CH. DE LA VALLÉE POUSSIN

Quatre leçons sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 175-203

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__175_0>

QUATRE LEÇONS SUR LES FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES DE VARIABLE RÉELLE (¹);

PAR C. DE LA VALLÉE POUSSIN.

PREMIÈRE LEÇON.

UN THÉORÈME PRÉLIMINAIRE DE M. TORSTEN CARLEMAN SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES.

1. M. Carleman a esquissé, dans les *Comptes rendus* de février 1922 (²), la démonstration complète d'un théorème de M. Denjoy sur les fonctions quasi-analytiques qui fera l'objet de la deuxième Leçon. Cette démonstration s'appuie sur un *lemme* préliminaire d'énoncé assez compliqué et dont la démonstration n'est qu'indiquée, mais qui conduit à un théorème extrêmement remarquable de la théorie des fonctions. Ce théorème est à rapprocher du théorème classique de Liouville. Celui-ci affirme qu'une fonction entière et bornée dans tout le plan se réduit à une constante. Le théorème de M. Carleman est un théorème analogue concernant le demi-plan. Il affirme qu'une fonction de z entière et bornée dans le demi-plan et qui tend vers zéro avec $1 : z$ se réduit nécessairement à zéro si la rapidité de décroissance de la fonction dépasse une certaine limite.

Nous allons reprendre la question mais avec d'autres formulations et d'autres démonstrations qui nous paraissent plus simples que celles de M. Carleman.

2. Considérons une fonction $\Phi(z)$ de la variable complexe

$$z = x + yi = re^{\theta i}.$$

Nous supposons que cette fonction est holomorphe et bornée à droite de l'axe imaginaire et qu'elle n'est pas identiquement nulle dans ce demi-plan.

(¹) Leçons faites à la Sorbonne les 11, 14, 16 et 21 avril 1923.

(²) *Comptes rendus*, t. 174, 6 février 1922, p. 373.

Soit C un cercle de rayon R tangent à l'axe imaginaire à l'origine O des coordonnées et, par conséquent, situé tout entier dans le demi-plan précédent.

Donnons-nous un point P sur l'axe réel d'affixe positive $a < \mathrm{R}$ et, par conséquent, intérieur au cercle C.

Soit P' le point conjugué de P; il sera d'affixe négative $-b$ et situé hors du cercle.

Le cercle C est le lieu du point M dont le rapport des distances à P et P' est une constante $a : b$. Donc si l'on désigne par ψ l'angle du vecteur PM avec P'M (compté positivement dans le sens direct) et par z l'affixe du point M, on a, sur le cercle,

$$\frac{z-a}{z+b} = \frac{a}{b} e^{\psi i}.$$

Donc, en prenant les différentielles logarithmiques, on a, toujours sur le cercle,

$$\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+b} = i\, d\psi. \tag{1}$$

Considérons maintenant l'intégrale effectuée sur le cercle

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \log\Phi(z)\left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+b}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \log\Phi(z)\, d\psi. \tag{2}$$

Si $\Phi(z)$ n'a pas de zéro dans le cercle, son logarithme est holomorphe. Or le point a est intérieur, le point $-b$ est extérieur au contour, la valeur de l'intégrale (2) est donc $\log\Phi(a)$ par les théorèmes classiques de Cauchy. La partie réelle de l'intégrale aura pour valeur $\log|\Phi(a)|$. Nous avons, dans ce cas,

$$\log|\Phi(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{C}} \log|\Phi(z)|\, d\psi. \tag{3}$$

Cette formule n'est d'ailleurs qu'une expression connue de l'*intégrale de Poisson*.

Il importe maintenant de savoir par quoi il convient de remplacer la formule (3) si $\Phi(z)$ s'annule dans l'intérieur du cercle C. Dans ce nouveau cas, $\log\Phi(z)$ n'est plus uniforme dans l'intérieur du cercle et l'on doit remplacer ce contour par un autre où la fonction soit uniforme. On arrive au résultat par le procédé classique des lacets. Supposons que $\Phi(z)$ admette k zéros distincts

$z_1, z_2, \ldots, z_k$. On les exclut à l'aide de k lacets correspondants $L_1, L_2, \ldots, L_k$. L'un d'eux, par exemple L_k, se compose d'une coupure Oz_k joignant l'origine au point z_k et d'un cercle infiniment petit autour, de ce point. Le contour du lacet dans le sens direct comporte le parcours Oz_k de la coupure sur le bord droit, le tour du cercle dans le sens direct et le retour au point O sur l'autre bord de la coupure.

Alors, pour obtenir la valeur de l'intégrale (2), il faut ajouter à $\log\Phi(a)$ la somme des intégrales effectuées dans le sens direct sur les lacets, c'est-à-dire la somme

$$\Sigma\,(L_k)$$

où l'on a posé

$$(L_k) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_k} \log\Phi(z)\left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+b}\right).$$

Supposons que z_k soit un zéro d'ordre n; cette dernière intégrale se réduit à celle sur la partie singulière de $\log\Phi(z)$, donc à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C n\log(z-z_k)\left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+b}\right).$$

On voit de suite que l'intégrale sur le cercle infiniment petit est nulle et il ne reste que l'intégrale sur les deux bords de la coupure. Mais $\log(z-z_k)$ se reproduit augmenté de $2\pi i$ quand on passe d'un bord à l'autre de la coupure. La somme des intégrales effectuées en sens contraires, ou la différence des intégrale dans le même sens sur les deux bords de la coupure, se réduit à

$$n\int_{z_k}^{0}\left(\frac{dz}{z-a} - \frac{dz}{z+b}\right) = n\log\left(\frac{z_k+b}{z_k-a} : \frac{b}{-a}\right).$$

Désignons par ρ_k et ρ'_k les distances du point z_k aux points P et P' (d'abscisses a et $-b$); la partie réelle de cette intégrale se réduit à

$$n\log\left(\frac{\rho'_k}{\rho_k} : \frac{b}{a}\right).$$

Cette quantité est essentiellement positive. En effet, le rapport $\rho' : \rho$ des distances d'un point M aux points P' et P est égal à $b : a$ sur le cercle; il est plus grand à l'intérieur et plus petit à l'extérieur; donc, au point intérieur z_k, on a

$$\frac{\rho'_k}{\rho_k} : \frac{b}{a} > 1$$

et le logarithme est positif.

Ainsi, si $\Phi(z)$ admet des zéros dans le cercle (C), il faut, pour obtenir la valeur de l'intégrale (2), ajouter à $\log\Phi(a)$ les intégrales (I_k). Il faut donc ajouter au premier membre de l'équation (3) les parties réelles de ces intégrales qui sont toutes positives, d'où l'inégalité fondamentale

$$\log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_C \log|\Phi(z)|\, d\psi. \tag{4}$$

3. Nous ferons observer en passant que cette formule est un cas particulier d'une formule plus générale concernant les fonctions harmoniques que nous ne démontrerons pas ici. Soient C_1 un contour de forme quelconque et G la fonction de Green relative à ce contour pour un point a intérieur à C_1 ; on a

$$\log|\Phi(a)| = \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \log|\Phi(z)| \frac{dG}{dn}\, ds - \sum_k \log G_k,$$

où la dernière somme s'étend aux valeurs G_k de G en tous les zéros de Φ intérieurs au contour C_1. Mais G, égal à 1 sur C_1, est > 1 à l'intérieur de C_1 ; par conséquent,

$$\log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_{C_1} \log|\Phi(z)| \frac{dG}{dn}\, ds.$$

C'est cette formule que M. Carleman a utilisée implicitement (car il ne l'écrit pas) pour établir son théorème, dans l'article cité des *Comptes rendus;* il considère seulement le cas particulier où le contour C_1 est un demi-cercle.

4. Revenons maintenant à la formule (4). L'angle ψ, qui est la différence d'inclinaisons des deux vecteurs PM et P'M, varie de $-\pi$ à $+\pi$ quand on parcourt le cercle C dans le sens direct. Je dis que cet angle varie toujours dans le même sens, car $d\psi$ ne peut s'annuler. En effet, si $d\psi$ s'annulait en un point M du cercle C,

ce cercle devrait toucher le cercle passant par M, P et P′ (lieu des points d'où le segment PP′ est vu sous un angle constant ψ). Ce cercle MPP′ *tangent au cercle* C lui serait ou intérieur ou extérieur, ce qui est impossible, car il passe par un point intérieur P et un point extérieur P′.

Il suit de cette remarque que l'on peut prendre ψ comme variable d'intégration dans (4) et écrire (l'intégration se faisant sur C)

$$(5) \qquad \log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\Phi(\psi)|\,d\psi.$$

5. Nous allons effectuer maintenant sur cette intégrale un passage à la limite qui remplacera le cercle C par l'axe imaginaire.

Nous supposons $\Phi(z)$ régulière et bornée à droite de l'axe imaginaire. Alors on peut assigner un nombre positif μ tel que l'on ait, dans ce demi-plan, $\log|\Phi| < \mu$; et alors on a, quelque petit que soit ε positif,

$$\log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\varepsilon} + \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\pi} \log|\Phi|\,d\psi + 2\varepsilon\mu.$$

Faisons croître indéfiniment le rayon R du cercle C, mais en laissant fixe le point P, donc a invariable. Le point conjugué P′ tend vers le symétrique de P par rapport à l'origine, donc b tend vers a. L'angle ψ (sous lequel PP′ est vu du point M) est inférieur en valeur absolue à ε sur le cercle C sauf sur un arc C′ de longueur bornée ayant le point O pour milieu. A la limite, pour $R = \infty$, cet arc C′ devient un segment de l'axe des y de centre O et de longueur $2l$. La formule précédente subsiste à la limite, l'intégration se faisant sur l'axe des y. Faisons tendre ε vers zéro; l tend vers l'infini, et l'intégration s'étend à l'axe des y tout entier. On a, l'intégration se faisant donc sur cet axe,

$$\log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} + \int_{0}^{\pi} \log|\Phi|\,d\psi.$$

Prenons le module r de z comme variable d'intégration. Nous avons, z parcourant l'axe imaginaire,

$$a = r \operatorname{tang}\frac{\psi}{2}, \qquad \psi = 2 \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{r}, \qquad d\psi = -\frac{2a\,dr}{a^2 + r^2};$$

d'où, sans difficulté,

$$\log|\Phi(a)| \overline{\overline{<}} \frac{a}{\pi}\int_0^\infty \log\left|\Phi\left(re^{\frac{\pi i}{2}}\right)\Phi\left(re^{-\frac{\pi i}{2}}\right)\right|\frac{dr}{a^2+r^2}. \tag{6}$$

De là, le théorème suivant :

Si la fonction $\Phi(z)$ est entière à droite de l'axe imaginaire, bornée et non identiquement nulle, le logarithme de son module est borné supérieurement par la formule (6) *ci-dessus.*

6. Supposons que la fonction $\Phi(z)$, satisfaisant aux conditions du théorème précédent, tende vers zéro quand z s'éloigne indéfiniment sur l'axe imaginaire. Nous pouvons assigner une constante μ et une fonction positive, non décroissante et infinie avec r, $\gamma(r)$, telle que l'on ait, sur l'axe imaginaire,

$$|\Phi(z)| < e^{\mu-\gamma(r)}, \qquad \log|\Phi(z)| < \mu - \gamma(r).$$

Remplaçons dans la formule (6) la fonction Φ par $\Phi e^{-\mu}$; il vient, par cette inégalité,

$$\log|\Phi(a)| - \mu \overline{\overline{<}} -\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{a^2+r^2},$$

d'où

$$\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{a^2+r^2} \overline{\overline{<}} \mu - \log|\Phi(a)|. \tag{7}$$

Donc l'intégrale du premier membre ne peut pas être divergente. Or cette intégrale diverge ou converge en même temps que

$$\int_{r_0}^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{r^2}; \tag{8}$$

de là, le théorème fondamental suivant, qui est le théorème utilisé par M. Carleman :

Si la fonction $\Phi(z)$ est entière et bornée dans le demi-plan situé à droite de l'axe imaginaire; si, de plus, $\Phi(z)$ tend vers zéro quand z tend vers l'infini sur cet axe de manière à vérifier la condition

$$|\Phi(z)| < e^{\mu-\gamma(r)},$$

où $\gamma(r)$ est une fonction de r positive et infinie avec r, l'intégrale (8) *ne peut être divergente à moins que $\Phi(z)$ ne soit identiquement nulle.*

Ce théorème limite, comme on le voit, la rapidité avec laquelle une fonction entière et bornée dans le demi-plan peut y tendre vers o avec $1 : z$ sans s'annuler identiquement.

Il est clair qu'il limite aussi la rapidité avec laquelle une telle fonction pourrait tendre vers une limite quelconque sans se réduire à une constante, car on revient au cas précédent en retranchant de la fonction sa valeur limite.

7. Pour préciser davantage les conséquences que l'on peut tirer de la formule (7), nous allons considérer une fonction $\Phi(z)$ de forme spéciale. Supposons que $f(x)$ désigne une fonction continue et positive de la variable réelle x dans l'intervalle (o, 1), satisfaisant en outre à la condition de symétrie

$$f(x) = f(1-x).$$

Définissons la fonction entière $\Phi(z)$ par la formule

$$\Phi(z) = \int_0^1 e^{-zx} f(x)\, dx.$$

Cette fonction tend vers o quand z tend vers l'infini à droite de l'axe imaginaire et elle obtient sa valeur absolue maximum $\Phi(0)$ dans ce demi-plan pour $z = 0$. On peut donc poser, $\gamma(r)$ étant positif,

$$|\Phi(z)| \overline{\gtrless} \Phi(0) e^{-\gamma(r)};$$

et la formule (7) devient, dans ce cas,

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(r)\, dr}{a^2+r^2} \overline{\gtrless} \frac{\pi}{2a} \log \frac{\Phi(0)}{\Phi(a)}.$$

Faisons tendre a vers o; il vient, à la limite,

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(r)\, dr}{r^2} \overline{\gtrless} -\frac{\pi}{2} \frac{\Phi'(0)}{\Phi(0)}.$$

Mais on a, par la condition de symétrie $f(x) = f(1-x)$,

$$\Phi'(0) = -\int_0^1 xf(x)\,dx = -\int_0^1 (1-x)f(x)\,dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 [x + (1-x)]f(x)\,dx = -{}^{1}\,\Phi(0);$$

donc la dernière inégalité se réduit à

$$\int_0^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{r^2} \leqq \frac{\pi}{4}. \tag{9}$$

Telle est la condition de limitation très simple imposée à $\gamma(r)$ quand $f(x)$ est non négative et vérifie la condition de symétrie stipulée. Nous l'utiliserons plus tard dans la démonstration du théorème de Borel-Carleman (troisième Leçon).

DEUXIÈME LEÇON.

LES FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES ET LE THÉORÈME DE DENJOY-CARLEMAN.

8. Les fonctions analytiques d'une variable complexe $z = x + yi$ possèdent la propriété, que l'on a regardé longtemps comme distinctive, d'être déterminées dans tout leur domaine d'existence dès qu'elles le sont dans un domaine si petit qu'il soit. Elles sont, en effet, définies par leur valeur et celles de leurs dérivées successives en un point z_0, ce qui résulte du fait qu'elles sont développables en série de Taylor autour du point z_0. La propriété d'être développable en série de Taylor, qui caractérise les fonctions analytiques, est liée à une certaine loi de limitation des dérivées successives de ces fonctions. En effet, si la fonction $f(z)$ est régulière dans un certain domaine, on peut assigner une constante k telle que l'on ait, quel que soit n,

$$\sqrt[n]{|f^{(n)}|} < kn. \tag{1}$$

Réciproquement, si cette condition a lieu dans un certain domaine, la fonction $f(z)$ y sera régulière. Ainsi la condition (1) peut être considérée comme caractéristique des fonctions analytiques dans un domaine de régularité.

Pendant longtemps on a cru que les fonctions analytiques étaient les seules qui fussent déterminées par leur valeur et celles de leurs dérivées en un même point. C'est M. Borel qui a soupçonné et démontré le premier l'existence de fonctions appartenant à des classes *plus générales que les fonctions analytiques* et jouissant cependant du même privilège, et il leur a donné le nom de *fonctions quasi-analytiques* qui leur est resté (¹).

Les fonctions considérées par M. Borel sont les fonctions *monogènes non analytiques*, qui sont définies dans le plan complexe et sur lesquelles M. Borel a publié, dans la Collection qui porte son nom, un Ouvrage fondamental (²). On y trouvera toutes les références sur la question. Nous ne nous occuperons dans ces Leçons que des fonctions quasi-analytiques envisagées dans le domaine réel,

9. A ce point de vue, c'est M. Denjoy qui a fait faire à la théorie des fonctions quasi-analytiques le pas le plus important dans une Note extrêmement remarquable des *Comptes rendus* (³). M. Denjoy a, en effet, montré que les fonctions quasi-analytiques dans un intervalle réel, fonctions qui sont indéfiniment dérivables, peuvent être caractérisées par des conditions de limitation de leurs dérivées tout à fait analogues à la condition (1) propre aux fonctions analytiques, mais seulement *plus larges*. Il a montré, en particulier, que les classes (C_1), (C_2), ..., de fonctions indéfiniment dérivables qui sont astreintes aux conditions de limitation

$$(2)\quad \begin{cases} (C_1) & \sqrt[n]{|f^{(n)}|} < kn \log n, \\ (C_2) & \sqrt[n]{|f^{(n)}|} < kn \log n \log\log n, \quad \ldots, \end{cases}$$

sont des classes de fonctions quasi-analytiques. Dans chacune de ces classes, une fonction $f(x)$ est déterminée par sa valeur et celles de ses dérivées successives en un même point x_0, que nous supposerons dans la suite être le point o.

(¹) *Les séries de fonctions analytiques et les fonctions quasi-analytiques* (*Comptes rendus*, t. 154, mai 1912, p. 1491).

(²) *Leçons sur les fonctions monogènes uniformes;* Gauthier-Villars, 1917 (rédigées par M. G. Julia).

(³) *Comptes rendus*, t. 173, 1921, p. 1329.

On remarquera que les seconds membres des conditions de limitation (2) sont tels que les séries dont le terme général est inverse,

$$\sum \frac{1}{n \log n}, \quad \sum \frac{1}{n \log n \log \log n}, \quad \ldots,$$

sont divergentes. En généralisant ce résultat, M. Denjoy a été conduit à l'énoncé du théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable dans un intervalle (a, b), mais non analytique, ne satisfaisant donc pas à la condition de limitation (1); *désignons par* M_0, M_1, M_2, ..., M_n, ... *les maxima absolus de $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ dans cet intervalle, la fonction $f(x)$ sera quasi-analytique dans (a, b) si la série*

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} + \ldots \tag{3}$$

est divergente.

Ce théorème n'a été démontré d'une manière complète que par M. Carleman [1] et nous lui donnerons le nom de *théorème de Denjoy-Carleman.*

Il importe de bien fixer le sens de ce théorème. Il signifie que si l'on considère une classe (C) de fonctions $F(x)$, astreintes aux conditions de limitation

$$|\sqrt[n]{F^{(n)}(x)}| < k M_n, \tag{4}$$

où k est une constante par rapport à n mais qui peut dépendre de la fonction F, cette classe est formée de fonctions quasi-analytiques : la fonction $f(x)$ qui fait partie de cette classe est la seule de la classe qui admette la suite des valeurs $f(x_0)$, $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... au point x_0.

Pour démontrer ce théorème nous suivrons la méthode de M. Denjoy avec la modification introduite par M. Carleman [1].

10. Il suffit de considérer le cas où x varie dans l'intervalle (0, 1), car l'intervalle (a, b) se ramène à celui-là par une substi-

---

[1] *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 373.

tution linéaire, ce qui multiplie dx et, par suite, tous les termes de la série (3) par une même constante et n'altère en rien les conditions de convergence ou de divergence de cette série.

Ensuite, il suffit de démontrer qu'une fonction $f(x)$ de la classe (C) [n° 9], qui s'annule avec toutes ses dérivées pour $x = 0$, est identiquement nulle. En effet, la différence de deux fonctions de la classe (C) est de la même classe; or, si ces deux fonctions coïncident ainsi que leurs dérivées pour $x = 0$, leur différence est une fonction qui s'annule avec toutes ses dérivées au même point; il suffit donc de prouver que cette différence est identiquement nulle pour établir que les deux fonctions sont identiques.

De plus, pour faire cette démonstration, on peut encore admettre que $f(x)$ vérifie la condition de symétrie

$$f(x) = f(1-x),$$

auquel cas elle s'annulera avec toutes ses dérivées aux deux limites 0 et 1. Il n'y a, en effet, qu'à remplacer (avec M. Carleman) la fonction $f(x)$ par la fonction

$$F(x) = f[4x(1-x)],$$

laquelle satisfait à cette condition. Mais, pour justifier cette substitution, il faut montrer que cette nouvelle fonction est encore de la classe (C).

Il faut donc déduire de la limitation (3) imposée à $f(x)$ une limitation analogue pour $F^{(n)}$.

11. Voici ce calcul dont le résultat nous servira encore dans la troisième Leçon.

La dérivée $F^{(n)}$ est le coefficient de $h^n : n!$ dans le développement taylorien de $F(x+h)$. Si l'on pose

$$y = 4(x - x^2), \qquad k = 4h(1-2x) - 4h^2,$$

on a

$$F(x+h) = f(y+k) = f(y) + \frac{k}{1} f'(y) + \ldots + \frac{k^n}{n!} f^{(n)}(y) + \ldots.$$

La dérivée $F^{(n)}(x)$ est le coefficient de $\frac{h^n}{n!}$ dans la somme des $n+1$ premiers termes de ce développement, car k contient h en facteur. Or, on majore la fonction k de h et toutes ses dérivées en remplaçant k par $4h + 4h^2$, car $1 - 2x$ est de module < 1 dans l'intervalle considéré. En définitive, $F^{(n)}$ est de module inférieur à

$$M_0 + 4(h+h^2)\frac{M_1}{1} + \ldots + 4^n(h+h^2)^n\frac{M_n}{n!}.$$

Mais on a, par intégration par parties, les fonctions $f^{(k)}$ s'annulant pour $z = 0$ par hypothèse,

$$f^{(n-p)}(x) = \int_0^x f^{(n-p+1)}(t)\,dt = \int_0^x (x-t) f^{(n-p+2)}\,dx$$
$$= \ldots = \frac{1}{(p-1)!}\int_0^x (x-t)^{p-1} f^{(n)}\,dx;$$

d'où

$$M_{n-p} \leqq \frac{M_n}{p!}.$$

La majorante trouvée devient *a fortiori*, par la substitution de ces valeurs plus grandes,

$$\frac{M_n}{n!}\left[1 + \binom{n}{1}(4h+4h^2) + \binom{n}{2}(4h+4h^2)^2 + \ldots\right]$$
$$= \frac{M_n}{n!}[1 + 4h + 4h^2]^n = \frac{M_n}{n!}(1+2h)^{2n}.$$

La dérivée $n^{\text{ième}}$ pour $h = 0$ est

$$M_n 2^n \frac{(2n)!}{(n!)^2} < 8^n M_n,$$

car on a $(2n)! < 4^n(n!)^2$. En effet, cette dernière relation est vraie pour $n = 1$ et son second membre est multiplié par un facteur plus grand que le premier quand on change n en $n + 1$. En définitive, on a donc la condition analogue à (3) :

$$\sqrt[n]{|F^{(n)}|} < 8\sqrt[n]{M_n},$$

et F est de la classe (C) comme nous l'avons affirmé.

12. La démonstration du théorème de Denjoy-Carleman est maintenant ramenée à celle du théorème suivant :

Soit $f(x)$ une fonction non analytique qui s'annule avec toutes ses dérivées aux deux limites de l'intervalle $(0, 1)$; *si* *la série*

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} + \dots \tag{3}$$

est divergente, $f(x)$ s'annule identiquement dans tout l'intervalle.

La démonstration de ce théorème exige encore un artifice qui est dû à M. Carleman. Posons, avec lui,

$$\beta_0^2 = \int_0^1 f(x)^2\,dx, \qquad \beta_1^2 = \int_0^1 f'(x)^2, \qquad \dots, \qquad \beta_n^{2n} = \int_0^1 f^{(n)}(x)^2\,dx.$$

Nous avons, par une intégration par parties,

$$\int_0^1 f^{(n)} f^{(n)}\,dx = -\int_0^1 f^{(n-1)} f^{(n+1)}\,dx;$$

et, par l'inégalité classique de Schwarz,

$$\int |\varphi\psi|\,dx \leqq \sqrt{\int \varphi^2\,dx \int \psi^2\,dx},$$

nous avons, si $n > 1$,

$$\beta_n^{2n} \leqq \beta_{n-1}^{n-1}\,\beta_{n+1}^{n+1},$$

et, en particulier, si $n = 1$,

$$\beta_1^2 \leqq \beta_0\,\beta_2^2.$$

Donc, si $\beta_0 < 1$, on aura

$$\beta_1 < \beta_2;$$

si $\beta_{n-1} < \beta_n$, on aura

$$\beta_n < \beta_{n+1}.$$

Il suit de là que si $\beta_0 < 1$, la suite $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots$ est constamment croissante; et que dès l'instant que cette suite commence à croître, elle devient constamment croissante. Remarquons encore que l'on a

$$\sqrt[n]{M_{n-1}} \leqq \beta_n \leqq \sqrt[n]{M_n}.$$

La seconde inégalité résulte immédiatement de la définition de β_n, par le théorème de la moyenne. La précédente est une conséquence de l'inégalité de Schwarz. En effet, on a

$$M_{n-1} = \left| \int_0^x f^{(n)}(x)\,dx \right| \leqq \sqrt{\int_0^x dx \int_0^x f^{(n)}(x)^2\,dx} \leqq \beta_n^n.$$

On en conclut que si $f(x)$ n'est pas analytique, la suite des β_n croît à l'infini avec n. Cette suite devient donc nécessairement croissante à partir d'un certain terme β_s qui est minimum.

Dès lors, si $n > s$, on peut définir une fonction $\beta(n)$ croissante et à dérivée continue et positive, telle que l'on ait, pour n entier, $\beta(n) = \beta_n$. Cette fonction admet, pour $\beta > \beta_s$, une fonction inverse, $n = \gamma(\beta)$, ayant aussi une dérivée continue.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé plus haut. Construisons, avec M. Denjoy, une fonction entière de $z = re^{\theta i}$, par la formule

$$\Phi(z) = \int_0^1 e^{-zx} f(x)\,dx.$$

Nous allons prouver qu'avec nos hypothèses sur $f(x)$ cette fonction est identiquement nulle. Considérons-la dans le demi-plan $-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ et étudions l'ordre de décroissance de son module quand r tend vers l'infini. Faisons n intégrations par parties consécutives; il vient

$$\Phi(z) = \int_0^1 e^{-zx} \frac{f^{(n)}(x)}{z^n}\,dx,$$

d'où, en utilisant encore l'inégalité de Schwarz,

$$|\Phi(re^{\theta i})| < \int_0^1 |f^{(n)}(x)| \frac{dx}{r^n} < \left(\frac{\beta_n}{r}\right)^n.$$

Supposons que r vérifie la condition

$$\frac{r}{e} > \beta_s;$$

faisons correspondre à cet r l'entier n pour lequel on a

$$\beta_n \leqq \frac{r}{e} < \beta_{n+1}, \qquad \text{d'où} \qquad n < \gamma\left(\frac{r}{e}\right) < n+1,$$

auquel cas

$$n > \gamma\left(\frac{r}{e}\right) - 1;$$

il vient

$$|\Phi(re^{\theta i})| < e^{1-\gamma\left(\frac{r}{e}\right)}.$$

Donc, en vertu du théorème de Carleman (n° 6), la fonction $\Phi(z)$ est identiquement nulle si l'intégrale

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\gamma(r)}{r^2}\, dr$$

est divergente. Nous allons montrer qu'elle l'est effectivement si la série (3) diverge.

On a, par la substitution,

$$r = \beta(n), \qquad \text{d'où} \qquad n = \gamma(r),$$

puis, par intégration par parties,

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\gamma(r)}{r^2}\, dr = \int_{n_0}^{n} \frac{n\beta'(n)\, dn}{\beta(n)^2} = \frac{n_0}{\beta(n_0)} - \frac{n}{\beta(n)} + \int_{n_0}^{n} \frac{dn}{\beta(n)}.$$

Quand n tend vers l'infini, $n : \beta(n)$ admet la limite inférieure zéro [sinon la fonction $f(x)$ serait analytique contrairement à l'hypothèse]. On a donc, quelque grand que soit n,

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\gamma(r)\, dr}{r^2} > \int_{n_0}^{n} \frac{dn}{\beta(n)} > \sum_{n_0}^{n-1} \frac{1}{\beta(n)},$$

et *a fortiori*

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\gamma(r)\, dr}{r^2} > \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}},$$

ce qui prouve que l'intégrale diverge avec la série.

Il est maintenant prouvé que $\Phi(z)$ est identiquement nulle. La démonstration du théorème en résulte, car alors $f(x)$ l'est aussi. En effet, on obtient les constantes de Fourier de $f(x)$ en remplaçant, dans $\Phi(z)$, z par $2n\pi i$; donc ces constantes sont toutes nulles et alors on sait que $f(x)$ l'est aussi.

TROISIÈME LEÇON.

LE THÉORÈME DE LIMITATION DE BOREL-CARLEMAN.

13. M. Borel a énoncé ([1]) le théorème suivant, qui a été démontré quelques mois après par M. Carleman ([2]) :

S'il existe une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable dans l'intervalle (o, 1) *qui s'annule avec toutes ses dérivées pour $x = 0$ et qui est telle que $f(1) = 1$, alors la série (définie comme précédemment)*

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt[2]{M_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} + \ldots$$

admet une borne supérieure A, *la même pour toutes les fonctions $f(x)$ qui satisfont aux conditions imposées.*

Nous allons établir ce théorème, que nous appelons *théorème de limitation de Borel-Carleman*, par une suite de généralisations successives.

14. Nous allons d'abord reprendre et préciser dans un cas particulier les résultats obtenus au n° **12**. Nous serons ainsi conduits à une première forme du théorème de limitation.

Soit $f(x)$ une fonction non négative qui admet des dérivées continues jusqu'à l'ordre p inclus, qui s'annule ainsi que ses p dérivées aux deux limites de l'intervalle (o, 1) et qui satisfait à la condition de symétrie

$$f(x) = f(1 - x). \tag{1}$$

Nous pouvons définir, comme au n° **12**, les quantités M_0, M_1, M_2, ..., M_p qui sont les maxima absolus de $f(x)$ et de ses dérivées

---

([1]) *Comptes rendus*, t. 174, 1922. p. 505.

([2]) *Conférence du cinquième Congrès des Mathématiciens scandinaves*, Helsingfors, 1923. La démonstration de M. Carleman s'appuie sur les propriétés des fractions continues de Stieltjes. Mais l'auteur remarque que la démonstration s'obtient aussi par les méthodes antérieures. C'est précisément la voie que nous suivons ici. Nous précisons le théorème, comme le fait M. Carleman, en ne stipulant l'existence que d'un nombre limité de dérivées de $f(x)$.

existantes dans l'intervalle (o, 1), et aussi la suite des quantités

$$\beta_0, \quad \beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_p.$$

Si β_0 est < 1, cette suite est croissante. Dans le cas général, si elle croît à un certain rang, elle croît jusqu'au bout, de sorte que le terme maximum est toujours l'un des extrêmes.

Supposons que la suite devienne croissante à partir du terme β_s qui est minimum. Nous pouvons définir, pour n compris entre s et p, la fonction $\beta(n)$ croissante et à dérivée continue et positive qui est égale à β_n pour n entier. La fonction inverse $\gamma(\beta)$ est alors définie dans l'intervalle de β_s à β_p.

Revenons maintenant à la fonction entière de M. Denjoy

$$\Phi(z) = \int_0^1 e^{-zx} f(x)\, dx;$$

nous avons, si $n \overline{\gtrless} p$ et $|\theta| \overline{\gtrless} \frac{\pi}{2}$,

$$|\Phi(re^{\theta i})| < \left(\frac{\beta_n}{r}\right)^n;$$

et, comme antérieurement (n° **12**), si $\beta_s < \frac{r}{e} < \beta_p$,

$$|\Phi(re^{\theta i})| < e^{1-\gamma\left(\frac{r}{e}\right)}.$$

D'autre part, comme $\Phi(\mathrm{o})$ est le maximum de $|\Phi|$ dans le demi-plan, nous avons

$$|\Phi(re^{\theta i})| < \Phi(\mathrm{o}) \qquad \text{si} \quad \frac{r}{e} < \beta_s;$$
$$|\Phi(re^{\theta i})| < e^{p \log \frac{\beta(p)}{r}} \qquad \text{si} \quad \frac{r}{e} > \beta_p.$$

Ajoutons encore une nouvelle hypothèse aux précédentes, à savoir

$$(2) \qquad \Phi(\mathrm{o}) = \int_0^1 f(x)\, dx \overline{\gtrless} e;$$

alors nous pouvons achever de définir $\gamma(r)$ de manière à avoir, pour toutes les valeurs positives de r,

$$(3) \qquad |\Phi(re^{\theta i})| < \Phi(\mathrm{o})\, e^{-\gamma\left(\frac{r}{e}\right)}.$$

Il suffit, en effet, de poser

$$\gamma\left(\frac{r}{e}\right) = 0 \qquad \text{si} \quad \frac{r}{e} < \beta_s,$$

$$\gamma\left(\frac{r}{e}\right) = p \log \frac{r}{\beta_p} \quad \text{si} \quad \frac{r}{e} > \beta_p.$$

L'inégalité (3) est alors vérifiée, en vertu de chacune des trois inégalités qui précèdent, dans chacun des trois intervalles distincts où varie $r : e$.

Appliquons la formule de limitation (9) obtenue au n° 7; en observant que $\gamma(r)$ est remplacé ici par $\gamma\left(\frac{r}{e}\right)$, il vient

$$\int_0^\infty \gamma\left(\frac{r}{e}\right)\frac{dr}{r^2} \leqq \frac{\pi}{4}$$

et, en changeant r en er,

$$\int_0^\infty \gamma(r)\frac{dr}{r^2} \leqq \frac{\pi e}{4}.$$

Mais, d'après la définition ci-dessus, $\gamma(r)$ est nul pour $r < \beta_s$ et sa définition change encore selon que r est $>$ ou $<$ que β_p. Nous écrirons donc

$$\int_{\beta_s}^{\beta_p} \gamma(r)\frac{dr}{r^2} + \int_{\beta_p}^\infty \gamma(r)\frac{dr}{r^2} \leqq \frac{\pi e}{4}.$$

Dans le premier terme, γ est inverse de β; prenant $n = \gamma(r)$ comme variable et intégrant par parties, on a

$$\int_{\beta_s}^{\beta_p} \frac{\gamma(r)\,dr}{r^2} = \int_s^p \frac{n\beta'(n)\,dn}{\beta(n)^2} = \frac{s}{\beta(s)} - \frac{p}{\beta(p)} + \int_s^p \frac{dn}{\beta(n)}.$$

Dans le second terme, $\gamma(r)$ est un logarithme; on a

$$\int_{\beta_p}^\infty \frac{\gamma(r)\,dr}{r^2} = p\int_{\beta_p}^\infty \log\left(\frac{er}{\beta_p}\right)\frac{dr}{r^2} = \frac{pe}{\beta_p}\int_e^\infty \log t\,\frac{dt}{t^2} = \frac{2p}{\beta_p}.$$

Par la substitution de ces valeurs, nous obtenons la relation

$$\frac{s}{\beta_s} + \int_s^p \frac{dn}{\beta(n)} + \frac{p}{\beta_p} < \frac{\pi e}{4}.$$

Cette formule suppose $\beta_s < \beta_p$. Si β_p était le plus petit des β_k, l'intégrale considérée se réduirait à sa dernière partie et l'on aurait seulement

$$\frac{2p}{\beta_p} < \frac{\pi e}{4}.$$

Dans le premier cas β_s est le plus petit des β, et dans le second c'est β_p, de sorte que l'on a *a fortiori* dans tous les cas

$$\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} + \ldots + \frac{1}{\beta_{p-1}} + \frac{p}{\beta_p} < \frac{\pi e}{4},$$

et encore *a fortiori*

$$(4) \qquad \frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{M_p}} < \frac{\pi e}{4}.$$

C'est le théorème de limitation dans un cas très particulier : la fonction $f(x)$, non négative, est supposée astreinte aux conditions (1) et (2), cette dernière remplaçant celle de M. Borel, et l'on obtient, dans cette hypothèse, une valeur très abaissée et de forme élégante de la borne A. Nous allons maintenant montrer que l'on peut ramener les autres cas à celui-ci.

15. Considérons un second cas particulier. La fonction $f(x)$ sera cette fois de signe quelconque; elle satisfait encore à la condition de symétrie $f(x) = f(1-x)$; elle s'annule aux deux limites 0 et 1, ainsi que ses dérivées successives, jusqu'à l'ordre p (qui sont supposées existantes). Nous remplaçons la condition de M. Borel par celle que $|f(x)|$ ait l'unité pour maximum (atteint) dans l'intervalle $(0, 1)$.

Tirons d'abord deux conclusions de cette dernière hypothèse. Nous avons d'abord

$$\beta_0^2 = \int_0^1 f(x)^2\, dx < 1,$$

par conséquent (n° 12), $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 \ldots.$

En second lieu, soit ξ le point où $f(\xi) = \pm 1$; nous avons, par l'inégalité de Schwarz,

$$1 \lesseqgtr \int_0^\xi |f'(x)|\, dx \lesseqgtr \sqrt{\xi} \sqrt{\int_0^\xi f'^2\, dx},$$

$$1 \lesseqgtr \int_\xi^1 |f'(x)|\, dx \lesseqgtr \sqrt{1-\xi} \sqrt{\int_\xi^1 f'^2\, dx},$$

d'où

$$\beta_1^2 = \int_0^1 f'^2\,dx = \int_0^\xi + \int_\xi^1 f'^2\,dx \geqq \frac{1}{\xi} + \frac{1}{1-\xi} \geqq 4,$$

et, par conséquent,

$$\frac{e}{4}\int_0^1 f'(x)^2\,dx \geqq e.$$

Il suit de cette inégalité que les conclusions du numéro précédent sont applicables à la fonction, non négative, $\frac{e}{4} f'(x)^2$.

Soient M'_1, M'_2, ..., M'_{p-1} les maxima absolus des dérivées existantes de cette fonction; nous avons donc

$$(5) \qquad \frac{1}{M'_1} + \frac{1}{\sqrt[2]{M'_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p-2]{M'_{p-2}}} < \frac{\pi e}{4}.$$

Il s'agit de déduire de (5) une relation analogue entre les quantités β_1, β_2, ... relatives à f. Pour cela, il faut limiter les M' au moyen des β. On a, par la formule de Leibniz,

$$D^n(f'f') = f' f^{(n+1)} + \binom{n}{1} f'' f^{(n)} + \binom{n}{2} f''' f^{(n-1)} + \ldots.$$

Intégrant cette relation, on en déduit, par l'inégalité de Schwarz

$$|D^{n-1} f'^2| \leqq \beta_1 \beta_{n+1}^{n+1} + \binom{n}{1} \beta_2^2 \beta_n^n + \binom{n}{2} \beta_3^3 \beta_{n-1}^{n-1} + \ldots,$$

et *a fortiori*, puisque la suite des β est croissante,

$$|D^{n-1} f'^2| \leqq \beta_{n+1}^{n+2}\left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots\right] = 2^n \beta_{n+1}^{n+2}.$$

Multipliant par $e:4$, on en tire la limitation cherchée

$$M'_{n-1} \leqq (2\beta_{n+1})^{n-1}\left(\frac{e}{2}\beta_{n+1}^3\right).$$

La relation (5) entraîne donc *a fortiori*

$$\frac{1}{\beta_3}\left(\frac{2}{e\beta_3^3}\right) + \frac{1}{\beta_4}\left(\frac{2}{e\beta_4^3}\right)^{\frac{1}{2}} + \ldots + \frac{1}{\beta_p}\left(\frac{2}{e\beta_p^3}\right)^{\frac{1}{p-2}} < \frac{\pi e}{2}.$$

Nous partageons ces termes en deux catégories :

1° Ceux où l'on a (α étant un nombre positif donné)

$$\frac{1}{2}e\beta_n^3 > (n-2)^{3(1+\alpha)}, \quad \text{d'où} \quad \beta_n > \sqrt[3]{\frac{2}{e}}(n-2)^{1+\alpha},$$

et ceux-ci forment une série convergente dont la somme est inférieure à (ζ étant la fonction de Riemann)

$$\sqrt[3]{\frac{e}{2}}\left(1+\frac{1}{2^{1+\alpha}}+\frac{1}{3^{1+\alpha}}+\ldots\right) = \sqrt[3]{\frac{e}{2}}\zeta(1+\alpha);$$

2° Ceux où l'on a la relation inverse, d'où

$$\sqrt[n-2]{\frac{1}{2}e\beta_n^3} < (n-2)^{\frac{3(1+\alpha)}{n-2}} < \max\left[x^{\frac{1}{x}}\right]^{3(1+\alpha)} < 3^{1+\alpha};$$

car le maximum de $x^{\frac{1}{x}}$ a lieu pour $x = e$, et, si x est entier, pour $x = 3$.

Il vient donc, en définitive, en attribuant à α une valeur comprise entre $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$,

$$\frac{1}{\beta_3}+\frac{1}{\beta_4}+\ldots+\frac{1}{\beta_n} < \sqrt[3]{\frac{e}{2}}\zeta(1+\alpha)+\frac{3\pi e}{2}3^\alpha < 21.$$

Comme β_1 est > 2 et *a fortiori* β_2, il vient

$$\frac{1}{\beta_1}+\frac{1}{\beta_2}+\ldots+\frac{1}{\beta_p} < A < 22;$$

et *a fortiori*

$$\frac{1}{M_1}+\frac{1}{\sqrt{M_2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[p]{M_p}} < A < 22.$$

C'est le théorème de limitation pour les fonctions $f(x)$ qui satisfont à la condition de symétrie et dont le maximum absolu est égal à l'unité dans l'intervalle $(0, 1)$. Mais la formule subsiste *a fortiori* si le maximum de $|f(x)|$ est $\lambda > 1$. En effet, le théorème établi pour $f:\lambda$ subsiste *a fortiori* pour f dont les dérivées sont plus grandes.

16. Le théorème s'étend maintenant au cas général. Soit $f(x)$ une fonction qui s'annule pour $x = 0$ ainsi que ses p premières dérivées supposées continues et existantes dans l'intervalle $(0, 1)$.

Supposons, avec M. Borel, que $f(1) = 1$. Remplaçons la fonction $f(x)$ par

$$F(x) = f(4x - 4x^2).$$

Celle-ci satisfait à toutes les conditions de la démonstration précédente et la conclusion lui est applicable. Mais nous avons vu au n° 11 que cette substitution de variable multiplie au plus par 8^n le maximum de la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f(x)$. Il vient donc *a fortiori*, dans le cas général,

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[p]{M_p}} < 8A < 176.$$

C'est le théorème énoncé par M. Borel, précisé en ce sens que l'on ne fait aucune hypothèse sur l'existence des dérivées d'ordre $> p$.

QUATRIÈME LEÇON.

REPRÉSENTATION TRIGONOMÉTRIQUE ET CALCUL DES FONCTIONS QUASI-ANALYTIQUES DÉFINIES PAR DES VALEURS INITIALES ([1]).

17. Nous considérons dans cette leçon une fonction $f(x)$ *paire* et *périodique* de période 2π. Dans tous les cas, on réalise cette condition en remplaçant la variable par $\cos x$. Cette substitution n'altère pas, en général, les conditions imposées aux dérivées par les théorèmes de MM. Denjoy et Carleman, mais la place nous manque pour traiter cette question pour le moment.

Il s'agit d'abord de montrer que les diverses classes de fonctions quasi-analytiques peuvent être caractérisées aussi bien par les conditions de limitation imposées à leurs coefficients de Fourier que par celles imposées à leurs dérivées successives.

Soit $f(x)$ une fonction paire, de période 2π, indéfiniment dérivable et, par conséquent, exprimable en série de Fourier indéfiniment dérivable aussi,

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_1^\infty a_k \cos kx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx.$$

([1]) C. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur les fonctions quasi-analytiques de variable réelle* (*Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 635).

Les coefficients a_k décroîtront plus rapidement que toute puissance négative de k. Nous envisageons cette fonction non plus dans l'intervalle (o, 1), mais dans l'intervalle (o, 2π) d'une période. Il en résulte que, si l'on veut conserver aux quantités $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots$ de M. Carleman la propriété $\beta_n < \sqrt[n]{M_n}$ (n° **12**), il faut continuer à les définir par des moyennes et, par conséquent, poser

$$\beta_n^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^{(n)}(x)^2\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Nous supposons que β_n croît à partir d'un certain indice et que l'on peut définir une fonction continue et croissante, $\beta(n)$, qui coïncide avec β_n pour n entier, à partir d'une valeur suffisamment grande de n (n° **12**).

18. Nous nous posons d'abord le *problème direct*, qui est de déterminer comment la décroissance des coefficients a_k avec $\frac{1}{k}$ est liée à la croissance de $\beta(k)$ avec k.

Nous avons, par p intégrations par parties consécutives,

$$a_k = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f^{(p)}(x)}{k^p}\begin{pmatrix}\cos kx\\ \sin kx\end{pmatrix}dx;$$

donc, par l'inégalité de Schwarz,

$$|a_k| < \frac{1}{\pi}\frac{1}{k^p}\sqrt{\int_0^{2\pi} f^{(p)}(x)^2\,dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{\beta(p)}{k}\right]^p.$$

Déterminons l'entier p par la condition

$$\beta(p) < \frac{k}{e} < \beta(p+1).$$

ou bien, γ étant la fonction inverse de β,

$$p < \gamma\left(\frac{k}{e}\right) < p+1;$$

il vient

$$|a_k| < \frac{e\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}e^{-\gamma\left(\frac{k}{e}\right)}.$$

La limitation des a_k se déduit donc de celle des β_k par l'inversion de la fonction $\beta(k)$.

19. Traitons maintenant le problème inverse. Supposons que nous ayons la limitation

$$|a_k| < \mathrm{A}e^{-\gamma(k)} \qquad (\mathrm{A} \text{ const.}),$$

où $\gamma(k)$ est une fonction constamment et infiniment croissante d'ordre inférieur à k [sinon la fonction $f(x)$ serait analytique] ([1]) et tâchons d'en tirer une formule de limitation pour les dérivées de $f(x)$. Il faut, pour cela, imposer à $\gamma(k)$ une condition de régularité supplémentaire : nous supposerons que l'on peut assigner un nombre positif α tel que l'on ait, quel que soit k,

$$\frac{k\gamma'(k)}{\gamma(k)} > \alpha. \tag{1}$$

Cette condition est évidemment réalisée si le premier membre tend vers une limite positive pour $k = \infty$. Il y a lieu d'observer que si l'on désigne par $y = \beta(x)$ la fonction inverse de $x = \gamma(y)$, la condition précédente est entièrement équivalente à

$$\frac{x\beta'(x)}{\beta(x)} < \frac{1}{\alpha}, \tag{2}$$

car on a

$$\frac{xy\,\beta'(x)\gamma'(y)}{\beta(x)\gamma(y)} = 1.$$

Nous pouvons maintenant passer au calcul de limitation des dérivées de $f(x)$. Il vient, en dérivant la série de Fourier,

$$f^{(k)}(x) = \pm\,\Sigma\, n^k a_n \begin{pmatrix}\cos nx \\ \sin nx\end{pmatrix};$$

par conséquent,

$$\mathrm{M}_k < \mathrm{A}\,\Sigma\, n^k e^{-\gamma(n)} < \mathrm{A}\max\left(n^k e^{-\frac{\gamma(n)}{2}}\right)\Sigma\, e^{-\frac{\gamma(n)}{2}}.$$

Comme cette dernière série converge à cause de nos hypothèses sur γ, on peut assigner un nombre positif B tel que l'on ait, quel que soit k,

$$\mathrm{M}_k < \mathrm{B}\max\left(n^k e^{-\frac{\gamma(n)}{2}}\right),$$

$$\sqrt[k]{\mathrm{M}_k} < \mathrm{B}\max\left(n\, e^{-\frac{\gamma(n)}{2k}}\right).$$

([1]) *Voir* mes *Leçons sur l'approximation des fonctions*, Chap. VIII (Paris, Gauthier-Villars, 1919).

En prenant $x = \gamma(n)$ comme variable, d'où $n = \beta(x)$, il vient

$$\sqrt[k]{M_k} < B \max \left[\beta(x) e^{-\frac{x}{2k}} \right].$$

Cette fonction de x est décroissante dès que sa dérivée est négative. Or cette dérivée a le même signe que la dérivée logarithmique

$$\frac{\beta'(x)}{\beta(x)} - \frac{1}{2k}.$$

Cette dérivée est donc négative, en vertu de la condition (2), si $\frac{x}{2k} > \frac{1}{\alpha}$ ou si $x > \frac{2k}{\alpha}$. Donc le maximum cherché est atteint pour une valeur de $x < \frac{2k}{\alpha}$, et le maximum lui-même est moindre que $\beta\left(\frac{2k}{\alpha}\right)$. Il vient donc

$$\sqrt[k]{M_k} < B\beta\left(\frac{2k}{\alpha}\right) \qquad (B \text{ const.}).$$

Donc la limitation des M_k se déduit réciproquement de celle des coefficients a_k par l'inversion de la fonction $\gamma(k)$.

20. Il résulte de la formule précédente et de l'analyse exposée au n° **12** que la série

$$\frac{1}{M_1} + \frac{1}{\sqrt{M_2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[n]{M_n}} + \ldots$$

est convergente ou divergente en même temps que l'une ou l'autre des intégrales, réductibles l'une à l'autre,

$$\int^{\infty} \frac{dk}{\beta(k)}, \qquad \int^{\infty} \frac{\gamma(n)\,dn}{n^2}.$$

De là le théorème suivant :

Si l'on a la condition de limitation

$$(3) \qquad |a_n| < A e^{-\gamma(n)} \quad (A \text{ const.}),$$

où $\gamma(n)$ est une fonction croissante d'ordre inférieur à n satisfaisant à la condition

$$\frac{n\gamma'(n)}{\gamma(n)} > \alpha > 0 \qquad (\alpha \text{ const.})$$

et telle que l'intégrale

$$\int^{\infty} \frac{\gamma(n)\, dn}{n^2}$$

soit divergente, la fonction

$$f(x) = \sum_{0}^{\infty} a_n \cos nx$$

est une fonction quasi-analytique (¹).

Les conditions du théorème sont réalisées, en particulier, si $\gamma(n)$ a l'une des valeurs suivantes :

$$\frac{n}{\log n}, \quad \frac{n}{\log n \log \log n}, \quad \ldots$$

pour lesquelles on a

$$\lim \frac{n\gamma'(n)}{\gamma(n)} = 1.$$

A ces divers types de fonctions $\gamma(n)$ correspondent précisément les classes (C_1), (C_2), ... de fonctions quasi-analytiques considérées au début par M. Denjoy (n° 9).

21. Le calcul d'une fonction quasi-analytique au moyen des valeurs de cette fonction et de ses dérivées successives en un point donné est un problème important et difficile dont la solution générale a été donnée par M. Carleman (²). Mais les théorèmes que nous venons d'établir permettent, quand ils sont applicables, de résoudre ce problème d'une manière beaucoup plus simple.

Supposons qu'il existe une fonction quasi-analytique satisfaisant aux conditions du théorème précédent et prenant avec ses dérivées d'ordre pair les valeurs C_0, C_2, C_4, ... pour $x = 0$. La détermination de cette fonction $f(x)$ au moyen de ces valeurs ne dépend que de la résolution successive de systèmes d'inégalités linéaires, ce qui en théorie est un problème élémentaire.

(¹) J'ai donné la démonstration directe de ce théorème dans l'article cité des *Comptes rendus*, mais avec une condition de régularité différente imposée à $\gamma(n)$.

(²) *Comptes rendus*, t. 176, 1923, p. 64.

Donnons-nous deux nombres positifs p et ε (p entier); les conditions (3) (n° 20) permettent d'assigner un nombre q assez grand pour que les constantes de Fourier a_k de la fonction cherchée $f(x)$ satisfassent aux p inégalités

$$(4) \qquad \left| C_{2n} - \sum_{k=0}^{q} (-1)^n k^{2n} a_k \right| < \varepsilon \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, p-1).$$

Les inégalités (3) et (4) admettent donc au moins un système de solutions $a_0, a_1, \ldots, a_q$. On en déterminera un $a'_0, a'_1, \ldots, a'_q$ par le procédé que l'on voudra, ce qui définira une fonction trigonométrique d'ordre q

$$\varphi_q(x) = \sum_{0}^{q} a'_k \cos kx.$$

Si l'on fait tendre à la fois p vers l'infini et ε vers zéro par une suite de valeurs successives, on peut être assuré que la suite des fonctions $\varphi_q(x)$ convergera vers la fonction cherchée $f(x)$. Je dis d'abord que l'on peut certainement extraire de la suite des fonctions φ_q une suite convergente. En effet, toutes ces fonctions sont de la forme

$$\alpha_0 + \alpha_1 \cos x + \alpha_2 \cos 2x + \ldots,$$

où les α satisfont aux conditions (3) et sont, par conséquent, enfermés dans des intervalles qui assurent la convergence absolue et uniforme de la série et la quasi-analycité de la fonction somme. Or on peut extraire de la suite des φ_q une première suite où α_0 converge, de celle-ci une suite où α_1 converge, de celle-ci une suite où α_2 converge, etc. On détermine ainsi, à la limite, une fonction quasi-analytique qui admet les valeurs C_{2n}. Si la suite complète des φ_q ne convergeait pas vers cette fonction limite, on pourrait, par le procédé précédent, déterminer deux fonctions quasi-analytiques différentes admettant les mêmes valeurs C_{2n}, ce qui est impossible.

22. En imitant et simplifiant ce qui a été fait par M. Carleman pour le cas le plus général [1], on peut, pour déterminer la suite

---

[1] Article cité.

des fonctions $\varphi_q(x)$, employer un autre procédé qui s'inspire de la méthode des moindres carrés et est plus rapide.

Donnons-nous deux entiers p et $q > p$. Posons le système de p équations à $q+1$ inconnues a'_k

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{q} (-1)^n k^{2n} a'_k \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{5}$$

et cherchons les solutions du système qui miniment la forme quadratique

$$\sum_{k=0}^{q} a'^2_k e^{\gamma(k)}. \tag{6}$$

Nous déterminons ainsi une fonction trigonométrique d'ordre q

$$\varphi_q(x) = \sum_{0}^{q} a'_k \cos kx. \tag{7}$$

Je dis que cette fonction converge vers la fonction $f(x)$ quand p et q tendent vers l'infini pourvu que q croisse suffisamment vite par rapport à p. Cette condition sera assurée si les solutions $x_0, x_1, \ldots, x_{p-1}$ du système déterminé de p équations linéaires

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^n k^{2n} x_k = \sum_{l=q+1}^{\infty} (-1)^n l^{2n} a_l \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{8}$$

sont toutes de modules $< A e^{-\gamma(p)}$. Or, on peut prendre q assez grand pour réaliser cette condition, sans connaître les constantes de Fourier a_l de la fonction inconnue $f(x)$ à cause des conditions (3).

Il suffit, en effet, pour assurer l'existence d'une limite unique et quasi-analytique à la suite des φ_q, de s'assurer que les a'_k restent soumis à des conditions de limitation analogues aux conditions (3), et nous allons prouver qu'ils sont effectivement soumis à des conditions de la forme

$$a'_k < B e^{-\frac{\gamma(k)}{2}} \qquad (B \text{ const.}) \tag{9}$$

entraînant les mêmes conséquences que les conditions (3).

On a, en vertu des relations (8),

$$C_{2n} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^n k^{2n} (a_k + x_k) + \sum_{k=p}^{q} (-1)^n k^{2n} a_k$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots, p-1),$$

ce qui montre que le système (5) admet des solutions a''_k de la forme $a_k + x_k$ ou a_k, suivant la valeur de l'indice, satisfaisant (à cause de la limitation des x_k et des a_k) aux conditions

$$|a''_k| < 2A\, e^{-\gamma(k)}.$$

Donc le minimum de l'expression (6) est inférieur à

$$4A^2 \Sigma\, e^{-\gamma(k)} < B^2,$$

où B^2 est une constante, car la série converge. Dès lors, les valeurs a'_k qui miniment cette expression (6) rendront chaque terme de cette somme $< B^2$, d'où

$$a'^2_k\, e^{\gamma(k)} < B^2 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, q),$$

ce qui est précisément la condition (9).

23. Les calculs des nos **21** et **22** supposent l'existence de la fonction $f(x)$ prenant les valeurs données C_{2n}. Si l'on donne les valeurs C_{2n} arbitrairement, même en observant les conditions de limitation qui caractérisent les fonctions quasi-analytiques, l'existence d'une fonction correspondante $f(x)$ n'est pas assurée.

Si la fonction n'existe pas, les calculs du no **21** conduiront, à la longue, à une incompatibilité. Mais si la fonction existe, nous ne possédons encore aucun moyen de nous en assurer et la question de trouver des critériums d'existence d'une telle fonction reste entièrement ouverte.