(z)-B=0, \qquad \psi(z)-C=0.$$

Sur un arc de courbe traversant Γ, on a $|\psi(z)|<m'$. Appliquons le théorème du n° **13**, en choisissant

$$e^{-12\frac{R_1}{R'_1-R_1}} = \frac{k_1}{\sqrt{\log\frac{1}{m'}}},$$

d'où l'on tire

$$\frac{47}{\log\log\frac{1}{m}} < \frac{R'_1-R_1}{R_1} < \frac{49}{\log\log\frac{1}{m}}.$$

Il suffit pour cela de prendre

$$p = \frac{1}{400} \log \log \frac{1}{m} \quad (^1). \tag{12}$$

En tenant compte de la note du bas de la page 16, on voit que si B, C et $\frac{1}{B - C}$ sont inférieurs en module à

$$e^{k_2 e^{-12 \frac{R_1}{R_1' - R_1} \log \frac{1}{m'}}} < e^{k_3 \sqrt{\log \frac{1}{m}}},$$

la fonction $\psi(z)$ est, dans une certaine couronne circulaire intérieure à (Γ), inférieure en module à

$$e^{-k\left[\log \frac{1}{m'}\right]^{\frac{1}{2}\frac{1}{4}}}.$$

Cette limitation du module est donc acquise sur une circonférence intérieure à Γ, et par suite dans tout le domaine limité par cette circonférence, et en particulier dans le cercle $C'(r)$. Une telle conclusion est inadmissible, puisqu'à l'intérieur de cette circonférence la fonction $\psi(z)$ prend au moins une valeur supérieure en module à $\frac{1}{2}$, comme nous l'avons dit plus haut.

On en conclut qu'il est impossible à la fonction $\psi(z)$ de ne pas prendre plus de p fois chacune de deux valeurs B et C satisfaisant aux conditions que nous avons précisées. A ces valeurs B et C de la fonction $\psi(z)$ correspondent deux valeurs b et c de la fonction $\varphi(z)$, satisfaisant à certaines conditions que nous allons rechercher.

Les inégalités auxquelles sont soumises les valeurs B et C peuvent s'interpréter ainsi : les quantités

$$\left|\frac{b}{b-a}\right|, \quad \left|\frac{c}{c-a}\right|, \quad \left|\frac{(b-a)(c-a)}{a(b-c)}\right|$$

doivent être inférieures à

$$e^{k_3 \sqrt{\log \frac{1}{m}}}.$$

Un calcul immédiat montre qu'il en est ainsi dans le cas où les

---

(1) Ou le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{400} \log \log \frac{1}{m}$.

quantités

$$\frac{1}{|a|},\quad \frac{1}{|b-a|},\quad \frac{1}{|c-a|},\quad \frac{1}{|b-c|}\quad \text{et}\quad |b|$$

sont inférieurs en module à

$$e^{\frac{k_3}{3}\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}}.$$

17. Étudions maintenant le cas où la fonction $\varphi(z)$ ne prend pas, dans le cercle de remplissage, une valeur a supérieure en module à un. La fonction

$$\psi_1(z) = a\frac{\varphi(z)}{\varphi(z)-a}$$

est holomorphe dans le cercle de remplissage $C(r)$, et, sur le chemin L, inférieure en module à la quantité m' trouvée précédemment pour la fonction $\psi(z)$. A l'intérieur du cercle $C'(r)$, elle prend l'une des valeurs

$$\frac{a}{1-a},\quad \frac{2a}{2-a}\quad \text{et}\quad a,$$

toutes trois supérieures en module à $\frac{1}{2}$.

On établit, comme plus haut, que la fonction $\psi_1(z)$ ne peut pas ne pas prendre plus de p fois chacune des deux valeurs B_1 et C_1 satisfaisant aux mêmes conditions que B et C. Ces conditions s'interprètent, pour les valeurs correspondantes b_1 et c_1 de la fonction $\varphi(z)$, de la manière suivante; les quantités

$$\left|\frac{a\,b_1}{b_1-a}\right|,\quad \left|\frac{a\,c_1}{c_1-a}\right|,\quad \left|\frac{(b_1-a)(c_1-a)}{a^2(b_1-c_1)}\right|$$

sont inférieures à

$$e^{k_3\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}}.$$

Ces conditions peuvent être simplifiées; examinons deux cas :

1° a est inférieur en module à

$$e^{\frac{k_3}{3}\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}}.$$

Alors, les quantités

$$\frac{1}{|b_1-a|},\quad \frac{1}{|c_1-a|},\quad \frac{1}{|b_1-c_1|}\quad \text{et}\quad |b_1|,$$

doivent être inférieures à

$$e^{\frac{k_3}{3}\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}};$$

2° $|a|$ est supérieur à

$$e^{\frac{k_3}{3}\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}}.$$

Alors les quantités

$$|b_1|,\quad |c_1| \quad \text{et} \quad \left|\frac{1}{b_1 - c_1}\right|$$

doivent être inférieures à

$$\frac{1}{2}e^{\frac{k_3}{3}\sqrt[4]{\log\frac{1}{m}}}.$$

18. Résumons les résultats obtenus aux n$^{\text{os}}$ 16 et 17 dans l'énoncé suivant, qui complète le théorème du n° 9 en précisant les propriétés de la fonction $\varphi(z)$ dans les cercles de remplissage :

Dans le cercle de remplissage $C(r)$.

Si la fonction $Z = \varphi(z)$ *ne prend pas une valeur* a *supérieure en module à*

$$\mu = e^{-k_3\sqrt[4]{\log\frac{1}{m(r)}}},$$

le nombre de racines de l'équation $\varphi(z) - A = 0$ *est supérieur à* $\frac{1}{400}\log\log\frac{1}{m(r)}$, *à l'exception peut-être :*

1° *Si* $|a|$ *est inférieur à* $\frac{1}{\mu}$, *de valeurs de* A *telles que* $|A - a| < \mu$, *et de valeurs de* A *ou bien supérieures en module à* $\frac{1}{\mu}$, *ou bien situées dans un cercle de rayon inférieur à* μ.

2° *Si* $|a|$ *est supérieur à* $\frac{1}{\mu}$, *de valeurs de* A *supérieures en module à* $\frac{1}{2\mu}$, *et de valeurs de* A *situées dans un cercle de rayon inférieur à* μ.

Cet énonce peut être condensé lorsque l'on fait la représentation des valeurs de $\varphi(z)$ sur une sphère. Les valeurs exceptionnelles [au point de vue du nombre de racines de l'équation $\varphi(z) - A = 0$] se trouvent incluses dans deux cercles de rayon μ, dont l'un entoure le point correspondant au point a.

19. L'étude de certaines fonctions particulières permet quelquefois de préciser la position des cercles de remplissage et les propriétés de la fonction méromorphe $\varphi(z)$ dans ces cercles.

J'ai montré ([1]) sur l'exemple de la fonction entière $\frac{1}{\Gamma(z)}$, que les cercles de remplissage peuvent constituer une chaîne ininterrompue, ou bien être isolés.

Le cas des fonctions méromorphes pourvues de deux valeurs asymptotiques différentes, est particulièrement intéressant; à chaque cercle $|z| = r$, on peut attacher un cercle de remplissage, d'après le théorème du n° **13**; l'inégalité (9) ne peut être en effet vérifiée sur tout le cercle $|z| = r$.

Cette remarque permet de retrouver et de préciser des théorèmes que M. P. Montel a déduits de l'étude des familles quasi-normales de fonctions analytiques ([2]).

20. Les fonctions entières sont des cas particuliers de fonctions méromorphes à valeur asymptotique. Les théorèmes obtenus précédemment sont donc applicables aux fonctions entières $f(z)$. Il suffit de poser $\varphi(z) = \frac{1}{f(z)}$ et de remplacer $m(r)$ par l'inverse $\frac{1}{M(r)}$ du maximum du module de la fonction entière sur le cercle $|z| = r$. Il résulte en effet d'un théorème de M. Iversen, dont la démonstration a été simplifiée par M. G. Valiron, que le point du cercle $|z| = r$ où l'on a $|f(z)| = M(r)$, est le point de départ d'une ligne polygonale s'éloignant indéfiniment, sur laquelle le module de $f(z)$ est supérieur à $M(r) - \varepsilon$ ([3]).

Les théorèmes des n^{os} **13**, **14** et **18** prennent la forme suivante :

Soit $Z = f(z)$ *une fonction entière. Désignons par* $M(r)$ *le maximum de son module sur le cercle* $|z| = r$, *et bâtissons une couronne circulaire* Γ *dont les circonférences extrêmes* $|z| = R$

([1]) H. Milloux, *loc. cit.*, p. 378.

([2]) P. Montel, *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 2e série, t. VI, p. 40).

Voir aussi H. Milloux, *loc. cit.*, p. 369.

([3]) *Voir* H. Milloux, *loc. cit.*, p. 371.

et $|z| = R'$ *satisfont aux conditions*

$$\sqrt{RR'} = r, \qquad e^{-12\frac{R}{R'-R}} = \frac{k_1}{\sqrt{\log M(r)}}.$$

Ceci posé, ou bien l'inégalité

(14) $$|f(z)| > e^{k[\log M(r)]^{\frac{11}{24}}}$$

est vérifiée dans la couronne circulaire

$$R + (R' - R)e^{-\frac{R}{R'-R}} < |z| < R' - (R' - R)e^{-\frac{R}{R'-R}},$$

et en particulier sur le cercle $|z| = r$.

Ou bien la couronne circulaire Γ *contient un cercle de remplissage* $C(r)$ *de rayon* $(R' - R)e^{-\frac{R}{R'-R}}$. *Dans ce cercle, la fonction* $Z = f(z)$ *vérifie l'une des deux propriétés suivantes :*

1° *Elle prend toute valeur, à l'exception peut-être de valeurs inférieures en module à*

$$\frac{1}{\mu} = e^{k_3\sqrt[4]{\log M(r)}};$$

2° *Si la fonction* $f(z)$ *ne prend pas une valeur* a *inférieure en module à* $\frac{1}{\mu}$, *le nombre de racines de l'équation* $f(z) - A = 0$ *est supérieur à* $\frac{1}{400}\log\log M(r)$, *à l'exception peut-être de valeurs de* A *vérifiant l'une des inégalités*

$$|A - a| < \mu, \qquad |A| > \frac{1}{\mu}.$$

L'inégalité (14) ne pouvant être vérifiée sur tout cercle $|z| = r$, on en déduit l'existence d'une suite de cercles de remplissage s'éloignant indéfiniment. En particulier, pour une fonction entière pourvue d'une valeur asymptotique finie, l'inégalité (14) n'est jamais vérifiée; à chaque valeur de r correspond un cercle de remplissage.
