BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL LÉGAUT

Sur les courbes gauches algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 53 (1925), p. 149-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1925__53__149_0>

SUR LES COURBES GAUCHES ALGÉBRIQUES ;

PAR M. MARCEL LÉGAUT.

INTRODUCTION.

Le système complet des surfaces φ_l de degré l contenant une courbe gauche Γ, détermine sur un plan général Π un système linéaire $|C_l|$ de courbes de degré l. Toutes ces courbes passent par la section plane A de Γ. Ce système est par suite de dimension inférieure ou égale à celle du système complet $|\varphi_l|$ des courbes de degré l du plan Π qui passent par le système de points A. Nous désignerons dans la suite de ce Mémoire le défaut du système $|C_l|$ par le symbole ω_l.

M. Castelnuovo [1] a démontré que, lorsque l est assez grand, on peut être certain que ω_l est nul et que par suite le système $|C_l|$ coïncide avec $|\varphi_l|$.

Je me propose de donner dans la première partie de ce Mémoire, en me plaçant dans les conditions les plus générales, la limite inférieure l_0 de l pour laquelle ce résultat est atteint.

La méthode employée pour décrire les surfaces à partir des courbes planes est en substance la même que celle de M. Castelnuovo. Indiquons-la ici brièvement pour montrer les difficultés que présente la détermination précise du degré des surfaces ainsi obtenues.

Considérons une courbe gauche Γ et une droite D en position générale par rapport à Γ. Faisons passer par D un plan Π_0 qui rencontre Γ suivant le système A_0. Il existe dans le plan Π_0 une infinité de courbes C_l de degré l passant par le système A_0 (l n'étant pas trop petit). Déterminons rationnellement une de ces courbes en lui imposant le passage par un nombre *convenable* de points rationnellement déterminés en fonction du paramètre qui caractérise la position du plan Π_0. Lorsque le plan Π tourne autour de D,

---

[1] *Alcune proprieta fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* (*Annali di Matematica*, 1897). — *Voir* aussi PICARD et SIMART, *Fonctions algébriques de deux variables*. t. 2, p. 72.

il rencontre Γ suivant les systèmes A. Dans chacune de ses positions, il existe une courbe C_l passant par A et par les points rationnellement déterminés en fonction du paramètre qui caractérise la position du plan Π. Ces courbes décrivent une surface φ passant par Γ, qui contient en général k fois la droite D et qui est par suite de degré $l+k$.

Le problème qu'il s'agit de résoudre est alors le suivant :

Dans quelles conditions est-il *possible* de choisir la détermination rationnelle des courbes C_l des plans Π pour que la surface obtenue soit de degré l et par suite ne contienne pas la droite D ?

Une première condition nécessaire apparaît immédiatement. Soit B le système des l points d'intersection de la courbe C_l du plan Π_0 avec D. Il est nécessaire que l'on puisse choisir la détermination rationnelle de la courbe C_l de façon que le système B reste le même quelle que soit la position du plan Π. (*A priori* on ne peut pas affirmer que cette condition est suffisante. Nous verrons cependant qu'il en est bien ainsi.)

Or cela suppose que les séries découpées sur la droite D par les systèmes complets de courbes de degré l passant par les différents systèmes de points A aient une série commune. On conçoit que la dimension de cette série commune est en relation directe avec le défaut ω_l. En effet, si l'on fait passer par A_0 une courbe C_l qui coupe D suivant un système B qui n'appartient pas à cette série commune, il n'existera pas de surface φ_l de degré l passant par Γ et découpant sur le plan Π_0 cette courbe C_l. On peut donc alors affirmer que ω_l n'est pas nul. Il est par suite nécessaire pour que ω_l soit nul (et c'est suffisant) que toutes les séries précédentes soient confondues.

Ces séries sont certainement confondues lorsqu'elles sont complètes, c'est-à-dire des g_l^l (1).

La difficulté du problème apparaît lorsque ces séries ne sont pas complètes. Nous verrons alors que, même dans les conditions les plus générales, ces séries sont encore confondues pour les premières valeurs de l qui suivent les précédentes.

---

(1) Rappelons que l'indice représente le nombre de points d'un groupe de la série, et que l'exposant indique le nombre de paramètres dont dépend un groupe de cette série.

La conclusion de cette étude est que la limite inférieure l_0 (dans ces conditions générales) dépend essentiellement *des propriétés du système de points* A_0, section plane générale de Γ (§ 5).

Les résultats ainsi obtenus sont déjà assez précis pour pouvoir être appliqués directement à la théorie des surfaces algébriques. Ils permettent en effet de préciser la *régularité* des surfaces admettant pour ligne double la courbe Γ à l'exclusion de toute autre singularité (§ 6).

Dans la deuxième partie de ce Mémoire, j'étudie la détermination du nombre ω_l lorsque l a une valeur donnée quelconque. Je ramène ce problème à la *discussion d'un système d'équations du premier degré* (§ 7).

Les conditions entre les coefficients des équations de la courbe Γ que l'on rencontre dans cette discussion définissent des variétés dans l'espace des coefficients qui sont covariantes dans un sens large par rapport aux transformations projectives de Γ.

Je donne alors un exemple précis de l'abaissement du nombre l_0 qui montre combien cette question est liée à celle de la réduction de la courbe Γ (§ 8).

La fonction ω_l peut encore s'annuler quand l est inférieure à l_0. J'en donne un exemple en relation encore avec la réduction de la courbe Γ (§ 9).

Dans la troisième partie de ce Mémoire, j'applique la même méthode aux systèmes de surfaces ayant un ensemble donné de courbes-base Γ et de points-base. Les résultats se précisent quand il existe un plan particulier tel que le système de points formé par la section plane de la courbe Γ et par les points-base qu'il contient présente une plus grande singularité que le système de points déterminé par un plan général (§ 10).

L'application de cette propriété aux surfaces présentant comme singularité des lignes doubles et des points multiples donne la démonstration, dans le cas particulier correspondant, d'un théorème énoncé dans le Tome II du livre de MM. Picard et Simart.

La différence entre le genre géométrique et le genre arithmétique d'une surface F_N *de degré* N *est égale au défaut du système des courbes découpées sur un plan par les surfaces* *adjointes d'ordre* N — 3 :

$$p_g - p_a = \omega_{N-3} \quad (\S\ 11).$$

Nous aurons l'occasion de nous servir dans ce Mémoire de propriétés et de notations déjà utilisées dans une étude précédente sur les systèmes de points (*Annales de Toulouse*, t. XVI) (¹). Nous rappellerons à mesure qu'ils apparaîtront la signification des termes employés.

PREMIÈRE PARTIE.

1. Nous allons d'abord exposer trois propositions préliminaires que nous aurons à utiliser souvent dans la suite de ce travail.

a. Soit A un système de points de singularité (²) s_A^l pour les courbes de degré l. Cherchons la dimension ρ_l^1 de la série découpée sur une droite D par les courbes C_l de degré l passant par A.

Si l'on fixe $\rho_l^1 + 1$ points arbitraires de la droite D, les C_l passant par A et ces points doivent se décomposer en la droite D et une courbe C_{l-1} de degré $l - 1$ passant par A.

En écrivant de deux façons différentes la dimension d'un tel système de courbes on obtient

$$\frac{l(l+3)}{2} - (A - s_A^l) - (\rho_l^1 + 1) \equiv \frac{(l-1)(l+2)}{2} - (A - s_A^{l-1})$$

ou

$$(1) \qquad \rho_l^1 = l + s_A^l - s_A^{l-1}.$$

b. Reprenons la figure précédente en y ajoutant une deuxième droite Δ. Si ρ_l^2 est la dimension de la série découpée sur D + Δ par les courbes C_l passant par A on a de même

$$\frac{l(l+3)}{2} - (A - s_A^l) - (\rho_l^2 + 1) = \frac{(l-2)(l+1)}{2} - (A - s_A^{l-2})$$

ou

$$(2) \qquad \rho_l^2 = 2l + s_A^l - s_A^{l-2}.$$

(¹) La lecture du 1ᵉʳ chapitre suffit. On peut aussi se reporter à deux Notes des *Comptes rendus* du 23 juin 1924 et du 7 juillet 1924.

(²) J'appelle *singularité* d'un système de points A pour les courbes de degré l, l'excès du nombre de points sur le nombre de conditions indépendantes qu'ils imposent aux courbes planes de degré l qui les contiennent.

Précisons la signification de ce résultat. Il nous montre que l'on peut prendre ρ_l^1 points sur D, ce qui détermine les $l - \rho_l^1$ autres points d'intersection de D avec les C_l, puis choisir $\rho_l^2 - \rho_l^1$ points arbitraires sur Δ. Il existera alors au moins une courbe C_l passant par A et ces points :

$$(3) \qquad \rho_l^2 - \rho_l^1 = l - s_A^{l-2} + s_A^{l-1}.$$

Faisons tendre Δ vers D. On obtient la proposition suivante :

Choisissons ρ_l^1 points arbitraires sur D et attribuons à $\rho_l^2 - \rho_l^1$ de ces points des tangentes données. Il existe au moins une courbe C_l passant par A, ces points et tangente à ces droites aux points correspondants.

On peut d'ailleurs assurer que

$$\rho_l^2 - \rho_l^1 \leqq \rho_l^1$$

ou

$$(4) \qquad 2 s_A^{l-1} \leqq s_A^l + s_A^{l-2}.$$

c. Considérons sur une droite deux séries linéaires g_n^r $g_n^{\prime r}$ ayant en commun une série g_n^ρ. Elles sont comprises dans la série g_n^n, complète, formée de tous les groupes de n points de la droite.

Si $\rho < r$, c'est-à-dire si ces séries ne sont pas confondues, les séries résiduelles de g_n^r et $g_n^{\prime r}$ par rapport à un point P, *qui n'est pas fixe pour la série g_n^ρ, ne sont pas confondues non plus.*

En effet, les groupes des deux séries g_n^r et $g_n^{\prime r}$ sont représentables par les points de deux espaces linéaires S_r et S_r' à r dimensions plongés dans un espace à n dimensions S_n et ayant en commun un espace S_ρ à ρ dimensions

$$n > r > \rho.$$

Les groupes de la g_n^n contenant le point P sont alors représentés par les points d'un hyperplan S_{n-1}.

Comme P n'est pas un point fixe de g_n^ρ, ni par suite de g_n^r et de $g_n^{\prime r}$, cet hyperplan coupe les espaces S_r et S_r' suivant deux espaces S_{r-1} et S_{r-1}', et S_ρ suivant $S_{\rho-1}$. Or

$$r - 1 > \rho - 1.$$

Par conséquent, il y a des points de S_{r-1} et de S'_{r-1} extérieurs à S_ρ. L'existence de ces points montre que les deux séries résiduelles g_{n-1}^{r-1} et $g_{n-1}'^{r-1}$ ne sont pas confondues.

D'ailleurs il suffit que les deux séries g_n^r et $g_n'^r$ soient identiques pour qu'il en soit de même des séries résiduelles g_{n-1}^{r-1} et $g_{n-1}'^{r-1}$. On peut donc conclure.

La condition nécessaire et suffisante pour que les deux séries résiduelles g_{n-1}^{r-1} *et* $g_{n-1}'^{r-1}$ *soient confondues, est que les deux séries* g_n^r et $g_n'^r$ *le soient.*

2. Soit une courbe gauche algébrique Γ. Faisons passer par une droite quelconque D un plan arbitraire Π_0 qui coupe Γ suivant le système de points A_0.

α. Supposons

$$l \geqq h_1^{A_0}, \qquad s_{A_0}^{l-2} = 0 \quad (^1).$$

Les égalités (1) et (2) donnent dans ces conditions

$$\rho_l^1 = l, \qquad \rho_l^2 = 2l.$$

Prenons l points arbitraires B sur la droite D, et menons par ces points l plans arbitraires P ne contenant pas la droite D, ils coupent Π_0 suivant l droites T_0.

D'après la proposition (b) il existe au moins une C_l de degré l passant par A_0, B et tangente en ces derniers points aux droites T_0.

Faisons tourner le plan Π_0 autour de D. Dans chaque position Π il existera au moins une C_l passant par A, B et tangente en ces derniers points aux droites T, intersections de Π avec les plans P précédents.

Ces différentes courbes C_l, déterminées s'il est nécessaire par d'autres conditions s'exprimant rationnellement en fonction du paramètre qui caractérise la position du plan Π, forment une surface Φ passant par Γ. Nous allons montrer qu'elle ne contient pas D et qu'elle est par suite de degré l.

Si, en effet, Φ contenait D, il faudrait que, dans une position

---

(1) Rappelons que la singularité d'un système de points pour les courbes de degré l est nulle lorsque l est supérieur ou égal à un certain nombre que je désigne par $h_1^{A_0} - 2$.

particulière (au moins) de Π, C_l se décompose en D et une C_{l-1} passant par A. Les points B seraient certainement doubles (au moins) sur la surface, à cause du choix des plans tangents P qui ne contiennent pas la droite D. Les courbes C_{l-1} devraient alors passer par ces l points, ce qui est impossible.

Faisons alors passer par A_0 une courbe C_l arbitraire. Nous savons désormais construire une surface Φ_l contenant Γ et C_l. La méthode précédente montre même que l'on peut disposer des plans tangents P en B pourvu qu'ils passent par les droites T_0.

Par conséquent, le défaut ω_l du système des courbes C_l découpées sur un plan par toutes les surfaces Φ_l de degré l passant par Γ est nul.

Si $l \geqq h_1^A$,

$$\omega_l = 0.$$

β. Supposons $l = h_1^A - 1$.

Les inégalités (1) et (2) donnent alors

$$\rho_l^1 = l, \qquad \rho_l^2 = 2l - s_A^{l-2}.$$

Prenons l points arbitraires $B = B_1 + B_2$ sur la droite D et par les $\rho_l^2 - \rho_l^1$ points B_1 menons autant de plans arbitraires P_1 ne contenant pas D.

On peut faire passer, comme précédemment, au moins une courbe C_l par A_0, B et tangente en B_1 aux traces T_{01} des plans P_1 précédents sur Π_0.

En faisant tourner le plan Π autour de D, ces courbes C_l convenablement déterminées décrivent une surface contenant Γ. Montrons que cette surface ne contient pas D et par suite qu'elle est d'ordre l.

Dans l'hypothèse contraire, il est nécessaire que, dans une position particulière (au moins) du plan variable Π, C_l se décompose en la droite D et une courbe C_{l-1} de degré $l-1$ passant par A. Les points B_1 seront alors nécessairement (au moins) des points doubles de la surface, à cause du choix des plans tangents P_1, C_{l-1} devra par conséquent passer par les points B_1 et y être tangente aux points correspondants. Or

$$\rho_{l-1}^1 = l - 1 - s_A^{l-2}.$$

Si les différentes séries découpées sur D par les C_{l-1} passant par les systèmes A sont confondues, jamais une telle série ne contiendra les $l - s_A^{l-2}$ points B_1 pris arbitrairement et l'hypothèse est à rejeter.

Si, au contraire, ces séries dépendent du paramètre qui détermine la position du plan Π, on peut alors trouver un plan Π tel que la série correspondante découpée sur D par les C_{l-1} contienne

$$\rho_{l-1}^1 + 1 = l - s_A^{l-2} \text{ points arbitraires.}$$

On peut précisément prendre les points B_1.

D'ailleurs, selon l'égalité (3), si l'on mène par plus de

$$l - 1 - s_A^{l-3} + s_A^{l-2}$$

points B_1 des droites arbitraires, il n'existera pas de C_{l-1} contenant A, B_1 et tangente à ces droites en ces derniers points. Or

$$l - 1 - s_A^{l-3} + s_A^{l-2} < l - s_A^{l-2};$$

car selon l'inégalité (4), en remarquant que $s_A^{l-1} = 0$,

$$2 s_A^{l-2} < s_A^{l-3} + s_A^{l-1} + 1.$$

Par suite, il n'existe pas de C_{l-1} passant par A, B_1 et tangente aux plans P_1. La surface Φ est bien de degré l.

Si l'on cherche alors à construire une surface Φ_l passant par Γ et découpant sur Π_0 une courbe C_l donnée contenant A_0, on voit, d'après ce qui précède, que l'on dispose des plans tangents P_1 en B_1, pourvu qu'ils passent par les droites T_{01}. On en conclut comme précédemment

$$\omega_{h_1^k - 1} = 0.$$

3. Pour les valeurs de l considérées dans le paragraphe précédent, les séries découpées sur D par les courbes C_l passant par les systèmes A, étaient complètes et par suite confondues. Si l'on considère maintenant les valeurs suivantes de l, l'égalité (1) montre que ρ_l^1 n'est plus égal à l et que par suite ces séries ne sont plus complètes.

Nous allons donner une *propriété géométrique* T, conséquence de l'hypothèse que ces *séries* quoique incomplètes sont cependant encore *confondues*. Nous verrons ensuite que cette propriété T suppose que l'hypothèse précédente est vérifiée de telle façon que si elle est réalisée, les séries considérées sont bien confondues.

Soient A et a deux systèmes tels que les séries découpées sur une droite D par les courbes C_l passant soit par A, soit par a, aient une série commune (qui peut se réduire à un groupe). Prenons un groupe B de cette série et considérons les séries découpées sur une autre droite Δ par les C_l, passant par A et B ou par a et B.

Pour que les séries résiduelles de ces deux séries par rapport à un point P de Δ soient identiques, il faut et il suffit que ces deux séries soient elles-mêmes identiques (proposition c). Or prenons pour point P [1], l'intersection des deux droites D et Δ. Les séries résiduelles sont découpées sur Δ par les courbes C_{l-1} de degré $l - 1$ passant par A ou a. Par conséquent :

La condition nécessaire et suffisante pour que les séries découpées sur Δ par les C_{l-1} passant par A ou a soient identiques, est que les séries déterminées sur Δ par les C_l passant par A et B ou par a et B soient elles-mêmes identiques.

Faisons alors tendre Δ vers D. La série découpée sur Δ par les courbes C_l passant par A et B (ou par a et B) peut être remplacée par la série des tangentes en B aux courbes de degré l passant par A et B (ou par a et B). On obtient alors la proposition dont nous allons faire usage.

La condition nécessaire et suffisante pour que les séries découpées sur D *par les* C_{l-1} *passant par* A *ou par* a *soient identiques, est que les séries des tangentes en* B *aux courbes* C_l *passant par* A *et* B *ou par* a *et* B *soient elles aussi confondues.*

Nous avons ainsi ramené un problème qui intéressait les courbes de degré $l - 1$ à un problème relatif aux courbes de degré l.

Remarques. — 1° Le système B est astreint à la seule condition d'être un groupe de la série commune aux séries découpées sur D par les C_l passant par A ou a.

2° Nous n'avons considéré que deux systèmes A et a. On voit clairement que la proposition s'étend à un nombre quelconque de

---

[1] P n'est pas un point fixe pour ces diverses séries.

systèmes pourvu que l'hypothèse faite au début soit encore vérifiée, à savoir que les séries découpées sur D par les C_l passant par ces différents systèmes aient au moins un groupe commun B.

Considérons alors de nouveau la courbe Γ et ses sections A par les plans Π passant par D. Projetons la figure d'un point O sur le plan Π_0 et soit a la projection de A.

La série découpée sur D par les C_{l-1} passant par a se confond avec celle découpée sur cette droite par les C_{l-1} de Π passant par A. En ayant égard à cette remarque et à la proposition démontrée précédemment, on peut conclure :

Pour que les courbes C_{l-1} *de degré* $l-1$ *passant par* A_0 *ou par les* A *déterminent la même série sur* D, *il faut et il suffit que les séries des tangentes en* B *aux* C_l *passant par* A_0 *et* B *ou par les* a et B *soient identiques.*

Soit alors $B = B_1 + B_2$ un groupe commun aux séries découpées sur D par les C_l passant par les systèmes A.

Supposons que les C_{l-1} *passant par les systèmes* A *découpent sur* D *la même série.*

D'après ce qui précède, les séries des tangentes en B aux courbes C_l passant par les systèmes $a + B$ sont identiques et de dimension $\rho_l^2 - \rho_l^1$. Menons par les $\rho_l^2 - \rho_l^1$ points B_1 de B des plans arbitraires P_1 ne contenant pas D et coupant Π_0 suivant les droites T_{01}. On montrera aisément, comme dans le paragraphe 2 (en remarquant que $\rho_l^2 - \rho_l^1 = \rho_{l-1}^1 + 1$ et que $\rho_{l-1}^1 \geqq \rho_{l-1}^2 - \rho_{l-1}^1$), qu'il existe au moins une surface Φ_l de degré l contenant Γ, B et tangente en B_1 aux plans P_1.

Faisons passer les plans P_1 par le point O. *Les plans tangents en* B_2 *à la surface* Φ_l *ainsi décrite passent aussi par* O.

En effet, la projection de la section Φ_l par un plan Π sur le plan Π_0 est une courbe de degré l passant par un système a, B et tangente en B_1 aux droites T_{01}. Elle sera tangente en B_2 aux droites T_{02} déterminées par les droites T_{01}. Or ces droites sont indépendantes du système a et par suite du plan Π, puisque toutes les séries de tangentes en B aux C_l passant par les systèmes $a + B$ sont identiques. Les droites T_{02} sont donc les projections des tangentes en B_2 aux sections de Φ_l par les plans Π. Cela signifie que les plans tangents en B_2 passent aussi par O. C. Q. F. D.

Réciproquement s'il existe, quelle que soit la courbe C_l passant par A_0 et B (c'est-à-dire *quel que soit le système des droites* T_{01}), un point O et une surface Φ_l contenant Γ, C_l et admettant en B des plans tangents concourant en O, on peut assurer que les séries de tangentes en B aux courbes C_l passant par les systèmes $a + B$ sont identiques.

Toutes ces séries ont en effet en commun une série de leur dimension à savoir, le nombre des points B_1 : $\rho_l^2 - \rho_l^1$.

On peut donc conclure cette étude en énonçant la propriété suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour que les séries découpées sur D *par les* C_{l-1} *passant par les systèmes* A *soient identiques, est que l'on puisse mener par un système* T_{01} *de droites arbitraires issues de* B_1, *des plans concourant en* O *de façon que les plans tangents correspondant en* B_2 *concourent en ce même point.*

C'est la propriété géométrique T à laquelle il est fait allusion au début de ce paragraphe.

Terminons en faisant une remarque essentielle pour la suite du raisonnement.

S'il existe un tel point O *extérieur à* D, *tous les points de l'espace, extérieurs à* D, *jouissent de la même propriété.*

Soit en effet un autre point O_1 et considérons les projections a_1 des systèmes A sur le plan Π_0 à partir de ce nouveau point. D'après notre hypothèse, les C_{l-1} passant par A_0 et A découpent la même série sur D. Il en est donc de même des séries découpées par les C_{l-1} passant par A_0 ou par les systèmes a_1. Or cela demande que les séries de tangentes en B aux C_l passant par A_0 et B ou par les a_1 et B, soient identiques. Ce qui précède montre alors que si l'on mène par B_1 des plans passant par O_1, les plans tangents correspondant en B_2 contiennent aussi O_1.

4. Nous allons maintenant montrer que la propriété géométrique T, que nous venons de signaler est vérifiée en général pour les premières valeurs de l qui suivent $h_1^A - 1$.

Nous procèderons dans ce but de la façon suivante : *Nous supposerons que le nombre des points* B_2 (points où le plan tangent n'est pas arbitraire) *est inférieur ou égal à* 3. Pour préciser, nous commencerons par supposer ce nombre égal à 3. Dans ces conditions, si l'on fait passer les plans P_1 par un point O_1, les trois plans P_2 correspondants se couperont en un point P_2. Nous aurons ainsi une correspondance algébrique entre O_1 et O_2. Nous montrerons alors qu'elle se réduit à l'identité, c'est-à-dire que les points O_1 et O_2 sont toujours confondus.

Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées d'un point O_1. Les équations des plans passant par O_1 et les droites B_1, T_{01}, ont leurs coefficients fonctions linéaires de x_1, y_1, z_1.

L'ensemble des trois plans tangents P_2 en B_2 s'expriment rationnellement en fonction de x_1, y_1, z_1. En particulier le point O_2 où ces trois plans se coupent, a des coordonnées x_2, y_2, z_2, fonctions rationnelles de x_1, y_1, z_1.

$$x_2 = F_1(x_1, y_1, z_1), \qquad y_2 = F_2(x_1, y_1, z_1), \qquad z_2 = F_3(x_1, y_1, z_1).$$

On obtiendra un point de coïncidence de cette correspondance en résolvant les équations

$$x = F_1(x, y, z), \qquad y = F_2(x, y, z), \qquad z = F_3(x, y, z).$$

Or nous savons d'après la dernière remarque du paragraphe précédent que s'il existe un tel point O extérieur à D, tous les points de l'espace jouissent de la même propriété. Par conséquent, ou ces trois surfaces ne se coupent que suivant la droite D, ou elles s'évanouissent, c'est-à-dire que l'on obtient

$$x = x, \qquad y = y, \qquad z = z.$$

Dans la seconde hypothèse, nous voyons que la propriété géométrique T est vérifiée.

Considérons maintenant la première hypothèse.

Supposons que la droite D ait pour équations $y = 0$, $z = 0$.

Les équations de la correspondance entre O_1 et O_2 sont de la forme [1]

$$x_2 = x_1 + \frac{By_1 + Cz_1}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d},$$

$$y_2 = y_1 + \frac{B'y_1 + C'z_1}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d},$$

$$z_2 = z_1 + \frac{B''y_1 + C''z_1}{ax_1 + by_1 + cz_1 + d}.$$

(1) Si l'on fait le calcul sans jamais simplifier, on doit nécessairement trouver

On le voit en faisant les remarques suivantes :

a. La droite D est le seul lieu de points de coïncidence, et il n'y a pas de points de coïncidence isolés extérieurs à D (à cause de la dernière proposition du paragraphe 3).

Les numérateurs doivent ainsi être trois plans passant par la droite D de façon qu'il n'y ait pas de points de coïncidence à distance finie extérieurs à D. Les dénominateurs doivent être trois plans de façon qu'il n'y ait pas de points de coïncidence à l'infini.

b. Les trois plans des dénominateurs sont confondus, car si le point O_1 était dans le plan du dénominateur de x_2 sans être dans les deux autres [1], le point O_2 serait à l'infini sur D ce qui est impossible puisque la surface Φ_l ne contient pas la droite D.

Approfondissons maintenant l'étude de cette correspondance en remarquant que, lorsque le point O_1 tend vers un point P_1, le point O_2 tend vers le *même* point P_2 *quelle que soit la direction suivant laquelle* O_1 *s'est rapproché de* P_1.

Cela est dû à la manière dont on construit le point O_2 à partir de O_1. On pourrait craindre qu'il n'en soit plus ainsi quand P_1 est dans le plan Π_0 ou sur la droite D. Montrons qu'il n'en est rien.

Supposons par exemple que P_1 se trouve sur D. Soient O_1 et O'_1 deux points infiniment voisins de P_1 qui tendent vers P dans des directions différentes; O_1 et O'_1 sont ainsi infiniment voisins l'un de l'autre. Il en est par suite de même de leurs points homologues O_2 et O'_2. Ces derniers tendront bien vers le même point P_2, de la droite D.

α. Supposons b et c différents de zéro.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées d'un point P_1 communs aux deux plans $By + Cz = 0$ et $ax + by + cz + d = 0$: Si $\alpha\beta\gamma$ sont les

---

en facteur aux numérateurs et dénominateurs des expressions rationnelles qui donnent x_2, y_2, z_2 en fonction de x_1, y_1, z_1, l'équation du plan π_0. En effet, quand O_1 est dans ce plan, O_2 est indéterminé. Nous supposons ici que cette simplification a été faite.

[1] Remarquons explicitement que les deux plans $y = 0$, $z = 0$ jouent le même rôle dans la question et que, par suite, si le plan du dénominateur de y_2 était confondu avec celui des x_2, il devrait en être de même du plan du dénominateur de z_2.

paramètres de la direction suivant laquelle O_1 se rapproche de P.

$$x_1 = \xi + \alpha\rho, \quad y_1 = \eta + \beta\rho, \qquad z_1 = \zeta + \gamma\rho.$$

En particulier

$$x_2 = \xi + \alpha\rho + \frac{\rho(B\beta + C\gamma)}{\rho(a\alpha + b\beta + c\gamma)}.$$

Il est nécessaire que la fraction soit indépendante de $\alpha\beta\gamma$. Cela exige

$$a = 0, \qquad B = kb, \qquad C = kc,$$

en raisonnant de même avec y_2 et z_2, on arrive à

$$x_2 = x_1 + \frac{k(by_1 + cz_1)}{by_1 + cz_1 + d},$$
$$y_2 = y_1 + \frac{k'(by_1 + cz_1)}{by_1 + cz_1 + d},$$
$$z_2 = z_1 + \frac{k''(by_1 + cz_1)}{by_1 + cz_1 + d}.$$

Si k est différent de zéro, on arrive à une impossibilité puisque le plan $by + cz = 0$ serait lieu de points de coïncidence. (Si d était nul, ce serait alors le plan de l'infini). Par conséquent $k = 0$ et les points O_1 et O_2 sont toujours confondus.

β. Supposons b et c nuls.

Le raisonnement précédent montre que a est nul aussi. Les équations de la correspondance deviennent :

$$x_2 = x_1 + B\,y_1 + C\,z_1,$$
$$y_2 = y_1 + B'y_1 + C'z_1,$$
$$z_2 = z_1 + B''y_1 + C''z_1.$$

Or, remarquons que si l'on effectue sur la figure entière une transformation homographique générale, les homologues O'_1 et O'_2 de O_1 et O_2 jouent, par rapport à la courbe Γ' homologue de Γ, le même rôle que O_1 et O_2 par rapport à Γ. La correspondance entre O'_1 et O'_2 doit donc être analogue à celle entre O_1 et O_2. En particulier elle doit admettre aussi le plan de l'infini comme plan double. Or, cela exige que tous les plans de l'espace soient des plans doubles pour la correspondance O_1, O_2. Les points O_1 et O_2 sont donc toujours confondus.

En résumé, *lorsque le nombre des points* B_2 *est égal à trois, si les plans tangents* P_1 *en* B_2 *concourent en un point* O, *les plans* P_2 *tangents en* B_2 *passent aussi par* O.

Les conclusions restent les mêmes si le nombre des points B_2 est un ou deux. On peut d'ailleurs ramener ces cas au précédent de la façon suivante : Supposons qu'il y ait deux points B_2. Les plans P_2 se coupent suivant la droite Q_2. Faisons passer par O_1 et une droite Δ fixée arbitrairement un plan qui coupe Q_2 en O_2. Il est clair que les coordonnées de O_2 s'expriment rationnellement en fonction de celles de O_1. Il suffit alors d'étudier cette correspondance entre O_1 et O_2 en suivant la méthode précédente. De même, s'il n'y avait qu'un seul plan P_2, on joindrait O_1 à un point Ω fixé arbitrairement. Cette droite couperait P_2 en O_2. C'est la correspondance entre O_1 et O_2 qu'on étudierait.

5. Appliquons ces résultats aux valeurs de l qui suivent $h_1^A - 1$,

α. Supposons $l = h_1^A - 2$.

Nous avons vu que le nombre des points B_2, quand $l = h_1^A - 1$, est égal à $s_A^{h_1^A-3}$. Nous pourrons appliquer le résultat précédent si

$$(1) \qquad s_A^{h_1^A-3} \leqq 3.$$

Cela exige (¹) simplement que k_3^A soit différent de h_3^A dans le cas où les trois caractéristiques h_1^A, k_1^A et h_3^A sont égales. Dans ces conditions, les courbes $C_{h_1^A-2}$ de degré $h_1^A - 2$ passant par les divers systèmes A découpent sur D la même série.

Nous allons construire les surfaces $\Phi_{h_1^A-2}$ de degré $h_1^A - 2$ qui contiennent Γ.

(¹) Rappelons que la singularité d'un système A, en nous bornant aux systèmes réguliers, est donnée par la formule,

$$s_A^l = \varphi(h_1^A - l) + \varphi(k_1^A - l) + \varphi(h_3^A - l) + \varphi(k_3^A - l) + \ldots,$$

où h_1^A, h_1^A, k_3^A, k_3^A, ... sont les caractéristiques impaires du système A,

$$\varphi(u-l) = \frac{(u-l-1)(u-l-2)}{2} \text{ si } l < u-2, \qquad \varphi(u-l) = 0 \text{ si } l \geqq u-2.$$

Remarquons que les égalités (1) et (2) nous donnent

$$\rho^1_{h_1^A-2} = h_1^A - 2 - s_A^{h_1^A-3}, \qquad \rho^2_{h_1^A-2} = 2(h_1^A - 2) - s_A^{h_1^A-4}$$

Prenons alors sur la droite D un système arbitraire $B_1 + B'_1$ de $\rho^1_{h_1^A-2}$ points. Ces points déterminent les $s_A^{h_1^A-3}$ autres points B'_2 qui constituent avec $B_1 + B'_1$, l'intersection avec D des $C_{h_1^A-2}$ passant par un système A.

Menons par les $h_1^A - 2 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3}$ points B_1, autant de plans arbitraires P_1, ne contenant pas la droite D. Il existe au moins une $C_{h_1^A-2}$ passant par A, B, et tangente en B_1 aux traces T_1 des plans P_1 précédents sur le plan Π.

En déterminant convenablement ces courbes, elles décrivent une surface Φ quand le plan Π tourne autour de D. Nous allons montrer que cette surface est de degré $h_1^A - 2$.

Nous suivrons dans ce but la même méthode que pour le cas $l = h_1^A - 1$. Nous allons montrer que les $C_{h_1^A-2}$ ne peuvent pas se décomposer en la droite D et une $C_{h_1^A-3}$ passant par A. En effet, dans une telle hypothèse, les points B_1 seraient doubles (au moins) sur la surface et $C_{h_1^A-3}$ devrait passer par ces points et y être tangente aux plans correspondants P_1.

Or, la série découpée sur D par les $C_{h_1^A-3}$ passant par un système A, a la dimension

$$h_1^A - 3 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3}.$$

Si les différentes séries découpées sur D par les $C_{h_1^A-3}$ passant par les systèmes A sont confondues, jamais une telle série ne contiendra les $h_1^A - 2 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3}$ points *arbitraires* B_1 et l'hypothèse doit être rejetée.

Sinon ces séries dépendent du paramètre qui détermine la position du plan Π. On peut alors trouver un plan tel que la série découpée sur D par les $C_{h_1^A-3}$ correspondantes contienne

$$\left(h_1^A - 3 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3}\right) + 1 = h_1^A - 2 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3} \text{ points arbitraires.}$$

On peut précisément prendre les points B_1.

D'ailleurs, d'après l'égalité (3), si l'on mène par plus de

$$h_1^A - 3 - s_A^{h_1^A-5} + s_A^{h_1^A-4},$$

points B des droites arbitraires, il n'existera pas de $C_{h_1^A-3}$ passant par A, B et tangente à ces droites. Or

$$h_1^A - 3 - s_A^{h_1^A-5} + s_A^{h_1^A-4} + 1 \leqq h_1^A - 2 - s_A^{h_1^A-4} + s_A^{h_1^A-3},$$

car

$$2\, s_A^{h_1^A-4} \leqq s_A^{h_1^A-3} + s_A^{h_1^A-5}.$$

L'hypothèse est donc de nouveau à rejeter et Φ ne contenant pas D est bien de degré $h_1^A - 2$. On en conclut, comme précédemment,

$$\omega_{h_1^A-2} = 0.$$

Le même raisonnement montre en outre que d'une façon générale, *si les courbes C_l d'ordre l passant par les systèmes* A *découpent sur* D *la même série*,

$$\omega_l = 0.$$

D'une façon plus précise : *La série commune aux diverses séries découpées sur* D *par les courbes C_l de degré l passant par les systèmes* A, *est la série déterminée sur* D *par les surfaces Φ_l de degré l passant par* Γ (¹).

Pour pouvoir abaisser la limite inférieure l_0 à partir de laquelle ω_l *est toujours* nul, il faut considérer le système de points $B_2 = B'_2 + B'_1$. Ils sont au nombre de

$$s_A^{h_1^A-4} - s_A^{h_1^A-3}.$$

Ce nombre est inférieur ou égal à trois si $h_1^A > k_1^A + 1$ ou si $h_1^A = k_1^A + 1$, lorsque $k_1^A > h_3^A$. Dans ces conditions, on peut assurer

$$\omega_{h_1^A-3} = 0.$$

En résumé, pour toute courbe gauche Γ, *de section plane* A, *on*

(¹) La démonstration se fait de la même manière. Elle se ramène en définitive à la constatation que l'on dispose d'un plus grand nombre de tangentes arbitraires aux points d'intersection d'une droite D avec une C_l passant par A, qu'aux points d'intersection de D avec une C_{l-1} passant par A.

En désignant par r_l^1 et r_l^2 les dimensions des séries communes aux diverses séries découpées sur une droite D et deux droites D et Δ, on a comme précédemment les deux propositions

$$r_l^2 - r_l^1 = r_{l-1}^1 + 1, \quad r_{l-1}^1 \geqq r_{l-1}^2 - r_{l-1}^1.$$

peut affirmer que : si $h_1^A > k_1^A + 1$ ou $h_1^A = k_1^A + 1$, $k_1^A > h_3^A$.

$$l_0 = h_1^A - 3;$$

si $h_1^A = k_1^A + 1$, $k_1^A = h_3^A$ ou $h_1^A = k_1^A$, $h_3^A > k_3^A$ si $k_1^A = h_3^A$,

$$l_0 = h_1^A - 2;$$

si $h_1^A = k_1^A = h_3^A = k_3^A$,

$$l_0 = h_1^A - 1.$$

$$l \geqq l_0, \qquad \omega_l = 0.$$

Remarques. — 1° Les courbes Γ considérées peuvent avoir des points multiples, à condition qu'ils satisfassent à la propriété suivante.

La singularité d'une section par un plan passant par un point multiple est égale à celle d'une section par un plan arbitraire, pour des valeurs suffisamment petites de l.

2° La courbe Γ peut être composée de plusieurs parties indécomposables, à condition que les points de rencontre de ces parties (s'ils existent) satisfassent à la propriété précédente.

3° Nous nous sommes placés, dans ce qui précède, dans le cas où la section plane A présentait une certaine spécialité. Disons seulement que, dans le cas où A serait un système général [1], de première courbe minima C_{h_0}, on verrait en reprenant le même raisonnement que si

$$l \geqq h_0 + 1, \qquad \omega_l = 0.$$

On peut même montrer que dans le cas général, lorsque le degré de la courbe Γ satisfait à une certaine inégalité, le défaut ω_{h_0} est aussi nul.

Remarquons en effet que $\rho^1_{h_0+1} = h_0 + 1$. D'autre part,

$$\rho^2_{h_0+1} - \rho^1_{h_0+1} = \rho^1_{h_0} + 1.$$

Or, la dimension de la série découpée sur une droite par les courbes minima de A est précisément égale à la dimension du système linéaire formé par ces courbes,

$$\rho_{h_0} = \frac{h_0(h_0+3)}{2} - A.$$

[1] Un système est dit général lorsque sa singularité pour sa première courbe minima est nulle.

Pour que ω_{h_0} soit nul, dans le cas général (c'est-à-dire quelle que soit la courbe gauche passant par le système A), il faut et il suffit que

$$h_0+1-\left[\frac{h_0(h_0+3)}{2}-A+1\right]\leqq 3.$$

ou

$$A\leqq\frac{h_0(h_0+1)}{2}+3.$$

D'autre part, comme C_{h_0} est la courbe minima de A, on a les inégalités

$$\frac{(h_0-1)(h_0+2)}{2}<A\leqq\frac{h_0(h_0+3)}{2}.$$

On en conclut

$$\frac{h_0(h_0+1)}{2}\leqq A\leqq\frac{h_0(h_0+1)}{2}+3.$$

Dans ces conditions

$$\omega_{h_0}=0.$$

6. *Application à la théorie des Surfaces.* — Considérons une surface présentant comme seule singularité une ou plusieurs courbes doubles Γ satisfaisant aux conditions exposées dans les remarques 1°, 2°, 3°.

Soit N son degré. Coupons cette surface F_N par un plan. La section plane C_N admettra pour points doubles les points d'intersection de Γ et du plan. Par conséquent, en supposant C_N indécomposable,

$$N\geqq h_1^A+1.$$

On sait en effet que le système des points doubles d'une courbe de degré N impose des conditions toutes indépendantes aux adjointes d'ordre N — 3. N — 3 est ainsi supérieur ou égal à h_1^A-2 et l'inégalité précédente en résulte.

Si l'on désigne par P_g et P_a le genre géométrique et le genre arithmétique de la surface F_n, on sait que ([1])

$$P_g-P_a=\omega_{N-3}+\omega_{N-2}+\ldots.$$

Si $h_1^A=k_1^A=h_3^A=k_3^A$ alors $N-2\geqq h_1^A-1$ et $\omega_{h_1^A-1}=0$, de sorte

([1]) Picard et Simart, *Fonctions de deux variables*, t. II, p. 88.

que

$$P_g - P_a = \omega_{N-3}.$$

Nous retrouvons ainsi un résultat qui a d'ailleurs une valeur plus générale et qui est indiquée dans le livre de MM. Picard et Simart, t. II, p. 438.

Dans tous les autres cas, ω_{N-3} est nul, car $\omega_{h_1^A-1} = 0$,

$$P_g - P_a = 0.$$

La surface est régulière.

Remarques. — 1° Nous avons supposé que A était un système d'une certaine spécialité. On verrait que les résultats sont identiques si A était un système général.

2° Si $h_1^A > k_1^A + 1$ ou $h_1^A = k_1^A + 1$ avec $k_1^A > h_3^A$, on obtient $\omega_{N-4} = 0$. *Le système des surfaces, adjointes de* F_N *d'ordre* N — 4, *découpe sur un plan quelconque le système complet des adjointes d'ordre* N — 4 *à la section plane.*

3° D'une façon générale, *seule la surface de plus petit degré admettant les lignes* Γ *comme lignes doubles, peut être irrégulière.*

On peut donner encore une autre forme à cet énoncé :

Les surfaces admettant les lignes Γ *comme courbes doubles et telles que leurs sections planes soient des courbes normales* (¹), *sont régulières.*

DEUXIÈME PARTIE.

7. Soit $B = B_1 + B_2$ l'intersection de la droite D avec une surface Φ_l de degré l contenant Γ. Dans le plan Π_0 cette surface est tangente en B au système de droites $T_0 = T_{01} + T_{02}$. Considérons toutes les surfaces Φ_l passant par Γ, B et tangentes en ces points aux droites T. Nous désignerons comme précédemment par B_1 un

(¹) On sait en effet que c'est seulement pour les courbes normales que le système des points doubles d'une courbe C_N impose des conditions toutes indépendantes aux adjointes d'ordre N — 4. Par suite, $N - 4 \geqq h_1^A - 2$ ou $N \geqq h_1^A + 2$. On en conclut que ω_{N-3} est nul.

Cette proposition a déjà été donnée par Halphen dans un cas particulier. Nous n'insisterons pas ici sur la démonstration de cette propriété.

système de points de B où l'on peut imposer à la surface Φ_l des plans tangents arbitraires astreints seulement à passer par les droites T_{01}, B_2 èst le système formé par les autres points. Nous avons vu que lorsque le nombre des points B_2 n'est pas supérieur à trois, si les plans tangents P_1 en B_1 concourent en un point O, les plans tangents correspondants P_2 en B_2 passent aussi par ce point. Dans ces conditions, le défaut ω_{l-1} est nul. Supposons maintenant que le nombre des points B_2 est supérieur à trois. Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner une méthode algébrique permettant de calculer ω_{l-1}.

Faisons passer les plans P_1 par le point O_1 de coordonnées x_1, y_1, z_1. L'ensemble des plans P_2 s'exprime rationnellement en fonction de x_1, y_1, z_1 et des coefficients angulaires des droites T_{01}, $\nu_i (i = 1, 2, \ldots, \alpha)$ (tangentes des angles qu'elles font avec la droite D).

Il est d'abord nécessaire que les $\beta + 3$ plans $P_2 (\alpha + \beta + 3 = l)$ concourent en un point O_2. On voit aisément que cela implique β relations rationnelles en $x_1, y_1, z_1; \nu_i$.

$$\Phi_1(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i) = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_\beta = 0.$$

Les Φ ne sont fonctions des coefficients des équations de la courbe Γ que par l'intermédiaire des expressions indépendantes $A_1, A_2, \ldots, A_j$.

Dans ces conditions, le point O_2 a des coordonnées x_2, y_2, z_2 qui s'expriment rationnellement en fonction de $x_1, y_1, z_1; A_j; \nu_i$;

$$x_2 = x_1 + \frac{P_1(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)}{Q_1(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)},$$
$$y_2 = y_1 + \frac{P_2(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)}{Q_2(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)},$$
$$z_2 = z_1 + \frac{P_3(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)}{Q_3(x_1, y_1, z_1; A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i)}.$$

Les P et Q sont aussi des fonctions des coefficients de la courbe Γ par le seul intermédiaire des A.

D'après la dernière remarque du paragraphe 3, si les $\beta + 3$ surfaces

$$\Phi_1 = 0, \qquad \Phi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Phi_\beta = 0; \qquad P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad P_3 = 0.$$

ont un point commun, *elles doivent s'évanouir*.

Or, nous écrirons que ces surfaces se coupent en un point en égalant à zéro β résultants

$$R_1(A_1, A_2, \ldots, A_j; \nu_i) = 0, \qquad R_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\beta = 0.$$

Ces équations définissent une certaine variété $V_{\gamma-\beta}$ de l'espace S_γ à γ dimensions des A, variété qui dépend en général des coefficients angulaires ν_i des droites T_{01}. Quand $A_1, A_2, \ldots, A_\gamma$ sont les coordonnées d'un point de cette variété, les expressions Φ_1, $\Phi_2, \ldots, \Phi_\beta$; P_1, P_2, P_3 s'évanouissent. On peut par suite conclure :

$$\begin{aligned}
P_1 &= R_1 P_1'^1 + R_2 P_1'^2 + \ldots + R_\beta P_1'^\beta,\\
P_2 &= R_1 P_2'^1 + R_2 P_2'^2 + \ldots + R_\beta P_2'^\beta,\\
P_3 &= R_1 P_3'^1 + R_2 P_3'^2 + \ldots + R_\beta P_3'^\beta,\\
\Phi_i &= R_1 \Phi_i'^1 + R_2 \Phi_i'^2 + \ldots + R_\beta \Phi_i'^\beta \qquad (i = 1, 2, \ldots, \beta).
\end{aligned}$$

Les équations $R_i = 0$ sont des fonctions symétriques des ν_i. On peut donc faire apparaître dans ces expressions les fonctions symétriques fondamentales des ν_i

$$s_1 = \sum_1^\alpha \nu_i, \qquad \ldots, \qquad s_\alpha = \nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\alpha.$$

Nous allons montrer que l'on peut s'arranger de façon que *les* R_i *soient des expressions linéaires des* s_j.

Les équations $R_i = 0$ définissent la série linéaire g, commune à toutes les séries de tangentes en B_1, aux courbes C_l de degré l, passant par les systèmes a et B. Les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\alpha$ sont donc racines de l'équation

$$f(\nu, t_1, t_2, \ldots, t_h) = 0,$$

où les paramètres $t_1, t_2, \ldots, t_h$ entrent au premier degré (dans leur ensemble).

Les fonctions $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ sont ainsi des fonctions linéaires de $t_1, t_2, \ldots, t_h$.

Considérons alors l'espace S_α des $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$. A tout système $\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_\alpha$ correspond un point de cet espace et réciproquement. Mais remarquons que si l'équation $f = 0$ admet une racine nulle, toutes les autres le seront aussi, car alors la courbe C_l correspondante rencontre la droite D en $l+1$ points et se décompose en la droite D et une C_{l-1} passant par a. Par conséquent, les points de l'hyperplan $s_\alpha = 0$, sauf l'origine des coordonnées, ne donnent pas de groupes de la série g.

Regardons les $R_i = 0$ comme les équations d'hypersurfaces de l'espace S_α. Ces hypersurfaces se coupent suivant un espace linéaire qui correspond à la série g.

Si ces surfaces ne se coupent que suivant cet espace, on peut remplacer (si cela est nécessaire) les équations $R_i = 0$ par des équations linéaires en $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$.

Si ces surfaces se recoupent suivant une autre variété V. Comme la série g est indécomposable, il faut que cette variété se trouve dans l'hyperplan $s_\alpha = 0$. On peut alors l'éliminer par des combinaisons linéaires convenables des R de telle façon que les nouvelles hypersurfaces ne se rencontrent plus que suivant l'espace précédent. Et comme précédemment on peut leur substituer (si cela est nécessaire) les équations de cet espace.

Nous pouvons donc assurer que, de toute manière, on peut s'arranger de façon que les R soient des fonctions linéaires des s_1, $s_2, \ldots, s_\alpha$.

Le calcul de la dimension de la série commune aux séries tangentes en B aux courbes C_l passant par les systèmes a et B, est ainsi ramené à la discussion d'un système d'équations linéaires en $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$;

$$R_1(A_1, A_2, \ldots, A_j;\ s_1, s_2, \ldots, s_\alpha) = 0, \qquad R_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\beta = 0.$$

Soit β_1 le nombre des équations R indépendantes (par rapport aux s) quand les A satisfont à certaines relations :

$$H_1(A_1, A_2, \ldots, A_j) = 0, \qquad H_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad H_{\delta_1} = 0.$$

Montrons que l'on a précisément dans ces conditions

$$\omega_{l-1} = \beta_1.$$

En effet, la dimension de la série commune aux séries découpées sur D par les courbes C_{l-1} passant par les systèmes A, c'est-à-dire de la série déterminée sur D par les surfaces Φ_{l-1} contenant Γ, sera avec nos notations

$$\rho_{l-1}^1 - \beta_1.$$

Si N_{l-1} est la dimension du système complet des C_{l-1} passant par A, celle du système des courbes astreintes à passer par un groupe de la série découpée sur D sera $N_{l-1} - \rho^1_{l-1}$. Par conséquent, les Φ_{l-1} passant par Γ découpant sur le plan Π un système de courbes de degré $l - 1$, de dimension

$$N_{l-1} - \rho^1_{l-1} + \rho^1_{l-1} - \beta_1,$$

ce qui montre bien que

$$\omega_l = \beta_1. \qquad \text{(C. Q. F. D.)}$$

On voit ainsi que si certaines relations entre les coefficients des équations de la courbe Γ sont vérifiées, on peut abaisser le nombre l_0 trouvé précédemment.

Ces expressions H, ou ces systèmes d'expressions H, définissent dans un sens large des variétés covariantes par rapport aux transformations projectives de la courbe.

8. Donnons un exemple précis de cet abaissement qui montrera en outre combien la question est liée à la réduction de la courbe Γ (¹).

Considérons une courbe Γ, accompagnée de sa suite de courbes réduites. Coupons le tout par un plan Π et soient A et a les sections planes de Γ et de son adjointe γ.

Si Γ et γ sont les degrés des surfaces correspondantes passant par Γ et γ, on a la propriété suivante :

$$\omega^{\Gamma}_{L} = \omega^{\gamma}_{\lambda}.$$

Les défauts des systèmes de courbes découpés sur un plan par les surfaces correspondantes Φ_L et Φ_λ passant respectivement par Γ et γ, sont égaux.

Soient en effet R et R′ les dimensions des systèmes de

(¹) Les deux surfaces de plus petit degré qui peuvent, l'une passer par Γ, l'autre contenir Γ sans se décomposer en la précédente et une surface complémentaire, sont les deux *surfaces minima de* Γ. Elle se recoupent suivant la courbe Γ_1, *première réduite de* Γ. La première réduite Γ_2 de Γ_1 est la *deuxième reduite* de Γ. L'ensemble des réduites de Γ constitue sa *réduction*. La première surface minima de Γ_1 recoupe celle de Γ suivant la *courbe adjointe* γ à Γ. L'ensemble des adjointes successives constitue la *réduction adjointe* de Γ.

courbes C_L et C_λ passant par A et a respectivement. En exprimant de deux manières la dimension de la série qu'elle découpe sur C_n, trace de la première surface minima F_n de Γ, on obtient l'égalité

$$R - \frac{(L-n+1)(L-n+2)}{2} = R' - \frac{(\lambda-n+1)(\lambda-n+2)}{2}.$$

où l'expression $\frac{(u-n+1)(u-n+2)}{2}$ doit être considérée comme nulle si $u < n$.

Soit, d'autre part, ρ la dimension de la série découpée sur C_n par les surfaces Φ_L passant par Γ ou par les Φ_λ passant par γ,

$$\rho = R - \omega_L^\Gamma - \frac{(L-n+1)(L-n+2)}{2} = R' - \omega_\lambda^\gamma - \frac{(\lambda-n+1)(\lambda-n+2)}{2}.$$

On justifie aisément cette égalité en remarquant que les surfaces Φ_L passant par l'intersection totale de F_n et F'_L découpent sur le plan le système complet des courbes C_L passant par l'intersection totale de C_n et C'_L.

On en conclut, en retranchant membre à membre ces deux égalités,

$$\omega_L^\Gamma = \omega_\lambda^\gamma.$$

Considérons alors la suite des courbes $\gamma, \Gamma_2, \gamma_2, \ldots$ constituant la réduction adjointe de Γ.

$$\omega_L^\Gamma = \omega_\lambda^\gamma = \omega_{L_2}^{\Gamma_2} = \omega_{\lambda_2}^{\gamma_2} = \ldots.$$

Supposons alors que la première courbe réduite Γ_1 admette une première surface minima F_{n_1} qui découpe sur le plan Π la première courbe minima C_{n_1} de A_1, section plane de Γ_1. Comme k_1^A correspond à h_1^a dans cette hypothèse, on peut écrire d'après la proposition précédente

$$\omega_{k_1^A-\varepsilon}^\Gamma = \omega_{h_1^a-\varepsilon}^\gamma \qquad (\varepsilon = 1, 2, 3).$$

Or, nous avons vu que

$$\omega_{h_1^a-\varepsilon}^\gamma = 0.$$

Par conséquent, la valeur minimum l_0 relative à la courbe Γ est, dans ce cas,

$$l_0 = k_1^A - \varepsilon.$$

ε peut prendre suivant les circonstances les valeurs 1, 2 et 3 comme nous savons déjà.

Ainsi, la présence d'une première réduite Γ_1 admettant une première surface minima F_{n_1} d'ordre égal au degré de la première courbe minima de A_1, abaisse (en général) l'ordre l_0 à partir duquel les défauts ω_l sont nuls.

Considérons la réciproque de cette propriété : si une courbe Γ est telle que lorsque l est supérieur ou égal à $k_1^A - \varepsilon$, ω_l est nul, peut-on assurer que la première surface minima de Γ_1 découpe sur un plan la première courbe minima de sa section plane? Cette propriété est probalement exacte, mais je n'ai pas pu la démontrer, dans des conditions générales.

On peut maintenant remarquer que, lorsque la courbe Γ n'est pas congrue au plan [1], c'est seulement *pour les premières courbes réduites* Γ_{2i+1} de Γ que le fait précédent se produit.

Supposons par exemple que C_{m_1} section de F_{m_1}, deuxième surface minima de Γ_1, par Π, ne soit pas la deuxième courbe minima de A_1. Nous allons montrer que F_{n_3}, première surface minima de Γ_3 découpe sur le plan Π une courbe C_{n_3} qui n'est pas minima pour A_3.

En effet, à la courbe $C_{n'_3}$, première courbe minima de A_3, correspond la deuxième courbe minima $C_{m'_1}$ de A_1 et $m'_1 \leqq m_1$ [2].

Au contraire, à la surface F_{n_3} correspond la surface $F_{h_2^{\Gamma_1}}$ passant par Γ_1 et

$$h_2^{\Gamma_1} \geqq m_1.$$

Par conséquent

$$n_3 > n'_3 \quad (^3).$$

A fortiori si C_{n_1} n'était pas première courbe minima pour A_1, C_{n_3} ne le serait pas pour A_3.

Nous dirons que Γ *est congrue au plan jusqu'à la* $k^{\text{ième}}$ *adjointe de* Γ_1 si la première surface minima de cette adjointe

---

(1) Je dis qu'une courbe est *congrue au plan* quand les surfaces minima d'une courbe réduite *quelconque* de Γ découpent sur un plan les courbes minima de la section plane de cette courbe.

(2) Pour la démonstration, se reporter aux *Annales de Toulouse*, t. XVI.

(3) On en conclut aussi que la première surface minima de la première adjointe de Γ, ne découpe pas sur le plan Π la première courbe minima de sa section plane.

découpe sur un plan la première courbe minima de sa section plane, et si ce fait ne se renouvelle pas pour la $(k+1)^{\text{ième}}$ adjointe.

D'après la remarque précédente, cette propriété est vérifiée pour les courbes adjointes de rang inférieur à k.

(Dans ce langage, Γ_1 est la $0^{\text{ième}}$ adjointe de Γ_1.)

Dans ces conditions, on obtient les résultats suivants :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } k = 2i, & l_0 = k^{\mathrm{A}}_{2i+1} - \varepsilon \\ \text{si } k = 2i+1, & l_0 = h^{\mathrm{A}}_{2i+3} - \varepsilon \end{array}\right. \qquad \varepsilon = 1, 2, 3.$$

Pour $l \geqq l_0$,

$$\omega_{l_0} = 0.$$

9. Nous avons vu que, dans la méthode du calcul de ω_{l-1}, on n'avait pas supposé que ω_l était nul. Il fallait seulement qu'il existât au moins un groupe de points B commun aux séries découpées sur D par les courbes C_l passant par les divers systèmes A.

A priori il peut donc arriver que ω_l soit nul pour des valeurs de l inférieures à l_0. Nous allons donner un exemple où ce fait se présente. Cela nous montrera en outre le lien qui unit cette question à la réduction de la courbe Γ.

Supposons que Γ admette une première surface minima F_n qui découpe sur un plan Π la première courbe minima de sa section plane A. Si k^{A}_0 est le degré de la deuxième courbe minima de A, on peut affirmer que le défaut ω_l est nul tant que l est inférieur à k^{A}_0. Pour ces valeurs de l en effet, les surfaces φ_l sont nécessairement décomposées en F_n et une surface complémentaire φ_{l-n}. Et les surfaces φ_{l-n} de l'espace découpent bien le système complet des C_{l-n} du plan.

Si en outre la courbe adjointe γ de Γ jouissait de la même propriété, on verrait aisément que ω_l est nul jusqu'à ce que l soit devenu égal à h^{A}_2.

La remarque que nous avons faite au paragraphe 8 peut s'appliquer aussi ici. Si la courbe Γ n'est pas congrue au plan, c'est seulement pour les premières adjointes de Γ que la propriété précédente se présente.

Nous dirons que Γ *est congrue au plan jusqu'à la $j^{\text{ième}}$ adjointe de* Γ si la première surface minima de cette adjointe découpe sur un plan la première courbe minima de sa section plane et si ce fait ne se renouvelle pas pour la $(j+1)^{\text{ième}}$ adjointe.

On sait alors que cette propriété est vérifiée pour toutes les courbes adjointes de rang inférieur à j. (Dans ce langage Γ est la $0^{\text{ième}}$ adjointe de Γ.)

Dans ces conditions, on obtient le résultat suivant :

Si $j = 2i$, ω_l est nul lorsque $l < k_{2i}^{A}$;

Si $j = 2i+1$, ω_l est nul lorsque $l < h_{2i+2}^{A}$.

TROISIÈME PARTIE.

10. Nous allons reprendre rapidement dans cette troisième partie la méthode expliquée précédemment en l'appliquant à la construction des surfaces passant par Γ et assujetties en outre à présenter en des points déterminés des multiplicités données.

A. Supposons d'abord que l'on impose à la surface de contenir, outre la courbe Γ *un seul* point P de multiplicité m.

Soit D une droite en position générale par rapport à la courbe Γ et au point P. Menons par D un plan arbitraire Π_0 et le plan Π_1 qui contient le point P. Ces plans coupent Γ suivant les deux systèmes de points A_0 et A_1. Si l'on désigne par A_1+P le système de points formé des points A_1 et du point P pris avec sa multiplicité m, on peut assurer que

$$h_1^{A_1+P} \geq h_1^{A_0} \quad (1).$$

α. $l \geqq h_1^{A_1+P}$.

Les inégalités (1) et (2) montrent que les nombres ρ_l^1 et ρ_l^2 relatifs aux systèmes A_0 et A_1+P sont égaux respectivement à l et $2l$. Nous nous trouvons ainsi exactement dans les mêmes conditions qu'au paragraphe **2** (α) et l'on conclut

$$\omega_{h_1^{A_1+P}} = 0.$$

β. $l = h_1^{A_1+P} - 1$.

L'égalité (1) montre que ρ_l^1 est encore égal à l, que l'on considère le système A_0 ou le système A_1+P. Mais les deux nombres ρ_l^2 peuvent ne plus être égaux. C'est ce qui arrivera certainement si $h_1^{A_1+P}$ est supérieur à $h_1^{A_0}$.

---

(1) *Voir* la note § 2.

Si ces deux nombres ρ_l^2 sont égaux, il n'y a rien à changer au raisonnement du paragraphe 2 (β) et l'on peut conclure

$$\omega_{h_1^{A_1+P}-1} = 0$$

Sinon, il faut procéder de la façon suivante :

Soit B un système de l points de la droite D. Considérons les séries de tangentes en B aux C_l passant, soit par A_1 et B, soit par $A_1 + P$ et B. La seconde série est de dimension inférieure à celle de la première. Il est clair en outre qu'elle est contenue dans la première. Soit B_1 un système de points de $B (= B_1 + B_2)$ en lesquels on peut disposer des tangentes à imposer aux courbes C_l passant par A_0. Menons par ces points, dans le plan Π_0, autant de droites arbitraires T_{01}. Dans le plan tangent Π_1, les courbes C_l passant par $A_1 + P$ ne laissent pas un si grand arbitraire dans le choix des tangentes en B_1. Soit B_1^1 un système de points de $B_1 (= B_1^1 + B_1^2)$ en lesquels on peut choisir les tangentes T_{11}^1 à ces courbes. Ces droites T_{11}^1 déterminent les tangentes T_{11}^2 en B_1^2 et T_{12} en B_2. Considérons les plans déterminés par les droites correspondantes T_{01} et $T_{11}^1 + T_{11}^2$. C'est eux qui vont jouer ici le rôle de plans P_1. Faisons tourner le plan Π autour de D. Dans chacune de ses positions, il coupe les plans P_1 suivant les droites T_1 et il existe au moins une courbe C_l passant par le système A, section de Γ par Π, les points B et tangente en B_1 aux droites T_1.

En déterminant rationnellement ces courbes C_l en fonction du paramètre qui caractérise la position du plan Π et en s'arrangeant en particulier pour que lorsque le plan Π prend la position Π_1, la courbe C_l présente en P un point multiple d'ordre m (ce qui est rendu possible grâce au choix des plans P_1) on aura réussi à décrire une surface Φ contenant Γ et ayant en P un point multiple d'ordre m (¹).

Cette surface est d'ailleurs d'ordre l. On le voit comme précédemment en remarquant en particulier que les courbes C_{l-1}, passant par les divers systèmes A, découpent la *même* série sur D

(¹) Il est certain que toutes les surfaces ayant en P un point multiple d'ordre m peuvent être obtenues par ce procédé, mais on peut obtenir des surfaces ayant en P une multiplicité moindre et présentant un certain contact avec Π_1 en P.

de telle manière qu'il est impossible de trouver un plan Π où une telle courbe C_{l-1} passerait par tous les points B_1.

On en conclut donc encore

$$\omega_{h_1^{A_1+P}-1} = 0.$$

Mais dans cette seconde hypothèse, les deux nombres ρ_l^2 ne sont plus égaux. On ne peut plus continuer le raisonnement précédent. On voit en effet aisément que les séries découpées sur D par les C_{l-1} passant par A_0 ou par $A_1 + P$, *ne sont plus de même dimension*. On peut donc assurer dans ces conditions

$$\omega_{h_1^{A_1+P}-2} > 0.$$

B. Supposons maintenant que l'on impose à la surface de contenir la courbe Γ et de présenter en un système de points P_i des multiplicités $m_i (i = 1, 2, \ldots, \alpha)$.

Si l'on fait passer par la droite D les plans $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\alpha$ contenant respectivement les points $P_1, P_2, \ldots, P_\alpha$ et coupant Γ suivant les systèmes $A_1, A_2, \ldots, A_\alpha$, on peut écrire comme précédemment, en prenant des indices convenables,

$$h_1^{A_\alpha+P_\alpha} \geqq h_1^{A_{\alpha-1}+P_{\alpha-1}} \geqq \ldots \geqq h_1^{A_1+P_1} \geqq h_1^{A_0}.$$

On peut encore assurer en reprenant le raisonnement (α) que

$$\omega_{h_1^{A_\alpha+P_\alpha}} = 0.$$

Si $h_1^{A_\alpha+P_\alpha}$ est supérieur à $h_1^{A_{\alpha-1}+P_{\alpha-1}}$ le raisonnement (β) est aussi applicable et

$$\omega_{h_1^{A_\alpha+P_\alpha}-1} = 0.$$

Mais où une nouvelle difficulté se présente, c'est lorsque

$$h_1^{A_\alpha+P_\alpha} = h_1^{A_{\alpha-1}+P_{\alpha-1}} = \ldots = h_1^{A_\beta+P_\beta} \qquad (0 < \beta < \alpha).$$

Ce qui faisait en effet le succès du raisonnement (β), c'est qu'il n'y avait qu'*un seul* plan π_1 où les droites T_{11} devaient satisfaire à des conditions particulières. *A priori*, s'il y a $\alpha - \beta + 1$ (> 1) plans Π_i, on n'est plus certain de pouvoir mener par les droites *arbitraires* T_{01}, des plans P_1 qui coupent les plans Π_i suivant des droites T_{i1} satisfaisant aux conditions particulières relatives à chacun de ces plans.

Il est cependant des cas où l'on peut tourner la difficulté. En voici un exemple :

Supposons que tous les points $P_i(i = \beta\ldots\alpha)$ soient dans un même plan qui coupe Γ suivant le système A et que

$$h_1^{A+P_\beta+\ldots+P_\alpha} = h_1^{A_\alpha+P_\alpha}.$$

Alors en prenant la droite D dans ce plan, on voit que l'on peut encore suivre la méthode (β) et conclure que

$$\omega_{h_1^{A_\alpha+P_\alpha}-1} = 0.$$

Dans ces conditions, *pour toutes les valeurs de l supérieures ou égales à $h_1^{A_\alpha+P_\alpha}-1$, le défaut ω_l est nul.*

Remarques. — 1° On peut faire sur la courbe Γ les mêmes observations qu'au paragraphe 5;

2° En particulier, les points multiples de Γ qui ne satisfont pas à l'énoncé de ce paragraphe (remarque 1°) doivent être assimilés à des points P.

11. Appliquons ces résultats à la théorie des surfaces.

Soit F_N une surface présentant Γ comme ligne double et les points P_i comme points multiples d'ordre $m_i + 2$. Les surfaces adjointes à F_N passent simplement par Γ et ont en P_i des points multiples d'ordre m_i.

Pour les mêmes raisons que dans le paragraphe 6, on peut assurer en supposant F_N irréductible,

$$N \geqq h_1^{A_\alpha+P_\alpha} + 1.$$

Or, supposons que la disposition de la courbe Γ et des points P soit telle que le défaut ω_l soit nul lorsque $l \geqq h_1^{A_\alpha+P_\alpha} - 1$. Le paragraphe précédent donne des conditions suffisantes pour qu'il en soit ainsi. On a alors,

$$\omega_l = 0 \quad \text{quand} \quad l \geqq N - 2.$$

On peut conclure en désignant par P_g et P_a les genres géométrique et arithmétique de F_N

$$P_g - P_a = \omega_{N-3}.$$

La différence entre le genre géométrique et le genre arithmétique d'une surface F_N *de degré* N *est égale au défaut du système des courbes découpées sur un plan par les surfaces adjointes d'ordre* N — 3 (¹).

La surface est régulière si N *est supérieur* à $h_1^{A_\alpha+P_\alpha}+1$, *c'est-à-dire si toutes ses sections planes sont des courbes normales.*

Si $N = h_1^{A_\alpha+P_\alpha}+1$, on peut calculer ω_{N-3} en fonction de singularités de systèmes de points plans. Plaçons-nous pour simplifier dans le cas d'un seul point multiple P. On voit aisément, comme à la fin du paragraphe 7, que le défaut ω_{N-3} est égal à la différence des dimensions des séries découpées sur D par les courbes C_{N-3} passant par A_0 ou par A_1+P. On obtient ainsi

$$P_g - P_a = s_{A_1+P}^{h_1^{A_1+P}-3} - s_{A_0}^{h_1^{A_1+P}-3}.$$

(¹) Picard et Simart, t. II, p. 438. La démonstration complète de cette propriété dans le cas général, suivant cette méthode, exige sans doute la connaissance du degré minimum d'une surface présentant les singularités données. On conçoit, en effet que, lorsque le nombre des singularités augmente, on doit avoir $N > h_1^{A_\alpha+P_\alpha}+1$.