BULLETIN DE LA S. M. F.

P. MONTEL

Sur les familles quasi-normales de fonctions analytiques

Bulletin de la S. M. F., tome 52 (1924), p. 85-114
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1924__52__85_1>

SUR LES FAMILLES QUASI-NORMALES DE FONCTIONS ANALYTIQUES;

Par M. Paul Montel.

Introduction.

On sait qu'une famille normale de fonctions analytiques dans un domaine possède la propriété que toute suite infinie de fonctions de cette famille admet au moins une fonction limite : la convergence vers cette fonction limite est d'ailleurs uniforme.

Si la convergence reste, en général, uniforme, mais peut cesser de l'être autour d'un nombre *fini* de points du domaine, on dit que la famille est quasi-normale.

C'est l'étude des familles quasi-normales qui fait l'objet du présent travail. Dans le Chapitre I, je m'occupe des familles de fonctions holomorphes et, en particulier, de leurs propriétés autour des points irréguliers, c'est-à-dire des points autour desquels la convergence cesse d'être uniforme.

Je fais la même étude, dans le Chapitre II, pour les familles de fonctions méromorphes. Les résultats sont ici moins simples parce qu'une fonction méromorphe dans un domaine peut y prendre n'importe quelle valeur, tandis que, au point de vue qui nous occupe, une fonction holomorphe doit être considérée comme une fonction admettant une valeur exceptionnelle : la valeur infinie.

Dans le Chapitre III, j'applique les théorèmes obtenus, à la famille des fonctions méromorphes qui ne prennent qu'un nombre limité de fois chacune de trois valeurs particulières fixes : 0, 1, ∞, par exemple. On obtient ainsi des généralisations très précises des théorèmes de M. Schottky et de M. Landau sur les fonctions à valeurs exceptionnelles. Le cas des fonctions holomorphes, que j'ai traité dans un Mémoire précédent, apparaît ici comme cas particulier : il suffit de supposer que les fonctions considérées ne prennent jamais la valeur infinie.

CHAPITRE I.

FAMILLES QUASI-NORMALES DE FONCTIONS HOLOMORPHES.

1. Considérons des fonctions $f(z)$, holomorphes en tout point intérieur d'un domaine connexe (D). On sait qu'elles forment une *famille normale* lorsque, de toute suite infinie de ces fonctions, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans tout domaine (D′) intérieur à (D) : la fonction limite est nécessairement holomorphe à l'intérieur de (D). Nous dirons, plus brièvement, que toute suite infinie de fonc-

tions $f(z)$ est génératrice d'une suite convergeant uniformément dans l'intérieur de (D).

On dit qu'une famille de fonctions $f(z)$, holomorphes dans l'intérieur de (D), est *quasi-normale*, si, de toute suite infinie de ces fonctions, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans tout domaine (D′) intérieur à (D), sauf en un nombre fini de points. Les points autour desquels la convergence n'est pas uniforme sont appelés *points irréguliers*. Il est facile de voir que toute suite infinie de fonctions $f(z)$ est alors génératrice, soit d'une suite partielle convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), soit d'une suite partielle convergeant uniformément vers l'infini, sauf en un certain nombre de points irréguliers (¹).

2. Si le nombre des points irréguliers ne dépasse pas l'entier p, on dit que la famille des fonctions $f(z)$ est *quasi-normale d'ordre p*. Par exemple, les familles de fonctions

$$f(z) = 1 + nz,$$
$$g(z) = 1 + nz^2$$

sont quasi-normales d'ordre *un*; n désignant un entier, ou même, un nombre complexe arbitraire.

Une famille de fonctions ne prenant pas plus de p fois la valeur zéro, ni plus de q fois la valeur *un* est une famille quasi-normale d'ordre p, si p est le plus petit des deux entiers p et q (²). Mais, réciproquement, si une famille est quasi-normale d'ordre p, on ne peut en conclure que les fonctions de cette famille ne prennent pas plus de p fois au moins une valeur; par exemple, les fonctions $f(z) = 1 + nz$ ne prennent qu'une seule fois toute valeur, mais les fonctions $g(z) = 1 + nz^2$ prennent deux fois toutes les valeurs : elles forment cependant des familles quasi-normales d'ordre *un*. La famille

$$h(z) = 1 + n!\, z^n,$$

(¹) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 22-24. — *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, classe des sciences, 2ᵉ série, t. VI, 1922, p. 1-41).

(²) *Loc. cit.*

n désignant un entier positif, est quasi-normale d'ordre *un*, mais l'équation $h(z) = a$ admet un nombre de racines qui croît indéfiniment avec n.

3. Il importe donc de préciser la nature des points irréguliers : nous les distinguerons par le nombre maximum des zéros de $f(z) - a$ autour de chacun d'eux.

Tout d'abord, si A est un point irrégulier pour une suite $f(z)$, on peut en extraire une suite partielle $f_n(z)$ telle que les équations $f_n(z) = a$ admettent une racine autour de A, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles, et cela, quel que soit a. Supposons, en effet, qu'il existe pour toute suite partielle $f_n(z)$ extraite de la première, une valeur a_0 pour laquelle une infinité de fonctions $f_n(z) - a_0$ n'aient pas de zéro autour de A. Soit

$$f_{n_1}(z), \quad f_{n_2}(z), \quad \ldots, \quad f_{n_k}(z), \quad \ldots,$$

la suite de ces fonctions. Puisqu'elle est extraite d'une suite convergeant uniformément, sauf en p points irréguliers, elle converge aussi dans les mêmes conditions. Si la fonction limite est finie, la convergence est uniforme dans (D), et il n'y a pas de point irrégulier; si la limite est infinie la suite des fonctions

$$g_{n_k}(z) = \frac{1}{f_{n_k}(z) - a_0}$$

converge uniformément vers zéro autour du point A, sauf peut-être en A; mais, comme les fonctions $g_{n_k}(z)$ sont régulières en A, il résulte d'un théorème classique de Weierstrass qu'elles convergent uniformément même en A : la suite $f_n(z)$ étant arbitraire, A ne serait pas irrégulier pour la suite initiale $f(z)$.

On conclut de ce qui précède que, si A est un point irrégulier pour une famille de fonctions $f(z)$, il existe une infinité de ces fonctions pour lesquelles $f(z) - a$ aura, quel que soit a, une racine voisine de A.

Il peut arriver que, pour une infinité de fonctions $f(z)$, les équations $f(z) = a$ aient, quel que soit a, deux ou plusieurs zéros dans le voisinage de A. Nous dirons que A est un *point irrégulier d'ordre* μ, s'il existe une infinité de fonctions $f(z)$ telles que $f(z) - a$ ait, quel que soit a, μ zéros au moins dans le voisinage de A et s'il n'y a qu'un nombre fini de fonctions $f(z)$ telles que $f(z) - a$ ait, quel que soit a, plus de μ zéros dans le voisinage de A. Par exemple, le point $z = 0$ est irrégulier d'ordre *un* pour les fonctions $f(z) = 1 + nz$; irrégulier d'ordre deux pour les fonctions $g(z) = 1 + nz^2$. Pour les fonctions $h(z) = 1 + n!\, z^n$, le point $z = 0$ n'est pas un point irrégulier d'ordre fini.

On peut remarquer que si A est un point irrégulier d'ordre μ, il existe une infinité de fonctions $f(z)$ pour lesquelles $f(z) - a$ a exactement μ zéros autour de A, quelle que soit la valeur de a. En effet, il existe une suite de $f(z)$ pour laquelle A est irrégulier, car, si toute suite convergeait uniformément autour de A, il n'y aurait pas de suite dont les fonctions $f_n(z)$ prendraient toutes les valeurs autour de A. Donc, $f_n(z)$ croît indéfiniment sur une circonférence de centre A ne contenant aucun autre point irrégulier; pour n assez grand, on a $\left|\frac{a}{f_n(z)}\right| < 1$ et, d'après un théorème de Rouché, $f_n(z) = 0$ et $f_n(z) = a$ ont le même nombre de racines dans le cercle.

4. Nous dirons qu'une famille de fonctions est *quasi-normale d'ordre total p*, si cette famille est quasi-normale et si la somme des ordres de ses points irréguliers, supposés d'ordre fini, ne dépasse pas p pour chaque suite convergente extraite de la famille mais atteint le nombre p pour une de ces suites au moins.

Voici des exemples : la famille $f(z) = n(z^2 - 1)$ est quasi-normale d'ordre total deux, comme la famille $g(z) = 1 + nz^2$. La famille $h(z) = 1 + n!\, z^n$ est bien quasi-normale avec le seul point irrégulier $z = 0$, mais son ordre total n'est pas fini.

En résumé, une famille est quasi-normale d'ordre total p, si toute suite infinie est génératrice d'une suite convergeant, soit uniformément vers une fonction holomorphe, soit uniformément vers l'infini sauf en h points irréguliers dont les ordres $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_h$ vérifient l'inégalité ou l'égalité

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_h \leqq p,$$

l'égalité étant atteinte pour une suite au moins.

5. Par exemple, on sait que les fonctions $f(z)$ qui ne prennent

pas plus de p fois la valeur o, ni plus de q fois la valeur 1 forment une famille quasi-normale. Si $p \leqq q$, l'ordre total de cette famille ne peut dépasser p.

Réciproquement, considérons une famille quasi-normale d'ordre total p; je dis que le nombre des zéros de $f(z) - a$ est borné, pour chaque valeur de a, dans tout domaine (D') intérieur à (D). S'il en était autrement, en effet, il existerait un domaine (D') pour lequel on puisse trouver une fonction $f_1(z)$ telle que $f_1(z) = a$ ait une racine au moins dans ce domaine; une fonction $f_2(z)$, telle que $f_2(z) - a$ ait deux zéros au moins, etc.; $f_n(z)$, telle que $f_n(z) - a$ ait n zéros au moins dans (D'), etc. La suite $f_n(z)$ ainsi formée est génératrice d'une suite partielle $f_{n_k}(z)$ qui converge uniformément vers une fonction holomorphe $f_0(z)$ ou qui converge uniformément vers l'infini, sauf en h points dont la somme des ordres ne dépasse pas p.

Dans le premier cas, on sait que pour n_k assez grand, $f_{n_k}(z) - a$ aurait, dans (D'), exactement autant de zéros que $f_0(z) - a$, c'est-à-dire un nombre fini : or, ce nombre croît indéfiniment avec n_k. Le premier cas est donc à écarter.

Dans le second cas, le nombre total des zéros de $f_{n_k}(z) - a$ ne peut dépasser p que pour un nombre fini de valeurs de n_k, puisque nous avons vu que si un point A est irrégulier d'ordre μ, le nombre des zéros de $f_{n_k}(z) - a$ voisins de A est égal à μ, quel que soit a, lorsque n_k est assez grand. Le second cas est donc aussi à écarter.

Il en résulte que l'on ne peut supposer que le nombre des zéros de $f(z) - a$ ne soit pas borné dans l'intérieur de (D). Ce nombre est borné pour chaque valeur de a et la plus petite valeur que peut prendre cette borne, lorsqu'on donne à a différentes valeurs est l'ordre total de la famille quasi-normale. En particulier, le nombre des zéros de $f(z)$ et le nombre des zéros de $f(z) - 1$ ne dépassent pas des entiers fixes.

Puisque la famille des fonctions ne prenant pas plus de p fois la valeur o ni plus de q fois la valeur 1 est une famille quasi-normale dont l'ordre total ne dépasse pas le plus petit des entiers p et q, p par exemple; on voit que, *quel que soit a, le nombre des zéros de $f(z) - a$ ne dépasse pas un nombre fixe.*

Il y a donc identité entre les familles de fonctions holomorphes quasi-normales d'ordre total p et les familles de fonctions holomorphes ne prenant pas plus de p fois la valeur o ni plus de q fois la valeur 1 $(p \leqq q)$. On peut étudier ces familles en se plaçant à l'un ou l'autre de ces points de vue. Je me suis placé au second dans un travail récent [1]. Pour l'extension de la notion de famille quasi-normale aux fonctions méromorphes, il y a intérêt à se placer au premier point de vue : c'est ce que je ferai dans les paragraphes suivants.

6. Nous avons vu que si le point A est irrégulier pour une suite $f_n(z)$ et si l'ordre de ce point est égal à μ, les équations $f_n(z) = a$ ont, pour n assez grand, μ racines dans le voisinage de A.

Il en sera encore de même si l'on remplace la constante a par une fonction $\varphi(z)$ holomorphe autour de A. On a, en effet, lorsque n est assez grand, $\left|\frac{\varphi(z)}{f_n(z)}\right| < 1$, puisque $|\varphi(z)|$ a une limite supérieure sur une circonférence de centre A et de rayon assez petit pour ne pas contenir à l'intérieur d'autre point irrégulier que le point A, et que $|f_n(z)|$ croît indéfiniment, d'une manière uniforme, sur cette circonférence. D'après le théorème de Rouché déjà invoqué au paragraphe 3, les équations

$$f_n(z) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_n(z) = \varphi(z)$$

ont le même nombre μ de racines dans le cercle.

On peut aussi, au lieu de la fonction $\varphi(z)$, prendre des fonctions $\varphi_n(z)$, holomorphes autour de A, variables avec n, mais bornées dans leur ensemble au voisinage de A. Le raisonnement demeure le même; pour n assez grand, les équations

$$f_n(z) = \varphi_n(z)$$

ont μ racines dans le voisinage de A.

Par exemple, $\varphi(z)$ peut désigner un polynome de degré p dont la valeur ainsi que les valeurs de ses p premières dérivées sont données en un point fixe. Si les valeurs précédentes, au lieu d'être déterminées, sont seulement bornées, on aura des polynomes $\varphi_n(z)$ bornés dans leur ensemble.

---

[1] *Loc. cit.*, p. 87, note 1.

Supposons encore que $\varphi(z)$ désigne un polynome de degré p : on pourra le déterminer en donnant ses valeurs aux k points fixes x_i, ainsi que les valeurs, en ces points, de ses $(\alpha_i - 1)$ premières dérivées avec la condition

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = p + 1.$$

Au lieu de donner les valeurs précédentes, on peut simplement donner des limites supérieures de leurs modules; on définira ainsi des polynomes $\varphi_n(z)$, variables avec n, mais bornés dans leur ensemble, puisque leurs coefficients sont des fonctions linéaires des valeurs prises par les polynomes et leurs dérivées en chacun des points x_i.

7. Les remarques précédentes vont nous permettre d'établir la proposition suivante :

Une famille de fonctions holomorphes $f(z)$, quasi-normale d'ordre total p, est formée de fonctions bornées dans leur ensemble, c'est-à-dire est une famille normale et bornée, lorsque :

1° *les valeurs de $f(z)$ sont données ou bornées en $p+1$ points fixes;*

2° *les valeurs de $f(z)$ et de ses p premières dérivées sont données ou bornées en un point fixe;*

3° *en chacun des k points fixes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, on donne ou on borne les valeurs de $f(z)$ et, respectivement, les valeurs des $(\alpha_1 - 1), (\alpha_2 - 1), \ldots, (\alpha_k - 1)$ premières dérivées de cette fonction, avec la condition*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geqq p + 1.$$

La démonstration est immédiate dans le premier cas; si une suite de fonctions $f_n(z)$ de la famille croissait indéfiniment, il y aurait au plus p points irréguliers distincts puisque l'ordre total est p; or, la fonction est bornée en $p+1$ points, l'un de ces points est nécessairement non irrégulier et la suite devrait croître indéfiniment en ce point.

Mais, voici une démonstration applicable aux trois cas; on peut d'ailleurs remarquer que le troisième cas contient les deux premiers. Le premier cas correspond à l'hypothèse $k = p + 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p+1} = 1$; le second correspond à l'hypothèse $k = 1$, $\alpha_1 = p + 1$.

Désignons par $P_n(z)$ le polynome qui prend, ainsi que ses dérivées, les mêmes valeurs que $f_n(z)$ et ses dérivées aux points $x_1, x_2, \ldots, x_k$ où les valeurs de cette fonction et de certaines de ses dérivées sont déterminées ou bornées. S'il existait une suite augmentant indéfiniment, le nombre des racines de l'équation

$$f_n(z) = P_n(z),$$

voisines de chaque point irrégulier, serait, pour n assez grand, égal à l'ordre de ce point. D'ailleurs, si n est assez grand, il n'y a pas de racine non voisine d'un point irrégulier, puisque $f_n(z)$ augmente indéfiniment en dehors de ces points et $P_n(z)$ reste borné. Le nombre total des racines de l'équation serait donc égal à l'ordre total p de la famille des fonctions $f(z)$. Mais, d'autre part, d'après la définition même de $P_n(z)$, la différence $f_n(z) - P_n(z)$ a certainement $p + 1$ zéros au moins dans le domaine, à savoir α_1 zéros au point x_1, α_2 zéros au point x_2, etc., α_k zéros au point x_k, avec l'hypothèse

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geqq p + 1.$$

Il y a donc contradiction, et toute suite infinie convergente de fonctions $f(z)$ a pour limite une fonction holomorphe.

On sait que, dans ce cas, les fonctions $f(z)$ forment une famille normale et bornée (¹).

Pour l'application des résultats qui précèdent à l'extension des théorèmes de M. Landau et de M. Schottky aux fonctions qui prennent un nombre fini de fois les valeurs 0 ou 1, je renverrai au Mémoire cité (²). Ces extensions apparaîtront d'ailleurs, dans le Chapitre suivant, comme des cas particuliers de propositions relatives aux fonctions méromorphes.

(¹) *Cf.* P. MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe*, p. 26, Paris; Gauthier-Villars, 1910.

(²) *Loc. cit.*, p. 87, note 1. Quelques-uns des résultats établis dans ce travail ont aussi été obtenus par M. Bieberbach, en utilisant les propriétés des familles normales de fonctions holomorphes [*Über die Verteilung der Null-und Einstellen analytischen Funktionen* (*Mathematische Annalen*, t. 85, 1922, p. 142-148)].

CHAPITRE II.

FAMILLES QUASI-NORMALES DE FONCTIONS MÉROMORPHES.

8. Considérons une suite infinie de fonctions $f_n(z)$ méromorphes à l'intérieur d'un domaine connexe (D). On dit que cette suite est convergente en un point z_0 intérieur au domaine, si la suite des nombres $f_n(z_0)$ a une limite *finie ou infinie* $f_0(z_0)$. La suite est dite *convergente* dans l'intérieur de (D) si elle converge en chaque point z_0 intérieur à (D).

On dit que la suite $f_n(z)$ converge uniformément au point z_0, si l'on peut tracer un cercle de centre z_0 et de rayon assez petit pour que, si la limite $f_0(z_0)$ de $f_n(z_0)$ est finie, la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans le cercle et, si la limite $f_0(z_0)$ de $f_n(z_0)$ est l'infini, la suite $\frac{1}{f_n(z)}$ converge uniformément dans ce cercle [1]. En d'autres termes, si l'on considère toutes les fonctions méromorphes $g_n(z)$ déduites de $f_n(z)$ par une même transformation homographique à coefficients constants, en chaque point z_0, les fonctions $g_n(z)$ convergent uniformément au sens habituel du mot, sauf les suites particulières correspondant à la transformation $\frac{f_n(z)+\lambda}{f_n(z)-f_0(z_0)}$ si $f_0(z_0)$ est fini, et à la transformation $f_n(z)+\lambda$, si $f_0(z_0)$ est infini (λ est une constante arbitraire).

Nous dirons que la suite $f_n(z)$ converge uniformément dans l'intérieur du domaine (D), si elle converge uniformément en chaque point z_0 intérieur à (D). La limite $f_0(z)$ est nécessairement une fonction méromorphe, puisque, autour de chaque point intérieur à D, $f_0(z)$ ou $\frac{1}{f_0(z)}$ est holomorphe. Elle peut être une constante finie ou infinie.

Considérons maintenant une famille de fonctions $f(z)$ méromorphes dans le domaine connexe (D). Cette famille est normale

---

[1] *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales scientifiques de l'École Normale*, 3e série, t. XXXIII, 1916, p. 282). — *Cf.* CARATHEODORY et LANDAU, *Beiträge zur Konvergenz von Funktionenfolgen* (*Sitzungsberichte der K. Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1911, p. 604).

dans le domaine si toute suite infinie de fonctions de la famille est génératrice d'une suite partielle convergeant uniformément dans (D) : la fonction limite est une fonction méromorphe, ou une constante finie ou infinie ([1]).

Nous dirons que la famille des fonctions méromorphes $f(z)$ est *quasi-normale d'ordre q* dans le domaine (D), si toute suite infinie de fonctions de cette famille est génératrice d'une suite partielle $f_n(z)$ convergeant uniformément dans l'intérieur de (D), *sauf en un nombre fini q de points intérieurs à* (D). Les points autour desquels la suite $f_n(z)$ ne converge pas uniformément sont dits *irréguliers* pour cette suite. En dehors des points irréguliers, la limite est une fonction méromorphe ou une constante finie ou infinie. On peut supposer que la suite $f_n(z)$ converge en chaque point irrégulier sans converger uniformément autour de ce point : dans le cas contraire, il suffit, en effet, d'extraire de la suite une suite partielle convergeant au premier point irrégulier; de cette nouvelle suite, on extrait une nouvelle suite partielle convergeant au second point irrégulier, etc., jusqu'au dernier point irrégulier. La suite finale obtenue converge en tous les points intérieurs à (D).

La propriété pour une famille de fonctions $f(z)$, d'être quasi-normale dans un domaine, *est invariante pour toute transformation homographique à coefficients constants*, car, si une suite de fonctions $f_n(z)$ converge uniformément, sauf en des points irréguliers, la suite $g_n(z)$ qu'on en déduit au moyen d'une transformation homographique à coefficients constants, converge uniformément sauf aux mêmes points irréguliers.

Voici des exemples de familles quasi-normales : la suite

$$f_n(z) = \frac{1 + nz^2}{1 + nz(z-1)}$$

est quasi-normale; elle converge uniformément vers la fonction $\frac{z}{z-1}$ sauf au point o où elle a pour limite l'unité.

La suite

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + nP(z)},$$

([1]) Note 1, page 283, du premier Mémoire cité dans la note précédente.

où

$$P(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_p),$$

converge uniformément vers zéro, sauf en p points irréguliers z_i où la limite est un. La suite

$$f_n(z) = f_0(z) + \frac{g_0(z) - f_0(z)}{1 + nP(z)}$$

converge uniformément vers la fonction holomorphe $f_0(z)$ sauf aux p points irréguliers z_i où elle a pour limites les valeurs $g_0(z_i)$ de la fonction holomorphe $g_0(z)$.

La suite

$$f_n(z) = \left(1 + \frac{1}{nz}\right)^n$$

converge uniformément vers $e^{\frac{1}{z}}$ sauf au point $z = 0$ où elle a pour limite la valeur infinie.

9. Il nous sera utile d'étudier comment se comportent les fonctions d'une suite quasi-normale dans le voisinage d'un point irrégulier et en particulier, de connaître le nombre des racines des équations $f_n(z) = a$ autour de ce point, a désignant une valeur complexe arbitraire, finie ou infinie.

Remarquons d'abord qu'il ne saurait y avoir deux valeurs exceptionnelles a' et a'' de a; c'est-à-dire deux valeurs telles que, dans un cercle assez petit dont le centre est le point irrégulier A, les équations

$$f_n(z) = a', \qquad f_n(z) = a''$$

n'aient pas de racine pour toute suite extraite de la suite $f_n(z)$. En effet, si l'une des valeurs, a'', par exemple, est infinie, les fonctions $f_n(z)$ sont holomorphes autour de A et, comme il existe une valeur exceptionnelle finie a', nous avons vu au paragraphe 3 que le point A n'est pas irrégulier. Si a' et a'' sont des valeurs finies, il suffit de remplacer la suite $f_n(z)$ par la suite

$$g_n(z) = \frac{1}{f_n(z) - a''},$$

par exemple, pour être ramené au cas précédent.

Donc, dans le voisinage d'un point irrégulier, on peut extraire de la suite, une suite partielle $f_n(z)$ telle que les équations

$$f_n(z) = a$$

aient toujours des racines sauf, peut-être, pour une valeur unique, finie ou infinie de a.

Plaçons-nous dans le cas où il existe réellement une valeur exceptionnelle a'; en remplaçant au besoin $f_n(z)$ par $\frac{1}{f_n(z) - a'}$, nous pouvons toujours supposer que la valeur exceptionnelle est l'infini. Le point A ne peut être alors irrégulier que si la limite de la suite est la constante infinie. Nous avons vu que, dans ce cas, on peut obtenir une suite partielle, que nous appellerons encore $f_n(z)$, telle que les fonctions $f_n(z) - a$ aient, quel que soit a, le même nombre μ de zéros, si, pour une valeur particulière de a, le nombre de ces zéros est égal à μ. Par exemple, la suite

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + nz},$$

qui a pour limite o si z n'est pas nul, et 1 si z est nul, admet la valeur exceptionnelle o autour du point irrégulier $z = 0$. Les équations $f_n(z) = a$, ont, quel que soit $a \neq 0$, une racine unique autour de $z = 0$. Pour la suite

$$f_n(z) = \frac{1}{1 + n!\,z^n}$$

qui admet la même limite, on a encore la valeur exceptionnelle o, mais le nombre des racines des équations $f_n(z) = a$, voisines de $z = 0$, croît indéfiniment avec n, quel que soit $a \neq 0$.

Supposons maintenant qu'il n'y ait aucune valeur exceptionnelle autour du point irrégulier A. Il peut arriver que le nombre des racines de l'équation $f_n(z) - a = 0$ croisse indéfiniment quel que soit a, pour toute suite partielle; il en est ainsi, par exemple, pour les fonctions

$$f_n(z) = \frac{1 + n!\,z^n}{1 + (n+1)!\,z^n}$$

dont la limite est o pour $z \neq 0$ et 1 pour $z = 0$. Autour de $z = 0$, l'équation $f_n(z) = a$ a les n racines

$$z^n = \frac{a-1}{n!(1-na)}$$

voisines de zéro.

Si l'on suppose que, pour une valeur particulière de a, il y ait un nombre fini de racines, on ne peut rien conclure relativement aux autres valeurs de a. La suite

$$f_n(z) = \frac{z}{1+n!z^n}$$

converge vers zéro, avec le point irrégulier $z = 0$. L'équation

$$f_n(z) = 0$$

a la seule racine $z = 0$, mais lorsque a est différent de zéro, l'équation

$$f_n(z) = a$$

a n racines voisines de zéro, car si l'on écrit

$$1 + n!z^n - \frac{z}{a} = 0,$$

on peut supposer n assez grand pour que

$$\left|\frac{z}{a(1+n!z^n)}\right| < 1.$$

Au contraire, la suite $\frac{z}{1+nz}$ qui tend vers zéro, avec le point irrégulier $z = 0$ a une seule racine pour $a = 0$, et aussi, quel que soit a, dans le voisinage du point irrégulier.

Nous sommes donc conduits à supposer qu'il existe deux valeurs distinctes a' et a'' de a et une suite extraite de $f_n(z)$, que nous appellerons toujours $f_n(z)$, pour laquelle les équations

$$f_n(z) = a', \qquad f_n(z) = a''$$

n'aient pas, respectivement, plus de μ' et μ'' zéros.

Mais, avant d'examiner ce cas, remarquons que l'hypothèse de l'existence d'une valeur a' pour laquelle le nombre des zéros de $f_n(z) - a'$ est fini entraîne cette conséquence que *la fonction limite $f_0(z)$ est méromorphe dans le voisinage du point irré-*

gulier A, à condition de considérer une constante, finie ou infinie, comme une fonction méromorphe particulière.

En effet, nous pouvons toujours supposer a' infini, en remplaçant, s'il est nécessaire, la suite $f_n(z)$ par la suite $\frac{1}{f_n(z)-a'}$. Les fonctions $f_n(z)$ ont donc au plus μ' pôles dans le voisinage du point irrégulier A d'affixe z_0. Posons

$$f_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{(z-z_1)\ldots(z-z_{\mu'})},$$

$z_1, z_2, \ldots, z_{\mu'}$ désignant les affixes des pôles voisins de A. Le produit

$$(z-z_1)\ldots(z-z_{\mu'})$$

converge uniformément vers $(z-z_0)^{\mu'}$, puisque les μ' pôles ont pour limite z_0. La fonction $\varphi_n(z)$ holomorphe autour de A converge uniformément, sur une petite circonférence de centre z_0, vers la fonction

$$\varphi_0(z) = f_0(z)(z-z_0)^{\mu'},$$

donc, si $f_0(z)$ n'est pas infinie, $\varphi_n(z)$ converge uniformément à l'intérieur de cette circonférence, et $\varphi_0(z)$ est holomorphe dans le petit cercle; comme

$$f_0(z) = \frac{\varphi_0(z)}{(z-z_0)^{\mu'}},$$

on voit que $f_0(z)$ est méromorphe autour du point A. Si $f_n(z)$ augmente indéfiniment autour de A, cette fonction coïncide avec la constante infinie.

Si la valeur $f_0(z_0)$ de la limite des $f_n(z_0)$ ne coïncide pas avec la valeur en z_0 de $\frac{\varphi_0(z)}{(z-z_0)^{\mu'}}$, on voit que cette valeur est parasite et introduite seulement par le mode de représentation de la fonction comme limite de la suite $f_n(z)$.

10. Supposons maintenant qu'il existe deux valeurs distinctes a' et a'' et une infinité de fonctions $f_n(z)$ telles que $f_n(z)-a'$ ait μ' zéros autour de A et $f_n(z)-a''$ ait μ'' zéros. Si a', par exemple, est infini, nous remplacerons la suite $f_n(z)$ par la suite $f_n(z)-a''$; si a' et a'' sont finis tous les deux nous remplacerons la suite $f_n(z)$

par la suite $\dfrac{f_n - a''}{f_n - a'}$; dans tous les cas, nous aurons une suite pour laquelle chaque fonction a μ' pôles et μ'' zéros autour de A. On peut donc toujours admettre que $a' = \infty$ et $a'' = 0$. Soit donc

$$f_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{\mu'})},$$

une fonction de la suite considérée; on peut écrire

$$\varphi_n(z) = (z - z'_1)(z - z'_2)\dots(z - z'_{\mu''})\psi_n(z),$$

et les nombres $z_1, z_2, \dots, z_{\mu'}, z'_1, z'_2, \dots, z'_{\mu''}$ ont tous pour limite l'affixe z_0 du point A lorsque n croît indéfiniment. Supposons d'abord que la limite $f_0(z)$ de $f_n(z)$ ne soit ni la constante zéro, ni la constante infinie; $\varphi_n(z)$ converge uniformément vers

$$\varphi_0(z) = (z - z_0)^{\mu''}\psi_0(z),$$

$\psi_0(z)$ étant la limite de $\psi_n(z)$: on a $\psi_0(z_0) \neq 0$. On peut toujours supposer $\mu' \geqq \mu''$, sinon, on remplacerait f_n par $\dfrac{1}{f_n}$; la limite de $f_n(z)$ est donc la fonction

$$\frac{\psi_0(z)}{(z - z_0)^{\mu' - \mu''}}.$$

Considérons alors l'équation

$$f_n(z) - a = 0,$$

ou

$$\varphi_n(z) - a(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_{\mu'}) = 0,$$

dans laquelle a n'est ni nul, ni infini. Le premier membre de cette équation a pour limite

$$\varphi_0(z) - a(z - z_0)^{\mu'} = (z - z_0)^{\mu''}[\psi_0(z) - a(z - z_0)^{\mu' - \mu''}].$$

Supposons $\mu' > \mu''$ et traçons un cercle (c) de centre A, assez petit pour que $\psi_0(z)$ n'ait aucun zéro à l'intérieur ni sur la circonférence et pour que, sur cette circonférence,

$$\left|\frac{a(z - z_0)^{\mu' - \mu''}}{\psi_0(z)}\right| < 1;$$

alors, l'équation

$$\psi_0(z) - a(z - z_0)^{\mu' - \mu''} = 0$$

n'aura pas de racine dans (c) et l'équation

$$\varphi_0(z) - a(z - z_0)^{\mu'} = 0$$

aura exactement μ'' racines dans (c). Or, lorsque n augmente indéfiniment, la fonction holomorphe

$$\varphi_n(z) - a(z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_{\mu'})$$

qui converge uniformément dans (c) vers $\varphi_0(z) - a(z - z_0)^{\mu'}$ a le même nombre de zéros que sa fonction limite lorsque n est assez grand [1], c'est-à-dire μ''. En d'autres termes, l'équation

$$f_n(z) - a = 0$$

a toujours μ'' racines voisines de A, lorsque a est fini et a μ' racines voisines de A, lorsque a est infini.

Supposons maintenant $\mu' = \mu''$. Si a est différent de $\psi_0(z_0)$, le même raisonnement prouve que l'équation a $\mu' = \mu''$ racines; si $a = \psi_0(z_0)$, le nombre des racines peut être quelconque. Voici des exemples :

$$f_n(z) = \frac{1 + nz}{1 + nz^3}$$

a pour limite $\frac{1}{z^2}$ pour $z \neq 0$ et 1 pour $z = 0$ qui est le point irrégulier; on a ici

$$\varphi_n(z) = z + \frac{1}{n}, \qquad \mu' = 3, \qquad \mu'' = 1;$$

l'équation $f_n(z) - a = 0$ a toujours une racine voisine de zéro lorsque a est fini. Soit encore

$$f_n(z) = \frac{1 + nz^2 + z^4}{1 + nz^2},$$

qui a pour limite 1, avec le point irrégulier $z = 0$. On a ici

$$\varphi_n(z) = z^2 + \frac{1}{n} + \frac{z^4}{n}, \qquad \mu' = \mu'' = 2, \qquad \psi_0(z) = 1;$$

$\psi_0(0) = 1$; pour $a \neq 1$, l'équation $f_n(z) = a$ a toujours deux racines voisines de zéro; pour $a = 1$, elle en a quatre. Si l'on

---

(1) *Leçons sur les séries de polynomes, etc.*, p. 122.

prend

$$f_n(z) = \frac{1 + nz^2 + \dfrac{z^n}{n!}}{1 + nz^2}$$

qui a la même limite, avec le même point irrégulier $z = 0$, on obtient

$$\varphi_n(z) = z^2 + \frac{1}{n} + \frac{z^{n-2}}{n.n!}, \qquad \mu' = \mu'' = 2, \qquad \psi_0(z) = 1.$$

Si $a \neq 1$, la fonction $f_n(z) - a$ a toujours deux zéros voisins de zéro; si $a = 1$, le nombre des zéros croît indéfiniment avec n.

Nous avons laissé de côté le cas où $f_n(z)$ tend vers zéro ou augmente indéfiniment autour de A. Bornons-nous au premier cas, en remplaçant, au besoin, f_n par $\frac{1}{f_n}$. Dans ce cas, $\varphi_n(z)$ tend uniformément vers zéro autour de A : pour chaque valeur non nulle de a, prenons n assez grand pour que, sur la circonférence du cercle (c) supposé ne contenir que le seul point irrégulier A, on ait

$$\left| \frac{\varphi_n(z)}{a(z - z_1)\ldots(z - z_{\mu'})} \right| < 1,$$

ce qui est possible, puisque le numérateur de cette fraction tend vers zéro et que le dénominateur tend vers $a(z - z_0)^{\mu'}$ qui n'est pas nul sur la circonférence. Dans ces conditions, d'après le théorème de Rouché, l'équation a exactement μ' racines dans le cercle; lorsque a est nul, elle en a μ'' par hypothèse. Par exemple,

$$f_n(z) = \frac{z^2}{1 + nz}$$

a pour limite zéro avec le point irrégulier $z = 0$. Ici, $\varphi_n(z) = \frac{z^2}{n}$, $\mu' = 1$, $\mu'' = 2$; l'équation $f_n = a$ a toujours une racine voisine de zéro, si $a \neq 0$.

En résumé, *lorsqu'il existe une infinité de fonctions $f_n(z)$ pour lesquelles les équations*

$$f_n(z) = a', \qquad f_n(z) = a''$$

ont chacune un nombre limité de racines voisines d'un point irrégulier, les équations

$$f_n(z) = a$$

ont, quel que soit a, sauf pour une valeur exceptionnelle a_0 *au plus, le même nombre* μ *de racines voisines de a. Pour* $a = a_0$, *le nombre des racines voisines de a peut être quelconque, et même croître indéfiniment avec n.*

11. Nous sommes ainsi conduits à la définition de l'ordre d'un point irrégulier. Nous dirons qu'un point A, irrégulier pour une suite $f_n(z)$, est un *point irrégulier d'ordre* μ s'il existe une infinité de fonctions $f_n(z)$ pour lesquelles $f_n(z) - a$, ait μ zéros autour de A sauf pour une valeur exceptionnelle de a au plus, et s'il n'existe qu'un nombre fini de ces fonctions pour lesquelles $f_n(z) - a$ ait $\mu + 1$ zéros dans les mêmes conditions.

Nous dirons qu'une famille de fonctions $f_n(z)$, méromorphes dans l'intérieur d'un domaine connexe (D), est *quasi-normale d'ordre total p*, si la famille est quasi-normale et si, pour chaque suite convergente de cette famille, la somme $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_k$ des ordres de ses points irréguliers ne dépasse pas l'entier p. Cette définition suppose, bien entendu, que chaque point irrégulier ait un ordre déterminé.

12. Supposons que pour une famille quasi-normale de fonctions $f(z)$, il existe deux valeurs *fixes* a' et a'' pour lesquelles les fonctions $f(z) - a'$ et $f(z) - a''$ aient respectivement r et q racines au plus dans l'intérieur du domaine.

On peut toujours supposer que $a' = \infty$ et $a'' = 0$, en remplaçant au besoin $f(z)$ par $\dfrac{f(z) - a''}{f(z) - a'}$ ou par $f(z) - a''$. Dans ces conditions, on peut énoncer la proposition suivante :

Lorsqu'une famille de fonctions f(z) quasi-normale dans un domaine (D) *est telle que chaque fonction possède au plus q zéros et r pôles dans ce domaine, toute fonction limite est une fonction méromorphe ou une constante finie si :*

1° *les valeurs de* $f(z)$ *sont données ou bornées en* $q + 1$ *points distincts;*

2° *les valeurs de* $f(z)$ *ainsi que celles de ses q premières dérivées sont données ou bornées en un point;*

3° *les valeurs de* $f(z)$ *et de ses* $\alpha_i - 1$ *premières dérivées* *sont données ou bornées en chacun des k points fixes* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *avec la condition*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geqq q + 1.$$

La démonstration est tout à fait semblable à celle du paragraphe 7. Prenons, par exemple, la troisième hypothèse qui comprend les deux premières comme cas particuliers. Soit $P_n(z)$ le polynome prenant, ainsi que ses $\alpha_i - 1$ premières dérivées, les mêmes valeurs, au point x_i, que la fonction $f_n(z)$ et ses $(\alpha_i - 1)$ premières dérivées. Nous avons, pour une suite $f_n(z)$ convergente, extraite de la famille,

$$f_n(z) = \frac{\varphi_n(z)}{Q_n(z)},$$

en posant

$$Q_n(z) = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_r),$$

$z_1, z_2, \ldots, z_r$ désignant les pôles de $f_n(z)$ dans un domaine (D_1) intérieur à (D), et $\varphi_n(z)$ une fonction holomorphe dans (D_1). Formons l'équation

$$f_n(z) - P_n(z) = 0$$

ou

$$\varphi_n(z) - P_n(z)Q_n(z) = 0;$$

si $\varphi_n(z)$ croissait indéfiniment sur le contour du domaine (D_1) ou sur un contour très voisin ne contenant aucun point irrégulier, on aurait, pour n assez grand,

$$\left|\frac{P_n Q_n}{\varphi_n}\right| < 1,$$

puisque $|Q_n|$ est inférieur à d^r, d désignant la plus grande corde du domaine (D) et que P_n a son module borné d'après les hypothèses faites sur les valeurs données aux points x_i [1]. Donc, pour n assez grand, l'équation aurait, dans le domaine, le même nombre de racines que l'équation $\varphi_n = 0$ ou $f_n = 0$; c'est-à-dire au plus q.

Ainsi, dans l'intérieur de (D) la fonction $f_n(z) - P_n(z)$ n'aurait jamais plus de q zéros. Mais ceci est en contradiction avec la défi-

---

[1] L'expression de P_n est en effet linéaire par rapport à ces valeurs données et les coefficients ont un dénominateur différent de zéro quand les x_i sont distincts.

nition même de $P_n(x)$, puisque cette différence a α_i zéros au point x_i et que $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k \geqq q + 1$. Par suite, l'hypothèse que $f_n(z)$ augmente indéfiniment est à rejeter et le théorème est démontré.

Autour d'un point irrégulier, les fonctions $f_n(z)$ ont nécessairement des pôles, sinon, puisque la suite converge uniformément sur un petit cercle ayant pour centre le point irrégulier et ne contenant aucun pôle de la fonction limite, la convergence serait uniforme dans le cercle.

La condition qu'il existe deux valeurs fixes, zéro et l'infini, pour lesquelles les nombres des zéros et des pôles des fonctions sont limités est nécessaire pour appliquer le théorème à une famille quasi-normale, même d'ordre fini. Par exemple, la famille

$$f_n(z) = \frac{n!\,z^n}{1 + nz}$$

est quasi-normale d'ordre *un* avec le point irrégulier $z = 0$. Les fonctions $f_n(z)$ sont nulles, ainsi que leurs dérivées premières, pour $z = 0$; il n'y a qu'un seul pôle de chaque fonction $f_n(z)$ autour du point irrégulier, mais le nombre des zéros croît indéfiniment avec n : la suite a pour limite la constante infinie lorsque $z \neq 0$.

13. Supposons qu'une famille quasi-normale dans le domaine (D) n'admette jamais, comme fonction limite, qu'une fonction méromorphe qui peut être une constante finie. Soit (D_1) un domaine intérieur à (D); δ_0 la distance des frontières de (D) et de (D_1), et δ un nombre positif arbitrairement petit.

Je dis que si l'on entoure chaque pôle d'une fonction $f(z)$ d'un cercle (γ) ayant ce pôle pour centre et de rayon δ, les valeurs de $|f(z)|$ pour les points z extérieurs à ces cercles et intérieurs à (D_1) ne dépassent pas une limite supérieure fixe Ω.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait, quel que soit l'entier n, trouver une fonction $f_n(z)$ de la famille, pour laquelle, en un point z_n intérieur à (D_1) et extérieur aux petits cercles (γ_n) de rayon δ, on ait

$$|f_n(z_n)| > n.$$

Extrayons, de la suite $f_n(z)$, une suite

$$f_{n_1}(z),\quad f_{n_2}(z),\quad \ldots,\quad f_{n_k}(z),\quad \ldots$$

qui converge vers une fonction méromorphe $f_0(z)$ uniformément, sauf en h points irréguliers, dans un domaine (D_0) contenant (D_1), tel que la distance de leurs frontières dépasse δ. Comme on peut toujours supposer $\delta < \delta_0$, on peut prendre (D_0) intérieur à (D). Traçons autour de chaque point irrégulier et autour de chaque pôle de $f_0(z)$ comme centres, des cercles (γ_0) de rayon $\frac{\delta}{2}$; lorsque k est assez grand, chaque pôle de $f_{n_k}(z)$ est intérieur à l'un des cercles (γ_0). Les points z_{n_k} sont extérieurs aux cercles (γ_0) pour k assez grand. Or, $f_0(z)$ est bornée en module dans le domaine intérieur à (D_0) et extérieur aux (γ_0) et, dans ce domaine la suite $f_{n_k}(z)$ converge uniformément vers $f_0(z)$. Il en résulte que, à partir d'un certain rang, on a

$$|f_{n_k}(z) - f_0(z)| < 1,$$

par exemple et que, par suite les valeurs de $|f_{n_k}(z)|$ sont bornées dans le domaine considéré. Ce résultat est en contradiction avec l'hypothèse de l'existence, dans ce domaine, d'un point z_{n_k} pour lequel

$$|f_{n_k}(z_{n_k})| > n_k.$$

On est donc obligé d'admettre l'existence d'un nombre Ω tel que, pour toute fonction $f(z)$ de la famille, on ait

$$|f(z)| < \Omega,$$

pour tout point z intérieur à (D_1) et extérieur aux cercles (γ) de rayon δ ayant pour centres les pôles de $f(z)$.

CHAPITRE III.

APPLICATIONS.

14. Nous allons maintenant nous occuper des fonctions méromorphes dans (D) qui ne prennent pas, dans ce domaine, plus de p fois la valeur a, plus de q fois la valeur b, plus de r fois la valeur c. On peut toujours supposer que $p \geqq q \geqq r$ et, en remplaçant, s'il y a lieu, les fonctions $f(z)$ par les fonctions

$$\frac{f(z)-b}{f(z)-c}:\frac{a-b}{a-c},$$

supposer que les valeurs a, b, c sont respectivement égales à 1, 0, ∞. Nous supposons donc que les fonctions méromorphes $f(z)$ n'ont pas plus de q zéros, ni plus de r pôles et qu'elles ne prennent pas plus de p fois la valeur 1. Je me propose d'établir le théorème :

Les fonctions méromorphes dans un domaine (D), *où elles ne prennent pas plus de p fois la valeur* 1, *plus de q fois la valeur* 0, *plus de r fois la valeur infinie*, *forment une famille quasi-normale dans ce domaine. L'ordre de cette famille quasi-normale est au plus égal au nombre moyen de la suite p*, *q*, *r*.

Considérons une suite $f_n(z)$ de fonctions de la famille et soit B_1 un point limite des pôles de ces fonctions intérieurs à un domaine (D_1) intérieur à (D). Extrayons de la suite $f_n(z)$, une suite partielle $f_{\lambda_n}(z)$ telle que chaque fonction $f_{\lambda_n}(z)$ ait au moins un pôle dans un cercle arbitrairement petit de centre B_1 lorsque n est assez grand. Il existe certainement un nombre ρ_1, inférieur ou égal à r, tel qu'il y ait une infinité de fonctions $f_{\lambda_n}(z)$ ayant ρ_1 pôles voisins de B_1 et un nombre fini de ces fonctions en ayant ρ_1+1. Extrayons, de la suite $f_{\lambda_n}(z)$, une suite partielle $f_{\mu_n}(z)$ telle que chaque fonction de la nouvelle suite ait ρ_1 pôles dans le voisinage de B_1 et ρ_1 seulement. S'il existe un point B_2, limite des pôles des fonctions $f_{\mu_n}(z)$ et distinct de B_1, on pourra de même choisir un nombre ρ_2 et une suite $f_{\nu_n}(z)$ telle que chaque fonction de cette suite ait pour n assez grand, ρ_1 pôles dans un cercle arbitrairement petit de centre B_1 et ρ_2 pôles dans un cercle arbitrairement petit de centre B_2; il faut évidemment que $\rho_1+\rho_2$ ne dépasse pas r. En continuant ainsi, on obtiendra l points B_1, B_2, ..., B_l, l nombres ρ_1, ρ_2, ..., ρ_l, et une suite $f_{\sigma_n}(z)$ telle que, en traçant les cercles (γ_1), (γ_2), ..., (γ_l), de centres B_1, B_2, ..., B_l et sans point commun deux à deux, chaque fonction de la suite ait ρ_1 pôles dans (γ_1), ρ_2 pôles dans (γ_2), etc., ρ_l pôles dans (γ_l).

Dans le domaine intérieur à (D_1) et extérieur aux cercles (γ_j), les fonctions $f_{\sigma_n}(z)$ sont holomorphes et ne prennent pas plus de q fois la valeur o, ni plus de p fois la valeur 1. Nous savons que ces fonctions forment une famille quasi-normale d'ordre total q, puisque $q \leqq p$ [1]. On peut donc extraire, de la suite $f_{\sigma_n}(z)$, une suite partielle $f_{\tau_n}(z)$ qui converge uniformément vers une fonction holomorphe $f_0(z)$ sauf peut-être autour des points B_j, ou qui augmente indéfiniment d'une manière uniforme sauf peut-être aux points B_j et en des points C_k dont le nombre ne dépasse pas q.

Examinons successivement ces deux cas : dans le premier, $f_0(z)$ est holomorphe sauf peut-être aux points B_j : le nombre de ces points ne peut dépasser r puisque, autour de chacun d'eux, il y a au moins un pôle de chaque fonction $f_{\tau_n}(z)$, pour n assez grand. Dans le second cas où $f_0(z)$ est la constante infinie, les points C_k étant irréguliers, chacun d'eux doit être un point limite pour les zéros des $f_{\tau_n}(z)$, sinon, il y aurait autour de ce point deux valeurs exceptionnelles, l'infini et zéro, et il ne serait pas irrégulier. De même, chaque point B_j qui est irrégulier doit être un point limite pour les zéros de $f_{\tau_n}(z)$, sinon, la limite n'étant pas égale à la constante zéro, ce point B_j ne serait pas irrégulier. Donc, pour n assez grand, chaque fonction $f_{\tau_n}(z)$ a au moins un zéro dans le voisinage de chacun des points irréguliers. Le nombre de ces points ne peut dépasser q.

On peut toujours supposer $p \geqq q \geqq r$; il suffit, dans les autres cas, de remplacer f par $\frac{1}{f}$, ou $1-f$, ou $1-\frac{1}{f}$, ou $\frac{1}{1-f}$, ou $\frac{f}{f-1}$.

Alors, le nombre des points irréguliers est toujours inférieur ou égal à q. La famille est quasi-normale d'ordre q au plus. La famille a d'ailleurs un ordre total fini, puisque chaque point irrégulier est nécessairement d'ordre fini, cet ordre étant égal au nombre des zéros ou des pôles de $f_n(z)$ voisins de ce point et que la somme de ces nombres pour tous les points irréguliers ne peut dépasser $q+r$.

15. Si nous appliquons maintenant les résultats du paragraphe **12**, nous voyons que si les fonctions ont des valeurs données ou bornées en $q+1$ points ou, plus généralement, si

(1) *Loc. cit.*, p. 87, note 1; p. 15.

l'on donne $q+1$ valeurs de $f(z)$ et de ses dérivées de façon que ces valeurs déterminent un polynome de degré q; ou si l'on borne les modules de ces valeurs, les fonctions limites $f_0(z)$ ne seront jamais la constante infinie. Il en résulte que le nombre des points irréguliers ne dépassera jamais r. D'où le théorème :

Considérons les fonctions $f(z)$ méromorphes dans le domaine (D) *où elles n'ont pas plus de r pôles, ni plus de q zéros, ni ne prennent plus de p fois la valeur un et supposons $p \geqq q \geqq r$.*

Ces fonctions forment une famille quasi-normale d'ordre r au plus, dont aucune fonction limite n'est la constante infinie lorsque :

1° *les valeurs de $f(z)$ en $q+1$ points fixes sont données ou bornées;*

2° *les valeurs de $f(z)$ et de ses q premières dérivées en un point fixe, sont données ou bornées;*

3° *en chacun des k points fixes $x_1, x_2, \ldots, x_k$, on donne ou on borne les valeurs de $f(z)$ et, respectivement, les valeurs des $(\alpha_1 - 1), (\alpha_2 - 1), \ldots, (\alpha_k - 1)$ premières dérivées de cette fonction, avec la condition*

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = q + 1.$$

Si $r = 0$, on retrouve une proposition connue relative aux fonctions holomorphes qui ne prennent pas plus de p fois la valeur 1, ni plus de q fois la valeur 0 (¹). Si $p < q$, on voit, en remplaçant f par $1 - f$, que l'on peut, dans l'énoncé, remplacer q par p.

16. Appliquons maintenant le résultat du paragraphe **13**. Nous voyons que, dans les conditions précédentes, les fonctions $f(z)$ sont bornées dans leur ensemble, dans le domaine (D_1) d'où l'on a exclu des cercles de rayon δ ayant pour centres les pôles de $f(z)$. En d'autres termes :

Dans les conditions énoncées au paragraphe précédent, chaque fonction $f(z)$ a son module inférieur à un nombre fixe Ω, pour tous les points z intérieurs à un domaine quel-

(¹) *Loc. cit.*, p. 87, note 1; p. 19.

conque fixe (D_1) *intérieur à* (D) *et extérieurs aux cercles* (γ) *de rayon* δ *ayant pour centres les pôles de cette fonction* $f(z)$.

Ce théorème constitue l'extension, aux fonctions méromorphes, du théorème de M. Schottky sur les fonctions holomorphes ne prenant dans (D), ni la valeur 0, ni la valeur 1. Si $r=0$, les cercles (γ) disparaissent et l'on retrouve un théorème connu ([1]). Si $q=p=0$, on retombe sur le théorème de M. Schottky.

Remarquons ici que, contrairement à ce qui se passe pour les fonctions holomorphes, il n'y a pas identité entre les familles de fonctions d'ordre total fini et les familles de fonctions ne prenant qu'un nombre limité de fois trois valeurs fixes. Par exemple, les fonctions

$$f(z)=\frac{1+nz+\dfrac{z^n}{n!}}{1+nz}\,a,$$

où a désigne un nombre quelconque, ne prennent qu'une fois, autour du point irrégulier 0, les valeurs 0 et ∞, mais prennent un nombre arbitraire de fois toute autre valeur a.

17. Nous allons maintenant supposer que les conditions imposées aux fonctions $f(z)$ dans les deux paragraphes précédents soient relatives au nombre $q+r+2$ au lieu d'être relatives au nombre $q+1$. Nous supposerons donc que l'une des trois conditions suivantes soit remplie :

1° les valeurs des fonctions $f(z)$ sont données ou bornées en $q+r+2$ points fixes;

2° les valeurs de $f(z)$ et de ses $q+r+1$ premières dérivées en un point fixe sont données ou bornées;

3° en chacun des k points fixes, $x_1, x_2, \ldots, x_k$, on donne ou on borne les valeurs de $f(z)$ et, respectivement, de ses (α_1-1), (α_2-1), ..., (α_k-1) premières dérivées avec la condition

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k=q+r+2.$$

Je dis que, dans chacun de ces cas, il existe un nombre R ne dépendant que des données tel que, dans tout cercle de centre

([1]) *Loc. cit.*, p. 87, note 1; p. 19.

origine et de rayon supérieur à R, toute fonction $f(z)$ cesse d'être méromorphe ou prend plus de p fois la valeur 1, ou plus de q fois la valeur 0, ou plus de r fois la valeur infinie, sauf dans des conditions exceptionnelles que nous préciserons.

En effet, supposons que le nombre R n'existe pas ; quel que soit l'entier n, il existe alors une fonction $f_n(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < n$ et remplissant les conditions énoncées.

Alors, dans le cercle de centre $z = 0$ et de rayon 1, il existe une suite, extraite des $f_n(z)$,

$$f_1^{(1)}(z), \quad f_2^{(1)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(1)}(z), \quad \ldots$$

qui converge uniformément, sauf en r points au plus, vers une fonction méromorphe $f_0(z)$. La suite précédente est quasi-normale, d'ordre r au plus, dans le cercle de rayon 2, concentrique au premier. On peut donc en extraire la suite

$$f_1^{(1)}(z), \quad f_2^{(2)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(2)}(z), \quad \ldots$$

qui converge uniformément dans ce cercle, sauf peut-être en r points, vers la fonction méromorphe $f_0(z)$. On peut continuer ainsi et arriver à une suite

$$f_1^{(1)}(z), \quad f_2^{(2)}(z), \quad f_3^{(3)}(z), \quad \ldots, \quad f_m^{(m)}(z), \quad f_{m+1}^{(m)}(z), \quad \ldots, \quad f_n^{(m)}(z), \quad \ldots$$

qui converge dans le cercle de centre $z = 0$ et de rayon m vers la fonction méromorphe $f_0(z)$. Comme l'entier m est arbitraire, la fonction $f_0(z)$ est méromorphe dans tout le plan. Cette fonction ne prendrait pas plus de p fois la valeur 1, plus de q fois la valeur 0, plus de r fois la valeur infinie, ce qui exige, d'après le théorème de M. Picard, que $f_0(z)$ soit une fraction rationnelle, quotient d'un polynome de degré q par un polynome de degré r.

En effet, si nous écartons les cas où $f_0(z)$ est égal à 0 ou 1, fractions rationnelles particulières, $f_0(z)$ est une fonction méromorphe avec r pôles au plus, par exemple. Pour le montrer, traçons un cercle arbitraire ; dans ce cercle, la convergence de la suite $f_n(z)$ est uniforme, sauf autour des points irréguliers ; autour de chacun d'eux, il y a au moins un pôle de $f_n(z)$; en dehors de ces points irréguliers, les pôles de $f_0(z)$ sont en des points où la convergence de $\frac{1}{f_n(z)}$ est uniforme : il y a au moins un pôle de $f_n(z)$ autour de chacun d'eux. En tout, le nombre des pôles de $f_0(z)$ ne peut donc dépasser r. En remplaçant f_n par $\frac{1}{f_n}$ ou $1 - f_n$ on voit qu'il y a au plus q zéros et que $f_0(z)$ prend au plus p fois la valeur 1.

Une telle fraction rationnelle est déterminée quand on se donne $q+r+1$ conditions linéaires entre ses $q+r+2$ coefficients homogènes arbitraires. Or, la fonction $f_0(z)$ considérée ici vérifie $q+r+2$ telles conditions; elle ne peut être rationnelle à moins que les valeurs données ne vérifient une relation particulière facile à former dans chaque cas. Si cette relation n'est pas vérifiée, l'hypothèse faite est inadmissible, le nombre R existe et ne dépend que des nombres p, q, r, des valeurs données pour $f(z)$, et des affixes des points donnés.

18. Considérons le cas où l'on fixe les valeurs de $f(z)$ en $q+r+2$ points $x_0, x_1, \ldots, x_s$ et soient $u_0, u_1, \ldots, u_s$ les valeurs données ($s = q+r+1$). Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0^q & x_0^{q-1} & \ldots & x_0 & 1 & u_0 & u_0 x_0 & \ldots & u_0 x_0^r \\ x_1^q & x_1^{q-1} & \ldots & x_1 & 1 & u_1 & u_1 x_1 & \ldots & u_1 x_1^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_s^q & x_s^{q-1} & \ldots & x_s & 1 & u_s & u_s x_s & \ldots & u_s x_s^r \end{vmatrix}$$

est différent de zéro, il n'existe pas de fonction rationnelle, quotient d'un polynome de degré q par un polynome de degré r, qui prenne les valeurs u_i aux points x_i. Il existe donc un nombre $R(p, q, r, u_i, x_i)$ limite supérieure du rayon d'existence des fonctions $f(z)$. Si les nombres u_i sont bornés supérieurement en module par le nombre ω, il sera nécessaire que $|\Delta|$ soit borné inférieurement par un nombre η. On aura alors une limite $R(p, q, r, \omega, \eta)$.

19. Supposons maintenant que l'on se donne les valeurs de $f(z)$ et de ses $q+r+1 = s$ premières dérivées au point $z = 0$. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_s z^s + \ldots$$

le développement de $f(z)$: les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_s$ sont fixes. S'il existe une fraction rationnelle ayant q zéros et r pôles, et possédant un tel développement en série entière, on sait que les coefficients vérifient une relation de récurrence linéaire et homogène à $r+1$ termes et commençant par le coefficient a_{q+1-r} ou a_{s-2r}. Dans ces conditions, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{s-2r} & a_{s-2r+1} & \dots & a_{s-r} \\ a_{s-2r+1} & a_{s-2r+2} & \dots & a_{s-r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{s-r} & a_{s-r+1} & \dots & a_s \end{vmatrix}$$

serait nul. Si donc $\Delta \neq 0$, il existe un nombre

$$R(p, q, r, a_0, a_1, \dots, a_s)$$

limitant le rayon d'existence des fonctions $f(z)$. Si les valeurs des $|a_i|$ sont bornées supérieurement par le nombre ω, il est nécessaire de borner inférieurement $|\Delta|$ par un nombre positif η. Il existe alors un nombre $R(p, q, r, \omega, \eta)$.

20. On formerait de même le déterminant Δ correspondant au troisième cas où l'on donne les valeurs de $f(z)$ et de ses $(\alpha_i - 1)$ premières dérivées en k points fixes x_i. Les deux premiers cas correspondent aux valeurs particulières

$$\alpha_i = 1, \qquad k = s+1 \qquad \text{et} \qquad \alpha_1 = s+1, \qquad k = 1$$

du dernier cas.

Les théorèmes des derniers paragraphes constituent des généralisations, pour les fonctions méromorphes, du théorème de M. Landau sur les fonctions holomorphes qui ne prennent ni la valeur 0, ni la valeur 1. Pour $r = 0$, on retrouve des propositions déjà connues [1]. Pour $r = q = p = 0$, on retombe sur le théorème de M. Landau.

Un cas particulièrement simple est celui où $q = r = 1$, p ayant une valeur fixe arbitraire. Supposons que l'on fixe les valeurs de $f(z)$ en $q + r + 2 = 4$ points; pour que le théorème soit applicable, il faut que les valeurs u_1, u_2, u_3, u_4 de $f(z)$, en ces points x_1, x_2, x_3, x_4, soient telles qu'il n'existe pas de fraction rationnelle dont les termes sont du premier degré, c'est-à-dire de fonction homographique, prenant, pour les quatre points donnés,

[1] *Loc. cit.*, p. 87, note 1; p. 33.

les valeurs données. Cela exige que les rapports anharmoniques soient différents :

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \neq (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

Les théorèmes précédents permettent aussi de résoudre différents problèmes que l'on peut se poser au sujet des fonctions $f(z)$. Par exemple, si l'on sait seulement que l'une des équations $f(z) = 1$, $f(z) = 0$, $f(z) = \infty$ a moins de p racines, une autre moins de q et la troisième moins de r, sans que l'on sache à laquelle de ces équations se rapportent les nombres p, q, r, il est facile de former les conditions d'inégalité et d'égalité nécessaires pour l'existence de R. Il en est de même, si l'on connaît seulement une limite supérieure m de la somme des nombres des racines des trois équations : $p + q + r \leqq m$.