BULLETIN DE LA S. M. F.

A. ANGELESCO

Détermination de certaines courbes par des ensembles discrets de points

Bulletin de la S. M. F., tome 51 (1923), p. 236-238

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__236_1>

DÉTERMINATION DE CERTAINES COURBES PAR DES ENSEMBLES DISCRETS DE POINTS;

PAR M. A. ANGELESCO
(Cluj).

Soit

$$A_0 \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + A_n y = 0 \tag{1}$$

une équation différentielle linéaire à coefficients réels et constants. Désignons par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les racines de l'équation caractéristique.

Proposons-nous de déterminer les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$, en fonction du paramètre λ, de manière que l'on ait identiquement

$$(2)\quad f(x+n\lambda)+C_1 f(x+\overline{n-1}\,\lambda)+\ldots+C_{n-1}f(x+\lambda)+C_n f(x)=0,$$

$f(x)$ étant une quelconque des intégrales de l'équation (1).

On trouve immédiatement que ces coefficients sont déterminés, dans le cas où les racines $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont toutes distinctes, par le système des n équations linéaires

$$e^{n\lambda r_i}+C_1 e^{(n-1)\lambda r_i}+\ldots+C_{n-1}e^{\lambda r_i}+C_n=0 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Il résulte de là, que les coefficients $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sont respectivement égaux aux coefficients de $v^{n-1}, v^{n-2}, \ldots, v^0$ dans le produit

$$(3)\qquad (v-e^{\lambda r_1})(v-e^{\lambda r_2})\ldots(v-e^{\lambda r_n}).$$

On voit sans difficulté que cette détermination des coefficients C_1, $C_2, \ldots, C_n$ est valable même dans le cas où les racines $r_1, r_2, \ldots$, r_n ne sont pas toutes distinctes.

Ceci établi, considérons, dans le plan xOy de la variable imaginaire $x+iy$, les n points

$$z_p = x_p + i y_p \qquad (p=0, 1, \ldots, n-1).$$

Soient $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ les n intégrales particulières de la forme $x^p e^{\alpha x}\cos\beta x$ ou $x^p e^{\alpha x}\sin\beta x$ de l'équation différentielle (1). Déterminons les $2n$ coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et b_1, $b_2, \ldots, b_n$ par les $2n$ relations

$$(4)\quad \begin{cases} x_p = a_1 u_1(t_0+p\lambda_0)+a_2 u_2(t_0+p\lambda_0)+\ldots+a_n u_n(t_0+p\lambda_0), \\ y_p = b_1 u_1(t_0+p\lambda_0)+b_2 u_2(t_0+p\lambda_0)+\ldots+b_n u_n(t_0+p\lambda_0), \end{cases}$$
$$(p=0, 1, \ldots, n-1),$$

où t_0 et λ_0 sont deux nombres arbitrairement choisis. De la relation (2), que l'on peut écrire aussi

$$f(x+\overline{n+p}\,\lambda)+C_1 f(x+\overline{n+p-1}\,\lambda)+\ldots+C_n f(x+n\lambda)=0,$$

il résulte que

$$x_{p+n}+C_1 x_{p+n-1}+\ldots+C_n x_p=0,$$
$$y_{p+n}+C_1 y_{p+n-1}+\ldots+C_n y_p=0,$$

où les x_m et y_m sont donnés, *quelque soit l'entier positif m*, par les formules (4) et où le paramètre λ des expressions des C_p et supposé remplacé par λ_0. En posant toujours $z_m = x_m + i y_m$, on aura donc

$$z_{p+n} + C_1 z_{p+n-1} + \ldots + C_n z_p = 0, \tag{5}$$

ce qu'on peut écrire aussi, d'une manière symbolique,

$$z^p (z - e^{\lambda_0 r_1})(z - e^{\lambda_0 r_2}) \ldots (z - e^{\lambda_0 r_n}) = 0,$$

en convenant de remplacer, après avoir effectué le produit, z^m par z_m.

Si nous désignons par M_0, M_1, M_2, ... les points figuratifs des quantités complexes z_0, z_1, z_2, ..., on voit que tous ces points, qu'on déduit à partir des n points donnés M_0, M_1, ..., M_{n-1} par la relation récurrente (5), sont situés sur la courbe

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a_1 u_1(t) + a_2 u_2(t) + \ldots + a_n u_n(t), \\ y = b_1 u_1(t) + b_2 u_2(t) + \ldots + b_n u_n(t). \end{array} \right. \tag{6}$$

Application. — Prenons pour équation différentielle (1), l'équation

$$y''' - k y' = 0.$$

La relation récurrente (5) devient alors

$$z_{p+3} - \left(1 + e^{\lambda \sqrt{k}} + e^{-\lambda \sqrt{k}}\right)(z_{p+2} - z_{p+1}) - z_p = 0,$$

ou bien, en posant $\mu = 1 + e^{\lambda \sqrt{k}} + e^{-\lambda \sqrt{k}}$,

$$\frac{z_{p+3} - z_p}{z_{p+2} - z_{p+1}} = \mu. \tag{7}$$

Dans ce cas, la courbe (6), sur laquelle sont situés tous les points M_0, M_1, M_2, ..., est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que k est négatif, nul ou positif, ou bien, suivant que μ est inférieur, égal ou supérieur au nombre 3.

Cette proposition par laquelle on détermine la nature de la courbe algébrique qui passe par tous les points M_0, M_1, M_2, ... reliés par la relation récurrente (7), est due à M. Pompeiu.

Des développements plus étendus sur les questions qui font l'objet de cette Note et sur d'autres qui s'y rattachent seront donnés dans un autre travail.