BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

Sur les adjointes infinitésimales des courbes planes

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 132-161
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__132_1>

SUR LES ADJOINTES INFINITÉSIMALES DES COURBES PLANES;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

PRÉLIMINAIRES.

1. Le sujet ici traité, bien qu'élémentaire, mérite peut-être quelque attention en raison des nombreux exercices, à la fois de

géométrie et de calcul intégral, non dépourvus d'intérêt, auxquels il peut donner naissance. Les résultats qui s'y rapportent étaient épars dans plusieurs de mes Notes [1]. Je me propose de les rassembler ici en les précisant, les complétant et les simplifiant sur divers points.

Je rappellerai tont d'abord la définition que j'ai donnée des adjointes infinitésimales des courbes planes :

La courbe (M_1) *est dite une adjointe infinitésimale de la courbe* (M) *si, le point* M_1 *étant lié à la fois au point* M *et à la tangente en ce point à la courbe* (M), *les éléments de la courbe* (M) *qui dépendent des infiniment petits de l'ordre* n *peuvent se déduire des éléments de la courbe* (M_1) *qui dépendent des infiniment petits de l'ordre* $n-1$.

En particulier, les centres de courbure de la courbe (M) se déduisent des tangentes de la courbe (M_1); si, par suite, on met la liaison géométrique entre les uns et les autres sous une forme simple, la détermination des centres de courbure de la courbe (M) se ramène à celle des tangentes de la courbe (M_1); lorsque celle-ci est, notamment, une droite ou un cercle, on obtient ainsi des catégories de courbes pour lesquelles on a des constructions géométriques simples des centres de courbure.

2. Analytiquement, la transformation qui permet de passer de la courbe (M) à son adjointe (M_1) s'exprime par des équations telles que

$$(1)\qquad \begin{cases} F(x_1, y_1, x, y, dx, dy) = 0, \\ G(x_1, y_1, x, y, dx, dy) = 0, \end{cases}$$

ou, sous forme explicite,

$$(1')\qquad \begin{cases} x_1 = f(x, y, dx, dy), \\ y_1 = g(x, y, dx, dy), \end{cases}$$

ces équations étant, bien entendu, homogènes en dx et dy. Mais,

---

[1] Les principales de ces Notes ont paru dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (1882, 1888, 1900), le *Journal de Mathématiques spéciales* (1888, 1890, 1895), l'*American Journal of Mathematics* (1888, 1892)

pour qu'une telle transformation donne effectivement naissance à une adjointe infinitésimale, une condition analytique est requise. Si, en effet, on pose

$$\frac{dy}{dx} = p, \qquad \frac{dy_1}{dx_1} = p_1,$$

on a

$$(2) \qquad p_1 = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}p + \dfrac{\partial g}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}p + \dfrac{\partial f}{\partial p}\dfrac{dp}{dx}};$$

et comme, d'autre part, $\frac{dp}{dx}$ est lié au rayon de courbure ρ de la courbe (M) par l'équation

$$(3) \qquad \frac{dp}{dx} = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho},$$

on voit que l'équation (2) établit une relation univoque entre le coefficient angulaire p_1 de la tangente à l'adjointe (M_1) et le rayon de courbure ρ de la courbe (M), à moins que l'on n'ait

$$(4) \qquad \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}p}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}p} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial p}}{\dfrac{\partial f}{\partial p}},$$

auquel cas p_1 conserve la même valeur, quel que soit $\frac{dp}{dx}$ et, par suite, le rayon de courbure de (M) ne dépend plus de la tangente à la courbe (M_1).

Or le premier membre de (4) représente le coefficient angulaire de la tangente M_1T_1 lorsque, p restant constant, on fait varier x et y, c'est-à-dire lorsque le point M se déplace sur la tangente MT supposée fixe; de même, le second membre représente le coefficient angulaire de la tangente M_1T_1 lorsque, x et y restant constants, on fait varier p, c'est-à-dire lorsque, le point M restant fixe, la droite MT pivote autour de ce point.

Autrement dit, pour que la transformation fournisse une adjointe infinitésimale, il faut que les courbes (M_1) correspondant au cas où le point M se déplace sur la tangente MT supposée fixe, et au cas où la tangente MT pivote autour du point M supposé fixe, aient en M_1 des tangentes distinctes. Si elles ont en M_1 même tangente M_1T_1, celle-ci reste la même pour toutes les valeurs du rayon de courbure en M.

Par exemple, si la construction fait dépendre le point M_1 exclusivement de la tangente MT et non de la position de M sur cette droite, la courbe (M_1), pour M se déplaçant sur MT, se réduit au point M_1 qui peut être regardé comme en contact avec la courbe (M_1) correspondant au cas où MT tourne autour de M; donc, ici, on n'a pas d'adjointe infinitésimale; c'est le cas, notamment, pour les polaires réciproques et les podaires.

3. Nous allons maintenant passer en revue un certain nombre d'adjointes infinitésimales. Auparavant, nous conviendrons de certaines notations qui permettront de simplifier grandement le langage dans la suite.

Nous considérerons dans le plan un axe fixe OX et, sur cet axe, un ou deux pôles fixes O et O'.

Par X et Y nous désignerons le point à l'infini, d'une part, dans la direction de OX, d'autre part, dans la direction perpendicudiculaire, en sorte que MX et MY représenteront respectivement la parallèle et la perpendiculaire à OX menées par M.

T et N seront les points de rencontre de OX avec la tangente et avec la normale à la courbe (M) en M; P, l'extrémité de la sousnormale polaire pour le pôle O, c'est-à-dire le point de rencontre de la normale MN et de la perpendiculaire élevée à OM en O; μ, le centre de courbure de (M) répondant au point M; $d(M)$, la différentielle de l'arc de cette courbe en M; ω, l'angle que OM fait avec OX, θ, celui de TM avec le même axe, en sorte que

$$d(M) = M\mu . d\theta = MP . d\omega.$$

Les mêmes lettres, avec l'indice 1, désigneront les mêmes éléments pour la courbe (M_1). Elles seront affectées d'un accent si les éléments correspondants se réfèrent au pôle O'. De plus, nous appellerons T_0 et N_0 les points de rencontre des tangentes MT et M_1T_1, d'une part, des normales MN et M_1N_1, de l'autre.

Enfin, nous désignerons uniformément par l une longueur constante.

Suivant que, dans le mode de liaison de M_1 avec M et MT (ou, ce qui revient au même, MN) interviennent le pôle O ou l'axe OX ou, à la fois, le pôle O et l'axe OX, ou les deux pôles O et O', nous dirons que (M_1) est une *adjointe par un pôle*, ou *par un axe*, ou *par un pôle et un axe*, ou *par deux pôles*. Si aucun de ces éléments n'intervient dans le mode de liaison, l'adjointe peut être dite *ordinaire*.

Il est indispensable, pour la suite, d'avoir présentes à l'esprit ces quelques conventions. Lorsque le tracé de la figure ne comportera aucune hésitation, nous laisserons au lecteur le soin de la faire.

ADJOINTES ORDINAIRES.

4. *Le point* M_1 *est le point de* MT *tel que* $MM_1 = l$ [1].

Équations (1) :

$$(y - y_1)\,dx = (x - x_1)\,dy,$$
$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = l^2.$$

Ici, comme on sait, *le centre de courbure* μ *est à l'intersection* N_0 *des normales* MN *et* M_1N_1.

5. Si l'on portait $MM_1 = l$ sur la normale MN, la courbe (M_1) serait parallèle à (M) et ne serait pas, pour celle-ci, une adjointe infinitésimale. Le critérium du n° 2 le montre, au reste, immédiatement; suivant, en effet, que M se déplace sur MT, ou reste fixe, (M_1) est la parallèle à MT, à la distance l, ou le cercle de centre M et de rayon l, lignes qui sont bien tangentes entre elles en M_1. Mais on peut *prendre sur* MY *le segment* MM_1 *dont la projection sur* MN *est* $ML = l$ (*fig.* 1) [2].

Équations (1) :

$$x_1 = x,$$
$$(y - y_1)\,dx = l\sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Nous avons ici, la tangente à la courbe (L) étant LM_1,

$$\frac{d(M)}{d(M_1)} = \frac{MT_0}{M_1T_0}, \qquad \frac{d(M_1)}{d(L)} = \frac{M_1N_0}{L\mu}, \qquad \frac{d(L)}{d(M)} = \frac{L\mu}{M\mu},$$

---

(1) La courbe (M) est alors une tractrice de M_1; aussi (M_1) peut-elle être dite *antitractrice* de (M). Sur la façon dont le centre de seconde courbure de (M) est lié au centre de courbure de (M_1), voir mon *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* (n° 63).

(2) Cette adjointe intervient dans la détermination par intégration graphique des longueurs d'arcs. *Voir* mes Ouvrages : *Calcul graphique et nomographie* (n° 36), *Cours de Géométrie de l'École Polytechnique* (n° 242).

d'où, en multipliant ces trois égalités membre à membre,

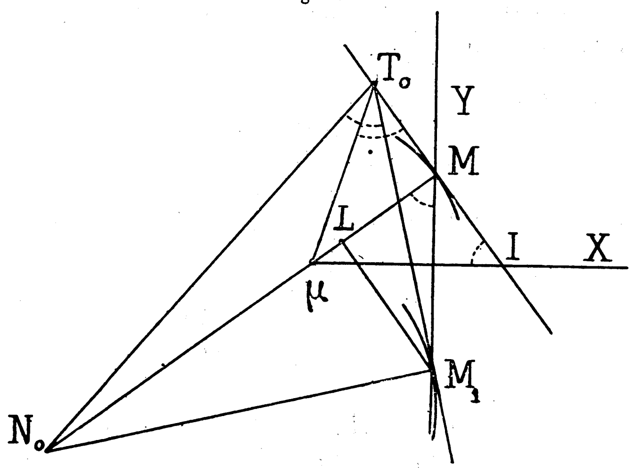
$$\frac{M_1 N_0}{M_1 T_0} = \frac{M\mu}{MT_0},$$

ce qui montre que

$$\widehat{M_1 T_0 N_0} = \widehat{MT_0 \mu}.$$

Mais, puisque les angles $T_0 MN_0$ et $T_0 M_1 N_0$ sont droits, le quadri-

Fig. 1.



latère $MM_1 N_0 T_0$ est inscriptible; donc

$$\widehat{M_1 T_0 N_0} = \widehat{M_1 M N_0};$$

de plus, si l'on mène par μ la perpendiculaire μI à MM_1 (donc, confondue avec μX),

$$\widehat{M_1 M N_0} = \widehat{MI\mu};$$

par conséquent,

$$\widehat{MT_0\mu} = \widehat{MI\mu} \quad \text{et} \quad MT_0 = IM.$$

De là, la construction : *le point* I *étant le symétrique de* T_0 *par rapport à* M, μ *se trouve sur la droite* IX.

ADJOINTES PAR UN PÔLE.

6. M_1 *est la projection de* O *sur* MP; autrement dit, (M_1) est a podaire de la développée de (M) pour le pôle O.

Équations (1) :

$$y_1\,dx - x_1\,dy = 0,$$
$$(y_1 - y)\,dy + (x_1 - x)\,dx = 0.$$

L'extrémité P_1 de la sous-normale polaire de (M_1) est ici le centre instantané de l'angle droit OM_1M, et μ *est la projection de* P_1 *sur* MP.

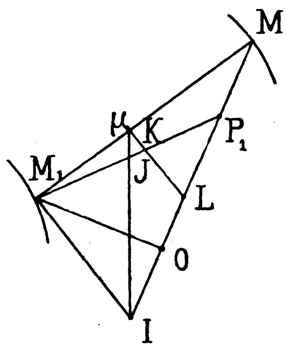
7. *Le point* M_1 *est confondu avec l'extrémité de la sous-normale polaire de* (M) (*fig.* 2).

Équations (1) :

$$xx_1 + yy_1 = 0,$$
$$(y_1 - y)\,dy + (x_1 - x)\,dx = 0.$$

Si la normale M_1P_1 coupe au point K la normale à la déve-

Fig. 2.



loppée de (M), c'est-à-dire la perpendiculaire menée par μ à MM_1, on a

$$d(M) = M\mu\,.\,d\theta = MM_1\,d\omega,$$
$$d(M_1) = M_1K\,.\,d\theta = M_1P_1\,d\omega,$$

d'où

$$\frac{M\mu}{MM_1} = \frac{M_1K}{M_1P_1},$$

et, si M_1I est perpendiculaire à MM_1,

$$\frac{M\mu}{MM_1} = \frac{IL}{IP_1}.$$

Or, le triangle MM_1P_1 coupé par la transversale $I\mu$ donne

$$\frac{IP_1.\mu M.JM_1}{IM.\mu M_1.JP_1}=1$$

ou

$$\frac{JM_1}{JP_1}=-\frac{IM.\mu M_1}{IP_1.M\mu}.$$

Par suite,

$$\frac{JM_1}{JP_1}=-\frac{IM.\mu M_1}{IL.MM_1}=-\frac{IM.M_1\mu}{IL.M_1M}=-1.$$

Donc, le point J est le milieu de M_1P_1; d'où cette construction : *Le point* I *étant à la rencontre du rayon vecteur* OM *et de la perpendiculaire en* M_1 *à la normale* MM_1, *le centre de courbure* μ *est sur la droite joignant le point* I *au milieu de la normale polaire* M_1P_1.

Remarque. — Cette adjointe des sous-normales polaires permet de trouver facilement la liaison géométrique entre les centres de courbure correspondants de courbes (M), (M′), (M″), ... lorsque les rayons vecteurs OM, OM′, OM″, ..., comptés sur une même droite issue du pôle, sont liés par une relation telle que

$$a.OM+a'.OM'+a''.OM''+\ldots=l,$$

les coefficients a, a', a'', ... étant constants, comme la longueur l. En effet, par différentiation, on a

$$a.OM_1+a'.OM'_1+a''.OM''_1+\ldots=0,$$

et, de nouveau, par différentiation,

$$a.OP_1+a'.OP'_1+a''.OP''_1+\ldots=0,$$

égalité qui définit la liaison géométrique entre les points P_1, P'_1, P''_1, ... portés sur OM, et, par suite, celle entre les centres de courbure μ_1, μ'_1, μ''_1, ..., qui leur sont liés par la construction précédente.

Si, par exemple, la courbe (M′) est une *conchoïde* de (M), c'est-à-dire si

$$OM'-OM=l,$$

on a

$$OM'_1=OM_1 \qquad \text{et} \qquad OP'_1=OP_1,$$

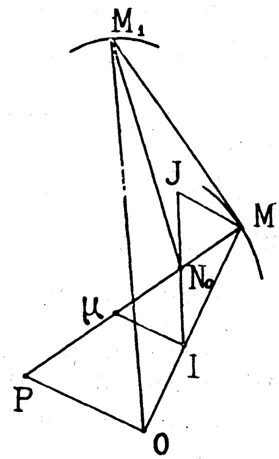
c'est-à-dire que les points M_1 et P_1 sont les mêmes pour (M) et pour (M'). Donc, *ayant pris les points de rencontre* I *et* I′ *de* OM *avec les perpendiculaires élevées en* M_1 *à* MM_1 *et* $M'M_1$, *on tire par* M_1 *la droite* M_1P_1, *limitée à* OM, *dont le milieu* J *tombe sur* $I\mu$, *puis on tire* I′J *qui coupe* $M'M_1$ *au centre de courbure* μ'.

Lorsque la courbe (M) est un cercle passant par O, la courbe (M_1) devient un *limaçon de Pascal.* Ici le point M_1 étant diamétralement opposé à M dans le cercle (M) de centre μ, le point P_1 se confond avec M et, par suite, J avec μ. On a donc simplement *le centre de courbure* μ *sur la normale* M_1M' *en joignant le centre* μ *du cercle* (M) *au point* I′ *où la perpendiculaire élevée en* M_1 *à* M_1M' *coupe* OM.

8. *On porte sur la tangente le segment* $MM_1 = MO$ (*fig.* 3). Équations (1) :

$$x_1^2 - 2x x_1 + y_1^2 - 2y y_1 = 0,$$
$$(y_1 - y)\,dx = (x_1 - x)\,dy.$$

Fig. 3.



On a

$$d.OM = OP.d\omega, \qquad d.MM_1 = \mu N_0.d\theta,$$
$$d(M) = MP.d\omega = M\mu.d\theta,$$

d'où

$$\frac{OP}{MP} = \frac{\mu N_0}{M\mu}.$$

Par suite, si μI est parallèle à PO, il vient $\mu N_0 = \mu I$, et, si IN_0 coupe en J la perpendiculaire menée par M à OM, $MN_0 = MJ$, ce qui, les angles OMJ et N_0MM_1 étant égaux, puisque droits, entraîne que N_0J est parallèle à OM_1. De là, la construction : *La parallèle à* OM_1 *menée par* N_0 *coupant* OM *en* I, μ *est sur la perpendiculaire élevée en* I *à* OM.

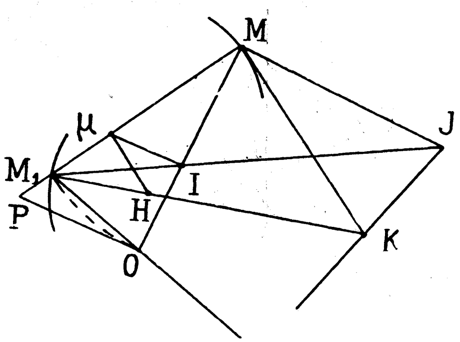
Remarque. — Il va sans dire que, si l'on avait porté MO dans l'autre sens sur la tangente, de sorte que M_1 fût venu dans la position symétrique de celle qu'il occupe sur la figure 3, par rapport à M, le point N_0 aurait passé en même temps dans la position symétrique par rapport à μ, et la construction effectuée sur ces nouvelles données aurait bien redonné le même point I.

9. *On porte sur la normale le segment* $MM_1 = MO$ (*fig.* 4). Équations (1) :

$$x_1^2 - 2x x_1 + y_1^2 - 2y y_1 = 0,$$
$$(y_1 - y)\,dy + (x_1 - x)\,dx = 0.$$

Si la normale en M_1 coupe au point H la normale à la développée

Fig. 4.



de (M), c'est-à-dire la perpendiculaire élevée en μ à MM_1, on a

$$d.OM = OP.d\omega, \qquad d.MM_1 = \mu H.d\theta,$$
$$d(M) = MP.d\omega = M\mu.d\theta,$$

d'où

$$\frac{OP}{MP} = \frac{\mu H}{M\mu}.$$

Par suite, si μI est parallèle à PO, on a $\mu H = \mu I$, et, si $M_1 H$ et $M_1 I$ coupent respectivement aux points K et J la tangente en M et la perpendiculaire élevée en M à OM, on a aussi $MK = MJ$. Les triangles isoscèles MM_1O et MKJ ayant leurs côtés égaux deux à deux perpendiculaires, leurs bases OM_1 et KJ le sont aussi. De là, la construction : *Si la normale en* M_1 *rencontre la tangente en* M *au point* K, *et si les perpendiculaires menées respectivement à* OM *et à* OM_1 *par* M *et par* K *se coupent en* J, μ *se trouve sur la perpendiculaire à* OM *menée par le point* I *où cette droite est rencontrée par la droite* $M_1 J$.

Remarque analogue à celle du numéro précédent.

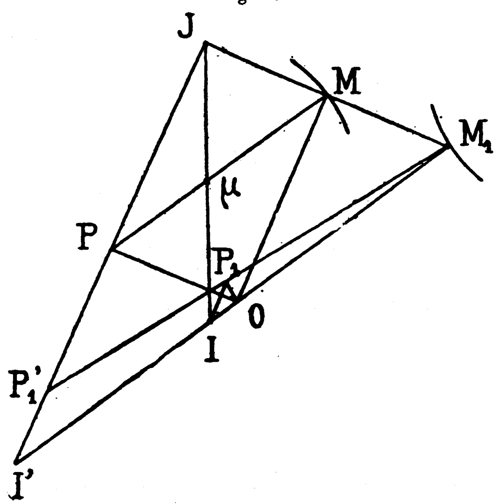
10. OM_1 *est équipollent à* PM (*fig.* 5).

Équations (1) :

$$y_1\,dy + x_1\,dx = 0,$$
$$(y_1 - y)\,dx = (x_1 - x)\,dy.$$

La normale à l'enveloppe de MM_1 étant la perpendiculaire PJ

Fig. 5.



abaissée de P sur MM_1, si la normale M_1P_1 coupe PJ en P'_1, on a

$$\frac{d(M)}{d(M_1)} = \frac{MP}{M_1P'_1}.$$

Mais

$$d(M) = M\mu . d\theta, \qquad d(M_1) = M_1P_1 . d\theta$$

(puisque OM_1 est parallèle à la normale MP); donc

$$\frac{M\mu}{M_1P_1} = \frac{MP}{M_1P'_1}.$$

Si OM_1 rencontre PP'_1 en I′ et la parallèle à PP'_1 (c'est-à-dire à OM_1) menée par P_1 en I, on a

$$\frac{M_1I}{M_1P_1} = \frac{M_1I'}{M_1P'_1}$$

Il vient, par suite,

$$\frac{M\mu}{M_1I} = \frac{MP}{M_1I'},$$

ce qui prouve que le point μ se trouve sur IJ. D'où la construction : *Si les parallèles à* OM *menées par* P *et* P_1 *coupent, l'une* MM_1 *en* J, *l'autre* OM_1 *en* I, *le centre de courbure* μ *est sur* IJ.

ADJOINTES PAR UN AXE.

11. *Porter sur la normale* NM, *le segment* $NM_1 = l$.
Équations (1) :

$$(y_1 - y)\,dx + (x_1 - x)\,dx = 0,$$
$$y_1^2(dx^2 + dy^2) = l^2\,dx^2.$$

Le centre instantané I du segment NM_1 se trouve à la rencontre de la normale M_1N_1 et de TY (normale au lieu OX de N). *Le centre de courbure* μ *est la projection de* I *sur* MN.

12. M_1 *est le symétrique de* T *par rapport à* M.
Équations (1) :

$$y_1 = 2y,$$
$$(x_1 - x)\,dy = y\,dx.$$

Si TY *coupe* MN *en* I, μ *est le milieu* IN_0, en vertu d'un théorème bien connu de Mannheim.

13. M_1 *est le symétrique de* N *par rapport à* M.
Équations (1) :

$$y_1 = 2y,$$
$$(x_1 - x)\,dx + y\,dy = 0.$$

En vertu du même théorème de Mannheim, si la normale à la développée de MN, c'est-à-dire la perpendiculaire menée par μ à MN, coupe M_1N_1 en N'_1 et NY en N', μ est le milieu de $N'N'_1$. De là, la construction : *Si* M_1N_1 *coupe* NY *et la perpendiculaire élevée en* N *à* MN, *respectivement en* I *et en* K, μ *se trouve sur la droite qui joint* I *au milieu* J *de* OK.

14. MM_1 *est un segment de la normale* MN, *vu de* T *sous un angle constant.*

Équations (1) :

$$(y_1-y)\,dy+(x_1-x)\,dx=0,$$
$$[(y_1-y)\,dx-(x_1-x)\,dy]\,dy=k\,[(x_1-x)\,dx\,dy+y\,dx^2-y_1\,dy^2],$$

k étant la tangente de l'angle constant MTM_1.

Le point de rencontre I de MN et de TY est le centre instantané de l'angle constant MTM_1 ; donc la perpendiculaire abaissée de I sur M_1T est la normale à l'enveloppe de ce côté, et si elle coupe M_1N_1 en J, ce point est le centre instantané de l'angle constant TM_1M; par suite, le point μ où MN touche son enveloppe est la projection de J sur cette normale; mais, dans le triangle M_1IJ, les droites M_1M et JM sont des hauteurs; donc, si elles se coupent en H, JH est la troisième hauteur du triangle; autrement dit, JH est perpendiculaire à M_1N_1. De là, la construction : *Si la normale* MN *coupe* TY *en* I, *et si la perpendiculaire menée par* I *à* M_1N_1 *coupe* M_1T *en* H, μ *est la projection de* H *sur* MN.

15. M_1 *est le point de rencontre de* MN *et de* TY (*fig.* 6).

Équations (1) :

$$(x_1-x)\,dy+y\,dx=0,$$
$$(y_1-y)\,dy+(x_1-x)\,dx=0.$$

On a

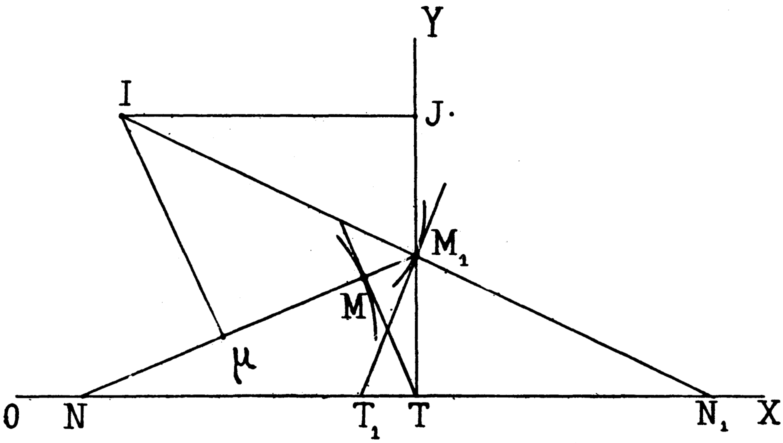
$$\frac{d(M)}{d(T)}=\frac{M\mu}{TM_1},\qquad \frac{d(T)}{d(M_1)}=\frac{TT_1}{M_1T_1},\qquad \frac{d(M_1)}{d(M)}=\frac{M_1I}{M\mu},$$

si I est le point de rencontre de M_1N_1 et de la perpendiculaire élevée en μ à MN. On tire de la

$$\frac{TT_1.M_1I}{TM_1.M_1T_1}=1.$$

Mais, si de I on abaisse la perpendiculaire IJ sur TM_1, la simi-

Fig. 6



litude des triangles rectangles M_1TT_1 et IJM_1 donne

$$\frac{TT_1}{M_1J} = \frac{M_1T_1}{M_1I}.$$

Par suite,

$$M_1J = TM_1$$

et

$$M_1I = N_1M_1.$$

D'où la construction : *Si le point* I *est le symétrique de* N_1 *par rapport à* M_1, μ *est la projection de* I *sur* MN.

16. *Reporter* TM *en* TM_1 sur TY (*fig.* 7).

Équations (1) :

$$(x_1 - x)\,dy + y\,dx = 0,$$
$$(y_1^2 - y^2)\,dy^2 = y^2\,dx^2.$$

On a

$$\frac{d.TM_1}{d(T)} = \frac{TM_1}{TT_1}.$$

Or,

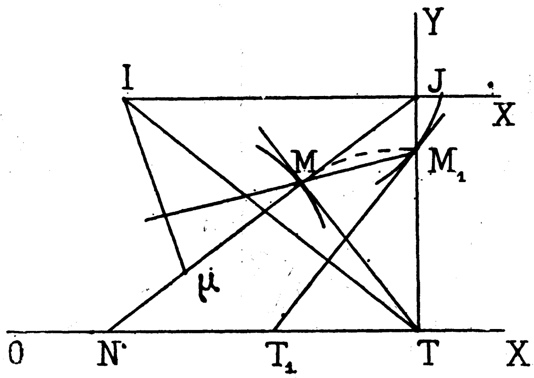
$$d.TM_1 = d.TM = J\mu.d\theta,$$
$$d(T) = TJ.d\theta.$$

Donc

$$\frac{J\mu}{TJ} = \frac{TM_1}{TT_1}.$$

Il en résulte que, si la perpendiculaire menée de T à M_1T_1 coupe JX en I, on a $JI = J\mu$. Dès lors, les côtés égaux étant per-

Fig. 7.



pendiculaires deux à deux dans les triangles isoscèles TMM_1 et $J\mu I$, il en est de même des bases MM_1 et $I\mu$; d'où la construction : *La perpendiculaire menée de* T *à* M_1T_1 *coupant* JX *en* I, *la perpendiculaire menée de* I *à* MM_1 *passe par* μ.

Remarque analogue à celle du n° 8.

17. *Reporter* MN *en* MM_1 *sur* MY ([1]) (*fig.* 8)

Équations (1) :

$$x_1 = x,$$
$$(y_1^2 - 2yy_1)\,dx^2 = y^2\,dy^2.$$

On a

$$\frac{d.MM_1}{d(M)} = \frac{MM_1}{MT_0}.$$

Or,

$$d.MM_1 = d.MN = \mu I.d\theta,$$

NI étant perpendiculaire à OX et μI à MN, et

$$d(M) = M\mu.d\theta.$$

Il vient donc

$$\frac{\mu I}{M\mu} = \frac{MM_1}{MT_0}$$

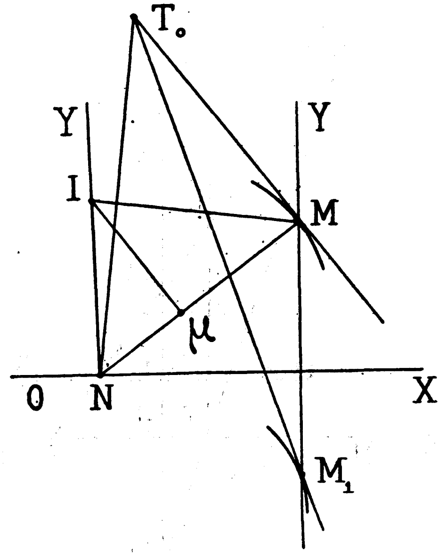
([1]) Cette adjointe infinitésimale intervient dans la détermination par intégration graphique d'un moment d'arc par rapport à OX (*Calc. graph. et nomogr.*, n° 36, et *Cours de Géom. de l'École Polytech.*, n° 242).

ou

$$\frac{\mu I}{M\mu} = \frac{MN}{MT_0},$$

ce qui prouve que les triangles rectangles $M\mu I$ et MT_0N, qui ont

Fig. 8.



les côtés de l'angle droit perpendiculaires deux à deux, sont semblables, et, par suite, que les hypoténuses MI et NT_0 le sont aussi; d'où la construction : *Si* NY *coupe en* I *la perpendiculaire menée par* M *à* NT_0, μ *est la projection de* I *sur* MN.

Si MM_1 avait été reporté dans l'autre sens sur MY, le point T_0 serait resté le même et la construction eût été identique.

18. *Prenant sur* OX *le point* L *à la distance constante* l *de la projection* H *de* M *sur cet axe, on prend le point* M_1 *à la rencontre de* MH *et de la parallèle menée par* L *à* MT (*fig.* 9).

Équations (1) :

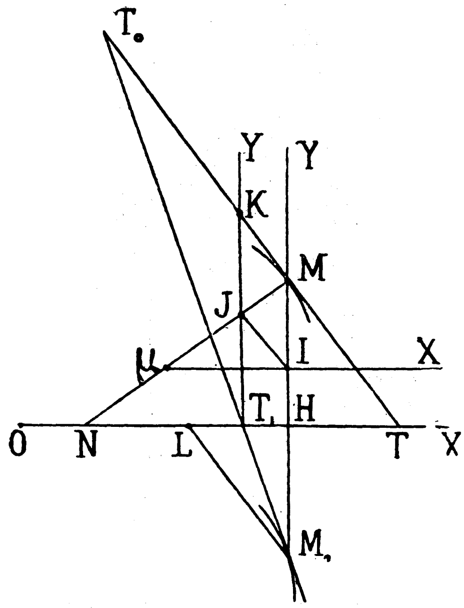
$$x_1 = x,$$
$$y_1\,dx = l\,dy.$$

La courbe (M) n'est alors autre que la courbe *intégrale* de (M_1) pour le module l ([1]).

On a

$$\frac{d(M)}{d(M_1)} = \frac{MT_0}{M_1T_0} = \frac{MK}{M_1T_1}.$$

Fig. 9.



et

$$\frac{d(M_1)}{d.HM_1} = \frac{M_1T_1}{HM_1}.$$

Donc

$$\frac{d(M)}{d.HM_1} = \frac{MK}{HM_1}.$$

Maintenant,

$$d(M) = M\mu.d\theta, \qquad HM_1 = l \tan\theta, \qquad d.HM_1 = \frac{l\,d\theta}{\cos^2\theta}.$$

Par suite,

$$M\mu \sin\theta \cos\theta = MK.$$

([1]) *Calc. graph. et nomogr.*, n^os 25 et 27; *Cours de Géom. de l'École Polytech.*, n° 237.

Si l'on projette μ en I sur MH, puis I en J sur $M\mu$, on a

$$IJ = M\mu \sin\theta \cos\theta.$$

Donc $IJ = MK$, et le point J se trouve sur T_1K; de là la construction : T_1Y *coupant la normale* MN *en* J, *et la perpendiculaire élevée en* J *à* MN *coupant* MY *en* I, μ *se trouve sur* IX.

Si (M_1) est une droite coupant OX en T_1, (M) est une parabole d'axe T_1Y, et la construction se confond alors avec celle de Mannheim pour le centre de courbure de la parabole.

19. M_1 *est à la rencontre de* MX *et de* TY (*fig.* 10).

Équations (1) :

$$y_1 = y,$$
$$(x_1 - x)\,dy + y\,dx = 0.$$

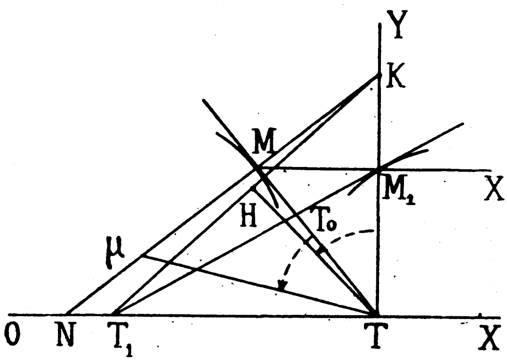
On a

$$\frac{d(M)}{d(M_1)} = \frac{MT_0}{M_1T_0} = \frac{MT}{M_1T_1}, \qquad \frac{d(M_1)}{d(T)} = \frac{M_1T_1}{TT_1}, \qquad \frac{d(T)}{d(M)} = \frac{TK}{M\mu},$$

d'où

$$\frac{M\mu}{MT} = \frac{TK}{TT_1} = \frac{TH}{T_1H},$$

Fig. 10.



si TH est perpendiculaire à T_1K. Il en résulte que

$$\widehat{\mu TM} = \widehat{TT_1H} = \widehat{KTH}.$$

$T\mu$ *est antiparallèle de* TK *par rapport à l'angle* HTM.

20. M_1 *est à la rencontre de* MX *et de* NY (*fig.* 11).

Équations (1) :

$$y_1 = y,$$
$$(x_1 - x)\,dx - y\,dy = 0.$$

On a

$$\frac{d(M)}{d(M_1)} = \frac{MT_0}{M_1T_0} = \frac{MT}{M_1T_1}, \qquad \frac{d(M_1)}{d(N)} = \frac{M_1T_1}{NT_1}, \qquad \frac{d(N)}{d(M)} = \frac{NI}{M\mu},$$

d'où

$$MT.NI = NT_1.M\mu.$$

Mais, la similitude des triangles rectangles MTN et μNI donne

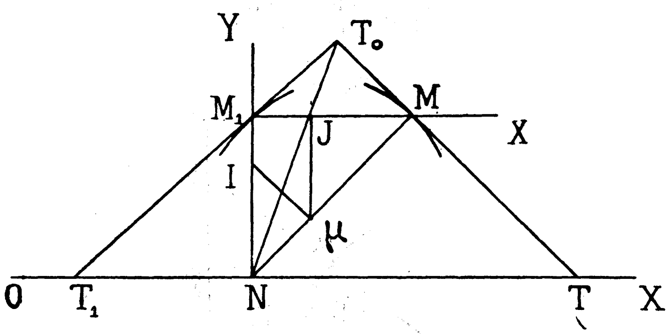
$$MT.NI = N\mu.NT.$$

Il vient donc

$$\frac{N\mu}{M\mu} = \frac{NT_1}{NT} = \frac{JM_1}{JM},$$

si NT_0 coupe MM_1 en J, ce qui montre que μJ est parallèle à NM_1,

Fig. 11.



d'où la construction : *Si la droite* NT_0 *coupe* MM_1 *en* J, μ *se trouve sur* JY.

Si la courbe (M) est une parabole d'axe OX, MM_1, égal à sa sous-normale, est constant et égal à son paramètre p, et l'adjointe (M_1) est identique à cette parabole ayant reçu une translation égale à p dans le sens de OX; dès lors M_1T_1 est parallèle à MT, et NJ également; on retrouve ainsi la construction de Mannheim, pour le centre de courbure de la parabole, déjà obtenue, à titre de cas particulier, à la fin du n° 18.

ADJOINTES PAR UN PÔLE ET UN AXE.

21. OM_1 *est équipollent à* TM (*fig.* 12).
Équations (1) :

$$y_1 = y,$$
$$x_1\,dy = y\,dx.$$

Si TY coupe MN en I, on a

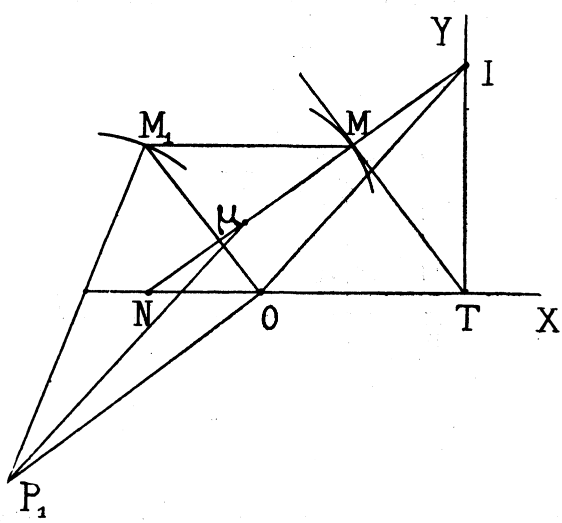
$$d.TM = I\mu.d\theta, \qquad d.OM_1 = OP_1.d\theta.$$

Donc

$$I\mu = OP_1,$$

et la figure $OI\mu P_1$ est un parallélogramme; d'où la construction :

Fig. 12.



TY *coupant la normale* MN *en* I, μ *se trouve sur la parallèle à* OI *menée par* P_1.

22. OM_1 *est équipollent à* NM (*fig.* 13).
Équations (1) :

$$y_1 = y,$$
$$x_1\,dx + y\,dy = 0.$$

Si NY coupe en J la perpendiculaire élevée en μ à MN, on a

$$d.\mathrm{NM} = \mathrm{J}\mu.d\theta, \qquad d.\mathrm{OM}_1 = \mathrm{OP}_1.d\theta.$$

Donc

$$\mathrm{J}\mu = \mathrm{OP}_1.$$

Si μY coupe en I la perpendiculaire élevée en N à MN, on a aussi

$$\mathrm{NI} = \mathrm{J}\mu.$$

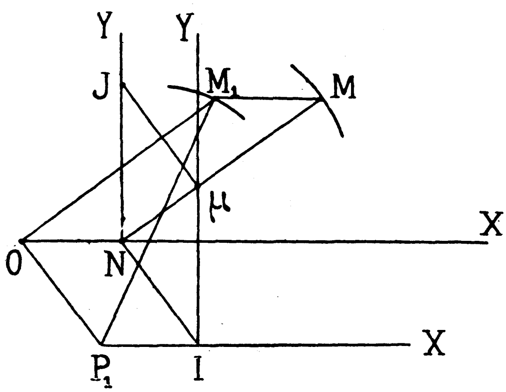
Par suite,

$$\mathrm{NI} = \mathrm{OP}_1,$$

et la figure ONIP_1 est un parallélogramme, d'où la construction : *Si la perpendiculaire élevée en* N *à* MN *coupe* $\mathrm{P_1X}$ *en* I, μ *se trouve sur* IY.

Il est clair que, si (M) est une parabole de sommet O et d'axe OX, (M_1) est la droite perpendiculaire à OX dont la distance à O, extérieurement à la courbe, est égale au paramètre. Ici, P_1 est

Fig. 13.



sur MM_1, par suite N_1 aussi, et la construction ci-dessus du centre de courbure μ coïncide alors avec celle de Mannheim appliquée à la parabole, déja rencontrée au n° **18**.

ADJOINTES PAR DEUX PÔLES.

23. M_1 *est à la rencontre de* OM *et de la parallèle à* MT *menée par* O′ (*fig.* 14).

On voit immédiatement que la courbe (M_1) passe par les points de contact des tangentes à (M) issues de O' et par les points où les normales issues de O coupent le cercle de diamètre OO', que, de plus, les asymptotes de (M_1) sont parallèles les unes aux asymptotes de (M), les autres aux tangentes issues de O à (M).

Équations (1), si l'on prend O pour origine, et si l'on pose $OO' = l$:

$$x_1 y - x y_1 = 0,$$
$$y_1\, dx - (x_1 - l)\, dxy = 0.$$

On a

$$d(M) = M\mu . d\theta \quad = MP . d\omega,$$
$$d(M_1) = M_1 P'_1 . d\theta = M_1 P_1\, d\omega,$$

d'où

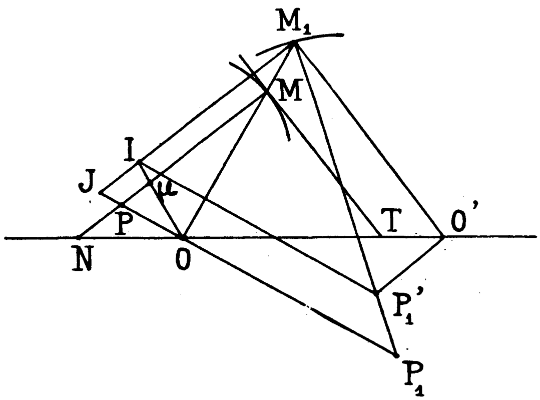
$$\frac{M\mu}{MP} = \frac{M_1 P'_1}{M_1 P_1},$$

ou, si l'on mène par M_1 la parallèle MI à MN, et par P'_1 la parallèle P'_1I à OP,

$$\frac{M\mu}{MP} = \frac{MI}{MJ},$$

ce qui montre que μ se trouve sur la droite OI, d'où la construc-

Fig. 14.



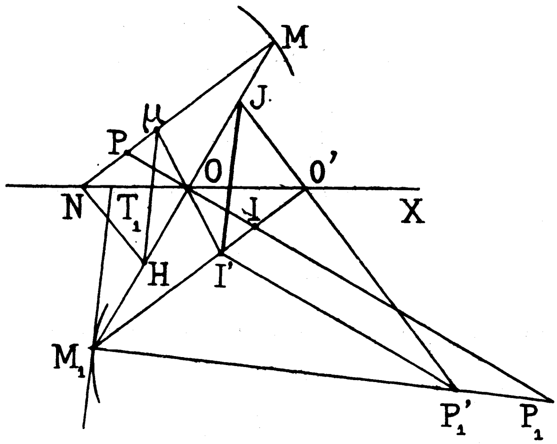
tion : *Si la parallèle à* MN *menée par* M_1 *et la perpendiculaire* à OM *menée par* P'_1 *se coupent en* I, μ *est sur* OI.

Remarque. — Il est clair que la courbe (M) est la trajectoire du point M animé d'une vitesse d'entraînement constante en grandeur et direction, de vecteur $O'O$, et d'une vitesse relative de vecteur OM_1, pour laquelle, par conséquent, l'hodographe est précisément l'adjointe (M_1).

24. M_1 *est à la rencontre de* OM *et de la parallèle à* MN *menée par* O' (*fig.* 15).

On voit immédiatement que (M_1) passe par les pieds des normales à (M) issues de O', par les points où le cercle de diamètre OO'

Fig. 15.



est coupé par les tangentes issues de O à (M) et les parallèles aux asymptotes de (M) menées par O, et qu'elle a pour asymptotes les normales à (M) issues de O.

Équations (1) :

$$x_1 y - x y_1 = 0,$$
$$(x_1 - l)\,dx + y_1\,dy = 0.$$

On a encore ici

$$d(M) = M\mu . d\theta \quad = MP . d\omega,$$
$$d(M_1) = M_1 P'_1 . d\theta = M_1 P_1 . d\omega,$$

d'où

$$\frac{M\mu}{MP} = \frac{M_1 P'_1}{M_1 P_1},$$

ou, si l'on mène par P'_1 la parallèle $P'_1 I'$ à OP,

$$\frac{M\mu}{MP} = \frac{M_1 I'}{M_1 I},$$

ce qui montre que μ est sur OI'.

Mais, dans le triangle $M_1 I' P'_1$, $M_1 O$ et $P'_1 O'$ sont des hauteurs; $I'J$ est donc la troisième hauteur, et, par suite est parallèle à $M_1 T_1$.

Élevons maintenant en N à MN la perpendiculaire NH. Cette droite est parallèle à $O'J$, comme $N\mu$ l'est à $O'I'$. Il en résulte que les triangles $NH\mu$ $O'JI'$ sont homothétiques par rapport à O et, conséquemment, que NH est parallèle à $I'J$, c'est-à-dire à $M_1 T_1$; d'où la construction : *Si la perpendiculaire élevée en* N *à* MN *coupe* OM *en* H, μ *se trouve sur la parallèle à* $M_1 T_1$ *menée par* H.

COURBES ADMETTANT POUR ADJOINTE INFINITÉSIMALE D'UNE CERTAINE ESPÈCE UNE LIGNE DONNÉE.

25. Toutes les solutions qui précèdent, dérivées de la méthode purement géométrique de Mannheim, contribueront peut-être à attester une fois de plus la souplesse et la fécondité de cette méthode. Il semble bien que, pour la plupart des problèmes ainsi traités, l'emploi de la méthode analytique ne se prête guère, et encore au prix de calculs assez laborieux, qu'à la vérification *a posteriori* des résultats ci-dessus obtenus géométriquement; pour atteindre directement à des constructions aussi simples, dans des cas analogues, c'est donc la méthode géométrique telle qu'elle vient d'être employée qui paraît devoir être recommandée.

Mais il est un autre genre de problème, né de la considération des adjointes infinitésimales, qui peut donner lieu à d'intéressants exercices de calcul intégral; c'est le suivant : une certaine espèce d'adjointe infinitésimale étant définie par les équations du n° 2,

$$(1) \qquad \begin{cases} F(x_1, y_1, x, y, dx, dy) = 0, \\ G(x_1, y_1, x, y, dx, dy) = 0, \end{cases}$$

dont la forme a été précisée pour chacun des types particuliers qui viennent d'être successivement envisagés, si l'on veut que l'adjointe infinitésimale (M_1) soit une certaine ligne définie par l'équation

$$(2) \qquad H(x_1, y_1) = 0,$$

on doit, pour trouver toutes les courbes (M) correspondantes, intégrer l'équation différentielle

$$(3) \qquad E(x, y, dx, dy) = 0,$$

résultant de l'élimination de x_1 et y_1 entre les équations (1) et l'équation (2). Bien entendu, les cas les plus intéressants, en même temps que généralement les plus simples à traiter, sont ceux pour lesquels l'équation (2) représente une droite ou un cercle. Nous nous bornerons à donner quelques indications à ce sujet en ce qui concerne les deux dernières espèces d'adjointes infinitésimales qui viennent d'être examinées.

26. Soit, par exemple, l'adjointe infinitésimale du n° **23**. Si l'on suppose qu'elle se confonde avec la droite

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1,$$

l'élimination de x_1 et y_1 entre cette équation et les équations (1) du n° **23** donne l'équation différentielle

$$[b(l+a)x + aly]\,dy + aby\,dx = 0,$$

équation homogène dont l'intégrale générale obtenue par la méthode classique consistant, par la substitution $y = ux$, à séparer les variables, peut, après des calculs dont nous supprimons le détail, s'écrire

$$y^{1-\frac{l}{a}} = C\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

C étant la constante d'intégration. En particulier, pour $l = -a$ [auquel cas, le point O' est symétrique, par rapport à O, du point de rencontre de la droite (M_1) avec Ox], on a

$$y^2 = C\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right),$$

parabole passant par O où sa tangente est parallèle à la droite (M_1), ce qui montre que O' est le pôle de cette droite par rapport à la parabole. Autrement dit : *Si* (M) *est une parabole passant par* O, *et* O' *un point quelconque du diamètre de cette parabole passant par* O, *le point de rencontre* M_1 *de* OM *et de la parallèle* *à* MT *menée par* O′ *décrit la polaire de* O′ *par rapport à la parabole;* théorème bien facile à démontrer directement. Dès lors, la construction donnée au n° 23 permet d'avoir le centre de courbure de la parabole.

27. Prenons maintenant pour adjointe (M_1) du type défini au n° 23 un cercle de centre O,

$$x_1^2 + y_1^2 = r^2.$$

Dans ce cas, l'élimination de x_1 et y_1 entre cette équation et les équations (1) du n° 23 donne

$$[(l^2 - r^2)x^2 + l^2y^2]\,dy^2 + 2r^2xy\,dx\,dy - r^2y^2\,dx^2 = 0,$$

qui, par la substitution $y = ux$, se transforme en

$$\frac{dx}{x} + \frac{(l^2u^2 + l^2 - r^2)\,du}{lu[\,l(1+u^2) \mp r\sqrt{1+u^2}\,]} = 0$$

ou

$$\frac{dx}{x} + \frac{lu\,du}{l(1+u^2) \mp r\sqrt{1+u^2}} + \frac{l^2 r^2}{l} \cdot \frac{du}{u[\,l(1+u^2) \mp r\sqrt{1+u^2}\,]} = 0.$$

Faisons encore le changement de variable

$$1 + u^2 = z^2.$$

L'équation devient

$$\frac{dx}{x} + \frac{l\,dz}{lz \mp r} + \frac{l^2 - r^2}{l}\,\frac{dz}{(z^2-1)(lz \mp r)} = 0,$$

qui, par décomposition du dernier terme, se transforme en

$$\frac{2l\,dx}{x} + \frac{(l \pm r)\,dz}{z-1} + \frac{(l \mp r)\,dz}{z+1} = 0.$$

L'intégrale générale de celle-ci est

$$x^{2l}(z-1)^{l\pm r}(z+1)^{l\pm r} = C$$

ou

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - x\right)^{l\pm r}\left(\sqrt{x^2+y^2} + x\right)^{l\mp r} = C,$$

que l'on peut transformer (si l'on représente toujours par C une constante arbitraire pouvant ne pas garder la même valeur dans les transformations successives) en

$$C^2 y^{\frac{\pm 2l}{r}} + 2Cxy^{\frac{\pm l - r}{r}} = 1.$$

D'après la Remarque finale du n° 23, la courbe (M) est alors la trajectoire d'un point animé d'une vitesse d'entraînement constante en grandeur et direction, de vecteur $O'O$, et d'une vitesse relative constante en grandeur et constamment dirigée vers le point O, courbe que j'ai précédemment appelée *courbe du nageur*.

En particulier, pour $l = r$ [auquel cas le cercle (M_1) de centre O passe par O'], on a les équations

$$C^2 + 2Cx = y^2,$$
$$C^2 y^2 + 2Cx = 1,$$

la seconde étant d'ailleurs identique à la première lorsqu'on y change C en $-\frac{1}{C}$.

L'équation unique, donc ainsi obtenue, représente une parabole d'axe Ox et de foyer O. Si on lui applique la construction du centre de courbure du n° 23, on voit qu'ici les points M_1 et P'_1 étant diamétralement opposés dans le cercle (M_1) de centre O, si l'on abaisse de μ la perpendiculaire μG sur OM, le triangle $M\mu G$ est homothétique de $M_1 I P'_1$ par rapport à O, et le point G, symétrique de M par rapport à O. On retrouve donc ainsi la construction classique du centre de courbure à la parabole : *μ se trouve sur la perpendiculaire au rayon vecteur, élevée par le symétrique du point* M *par rapport au foyer*.

28. Traitons les mêmes questions pour l'adjointe du n° 24. Si cette adjointe est la droite

$$\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b} = 1,$$

l'élimination de x_1 et y_1 entre cette équation et les équations (1) du n° 24 donne l'équation différentielle

$$\left[\frac{b(a-l)}{a} x - ly\right] dx + by\, dy = 0,$$

qui, par la substitution $y = ux$, se transforme en

$$\frac{dx}{x} + \frac{u\,du}{u^2 - \frac{l}{b}u + \frac{a-l}{a}} = 0.$$

L'intégration de cette équation prend une forme simple lorsque le trinome du second terme a ses racines réelles et inégales; soient λm et m. L'équation s'écrit alors, en effet,

$$(\lambda - 1)\frac{dx}{x} + \frac{\lambda\,du}{u - \lambda m} - \frac{du}{u-m} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x^{\lambda-1}\frac{(u-\lambda m)^\lambda}{u-m} = C$$

ou

$$(y - \lambda mx)^\lambda = C(y - mx).$$

En particulier, pour $\lambda = 2$, on a la parabole

$$(y - 2mx)^2 = C(y - mx),$$

qui passe par O, où $y - mx = 0$ est sa tangente, $y - 2mx = 0$ son diamètre, et qui est normale à OX en son second point de rencontre avec cet axe.

Les projections du point O′ sur ces deux droites sont à l'intersection de leur système

$$(y - 2mx)(y - mx) = 0$$

et du cercle

$$x^2 + y^2 - lx = 0,$$

décrit sur OO′ comme diamètre. Or, on a identiquement

$$x^2 + y^2 - lx - (y - 2mx)(y - mx) = x[3my - (2m^2 - 1)x - l],$$

et

$$3my - (2m^2 - 1)x - l = 0$$

n'est autre ici que la droite (M_1) qui, d'après sa définition même, passe par les pieds des normales menées de O′ à la parabole; d'où ce théorème :

Si, sur une normale à une parabole, coupant cette courbe, *en dehors de son pied, au point* O, *on prend un point* O′ *quelconque, les pieds des deux autres normales qu'on peut mener de* O *à la parabole se trouvent sur la droite qui joint les projections de* O′ *sur le diamètre et sur la tangente en* O *à la parabole.*

Considérons maintenant le cas particulier où $\lambda = -1$. On a cette fois, en remplaçant C par $\frac{1}{C}$,

$$y^2 - m^2x^2 = C,$$

conique de centre O et d'axes OX et OY. Ainsi : *le lieu des points de rencontre des diamètres d'une conique et des parallèles à ses normales menées par un point quelconque pris sur l'un de ses axes est une perpendiculaire à cet axe.* Dès lors, la construction du centre de courbure μ, donnée au n° 24, montre que, *si la perpendiculaire élevée en* N *à la normale* MN *coupe le diamètre* OM *en* H, μ *est sur la perpendiculaire abaissée de* H *sur* OX. C'est la construction bien connue de Mannheim.

29. Si nous supposons maintenant que l'adjointe du n° 24 soit un cercle de centre O et de rayon r, l'équation différentielle est

$$l^2(x^2 + y^2)\,dx^2 = r^2(2\,dx + y\,dy)^2,$$

qui, par la substitution $y = ux$, devient

$$\frac{dx}{x} + \frac{ru\,du}{r(u^2+1) \pm l\sqrt{u^2+1}} = 0,$$

ou, si nous faisons encore le changement de variable $u^2 + 1 = z^2$,

$$\frac{dx}{x} + \frac{r\,dz}{rz \pm l} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$x(rz \pm)\,l = C$$

ou

$$x^2 + y^2 = \frac{(C \pm rz)^2}{r^2},$$

coniques de foyer O et d'axe OX. La construction du n° 24 montre ici que, *si la perpendiculaire élevée en* N *à la normale* MN *coupe* OM *en* I, μ *est sur la perpendiculaire élevée en* I *à* OM.

C'est la construction classique du centre de courbure des coniques, que Keill a fait connaître, dès 1708, dans les *Philosophical Transactions* (t. XXVI, p. 177).

30. Supposons enfin, toujours dans la même hypothèse, que (M_1) soit un cercle passant par O et ayant son centre sur OX,

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = r^2.$$

L'équation différentielle se met alors, par la substitution $y = ux$, immédiatement sous la forme

$$\frac{dx}{x} = \frac{2au\,du}{(l - 2a)(1 + u^2)}$$

dont l'intégrale est

$$x = C(1 + u^2)^{\frac{a}{l-2a}},$$

ou

$$x = C(x^2 + y^2)^{\frac{a}{l}},$$

ou encore, si l'on pose $\frac{a}{l} = \frac{m-1}{2m}$,

$$\sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^m = C,$$

c'est-à-dire, en coordonnées polaires,

$$\rho \cos^m \omega = C,$$

équation qui définit les courbes dites *potentielles* [1], car si, construisant la courbe pour différentes valeurs entières de m, on désigne par ρ_m le rayon vecteur correspondant, on a, pour une même valeur de ω,

$$\rho_1^m = C^{m-1}\rho_m.$$

---

[1] *Leçons de Statique graphique* de Favaro (trad. Terrier), t. II, p. 57.