

# BULLETIN DE LA S. M. F.

A. RAZMADZE

**Sur une condition de minimum nécessaire pour les solutions anguleuses dans le calcul des variations**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 51 (1923), p. 223-236

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1923\\_\\_51\\_\\_223\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1923__51__223_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1923, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE CONDITION DE MINIMUM  
NÉCESSAIRE POUR LES SOLUTIONS ANGULEUSES  
DANS LE CALCUL DES VARIATIONS,**

PAR M. A. RAZMADZÉ

(Tiflis).

**Introduction.**

1. Considérons le problème fondamental du calcul des variations qui peut être formulé ainsi :

Trouver un extremum relatif de l'intégrale

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F(x, y, x', y') dt$$

dans le champ fonctionnel des courbes admissibles qui joignent les deux points donnés  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$ .

La fonction  $F$  de quatre variables  $x, y, x', y'$  est continue ainsi que ses dérivées jusqu'à celles du troisième ordre lorsque le point  $(x, y)$  reste dans une région  $R$  du plan et pour tout système des valeurs finies de  $x', y'$  tel que  $x'^2 + y'^2 \neq 0$ . En outre, elle vérifie la condition connue de l'homogénéité

$$F = x' F_{x'} + y' F_{y'}$$

Généralement ce problème admet des extrémales de deux espèces : ou on a des extrémales à tangentes continues ou bien des extrémales angulaires.

Tous les éléments linéaires des extrémales des deux espèces vérifient l'équation différentielle d'Euler

$$F_{xy'} - F_{y'x'} + F_1(x' y'' - y' x'') = 0,$$

mais néanmoins entre ces deux espèces d'extrémals nous trouvons une différence essentielle. Tandis que le choix du point initial sur l'extrémale de la première espèce n'influe pas sur l'extremum de l'intégrale  $I$ , l'extrémale angulaire peut rendre minimum l'intégrale  $I$  à la seule condition que le point initial  $P_1(x_1, y_1)$  se trouve à droite du point  $E_0$  de Carathéodory (<sup>1</sup>).

Si par  $\epsilon_0$  nous indiquons la valeur du paramètre  $t$  pour le point  $E_0$  et par  $t_1$  celle du point initial, la condition précédente peut être énoncée par l'inégalité suivante :

$$t_1 > \epsilon_0.$$

Tout naturellement se pose maintenant la question : Quelle est la cause de la différence, que nous avons indiquée entre les extrémals des deux espèces?

Supposons, pour fixer les idées, que l'extrémale de deuxième espèce ait un seul point anguleux  $K_0(x_0, y_0)$ . Si par  $x'_0, y'_0$  et  $\bar{x}'_0, \bar{y}'_0$  nous indiquons les valeurs des dérivées  $x', y'$  à gauche et à droite au point  $K_0(x_0, y_0)$ , alors les deux éléments linéaires du point anguleux satisfont aux conditions de Weierstrass-Erdmann

$$(1) \quad \begin{cases} F_{x'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = F_{x'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0), \\ F_{y'}(x_0, y_0, x'_0, y'_0) = F_{y'}(x_0, y_0, \bar{x}'_0, \bar{y}'_0). \end{cases}$$

---

(<sup>1</sup>) *Ueber die discontinuierliche Lösungen in der Variationsrechnung* (Thèse, Göttingue, 1904).

Il est aisé de voir maintenant que la cause de la différence entre les extrémals des deux espèces doit être cherchée dans les deux conditions précédentes auxquelles satisfont les éléments linéaires du point angulaire outre celle d'Euler.

Le but du présent travail est de démontrer immédiatement de quelle manière l'apparition des deux nouvelles conditions peut limiter, pour l'extrémale angulaire, le libre choix du point initial qui a lieu pour l'extrémale à tangente continue.

2. Il ne sera question dans la suite que de la première des deux extrémals : minima et maxima.

En outre nous admettons que les conditions de Legendre et de Jacobi pour les arcs  $P_1 K_0$  et  $K_0 P_2$  :

$$F_1 > 0, \quad \bar{F}_1 > 0, \\ t'_0 < t_1 < t_0, \quad t_0 < t_2 < \bar{t}'_0$$

soient vérifiées au sens strict;  $t'_0$  et  $\bar{t}'_0$  étant les valeurs du paramètre  $t$  pour les foyers  $K'_0$  et  $\bar{K}'_0$  conjugués du point  $K_0$  sur les arcs  $P_1 K_0$  et  $K_0 P_2$  respectivement.  $F_1$  est définie par les équations suivantes :

$$(2) \quad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = -\frac{F_{x'y'}}{x'y'} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2}.$$

#### LA DÉRIVÉE DE LA FONCTION DANS LE CHAMP.

3. *Formules préliminaires.* — Soit

$$(3) \quad x = x(t, \alpha), \quad y = y(t, \alpha)$$

un faisceau d'extrémals à tangente continue quelconque pour le problème donné. Dans le domaine du champ de courbes de ce faisceau, le déterminant fonctionnel

$$\Delta = x'y_\alpha - y'x_\alpha$$

est différent de zéro et par conséquent les équations (3) seront résolubles sans ambiguïté par rapport aux  $t$  et  $\alpha$  tant que le point  $(x, y)$  restera dans ce champ.

Soient

$$(4) \quad t = t(x, y), \quad \alpha = \alpha(x, y)$$

ces solutions. Alors nous avons

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{y_\alpha}{\Delta}, & \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{x_\alpha}{\Delta}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x} = -\frac{y'}{\Delta}, & \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \frac{x'}{\Delta}, \end{cases}$$

où par l'accent nous notons la dérivation par rapport à  $t$ . D'après les équations (3) et (4) les dérivées  $x'$ ,  $y'$  sont des fonctions de  $x$  et  $y$  bien définies dans tout le champ.

En tenant compte des formules (5), nous aurons pour les dérivées de  $x'$  et  $y'$  les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial x} &= \frac{x'' x_\alpha - x'_\alpha y'}{\Delta}, & \frac{\partial x'}{\partial y} &= \frac{-x'' x_\alpha + x'_\alpha x'}{\Delta}, \\ \frac{\partial y'}{\partial x} &= \frac{y'' y_\alpha - y'_\alpha y'}{\Delta}, & \frac{\partial y'}{\partial y} &= \frac{-y'' y_\alpha + y'_\alpha x'}{\Delta}. \end{aligned}$$

De ces quatre formules on déduira immédiatement

$$(6) \quad \begin{cases} y' \frac{\partial x'}{\partial x} - x' \frac{\partial y'}{\partial x} = \frac{y' \Delta' - y'' \Delta}{\Delta}, \\ y' \frac{\partial x'}{\partial y} - x' \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{x'' \Delta - x' \Delta'}{\Delta}, \\ \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\Delta'}{\Delta}, \end{cases}$$

formules qui vont être utiles.

4. Nous nous proposons maintenant de trouver les dérivées partielles de  $F_x$  et  $F_y$  dans le domaine du champ.

D'après (2) on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} &= F_{x'x} + y' \left( y' \frac{\partial x'}{\partial x} - x' \frac{\partial y'}{\partial x} \right) F_1, \\ \frac{\partial F_{x'}}{\partial y} &= F_{x'y} + y' \left( y' \frac{\partial x'}{\partial y} - x' \frac{\partial y'}{\partial y} \right) F_1, \\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} &= F_{y'x} - x' \left( y' \frac{\partial x'}{\partial x} - x' \frac{\partial y'}{\partial x} \right) F_1, \\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} &= F_{y'y} - x' \left( y' \frac{\partial x'}{\partial y} - x' \frac{\partial y'}{\partial y} \right) F_1. \end{aligned}$$

Moyennant les formules (6) et les notations de Weierstrass

$$\begin{aligned} L &= F_{x'x} - y' y'' F_1, & M &= F_{x'y} + y' x'' F_1 = F_{y'x} + x' y'' F_1, \\ N &= F_{y'y} - x' x'' F_1, \end{aligned}$$

on tire

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} = L + y'^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta}, \\ \frac{\partial F_{x'}}{\partial y} = M - x' y' F_1 \frac{\Delta'}{\Delta}, \\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} = M - x' y' F_1 \frac{\Delta'}{\Delta}, \\ \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} = N + x'^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta}, \end{cases}$$

formules qui jouent le rôle très important dans le calcul des variations (formules de Dresden).

5. Passons à la fin à la recherche de la dérivée de E fonction de Weierstrass prise suivant une courbe donnée dans le champ.

Soit

$$x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau)$$

une courbe quelconque située dans le champ. Considérons E fonction de Weierstrass prise le long de cette courbe

$$\mathcal{E}(\tau) = F(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)) - \bar{x}'(\tau) F_{x'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), x', y') - \bar{y}'(\tau) F_{y'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), x', y').$$

Cherchons  $\frac{d\mathcal{E}}{d\tau}$ . On a

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = \bar{F}_x \bar{x}'(\tau) + \bar{F}_y \bar{y}'(\tau) + \bar{F}_{x'} \bar{x}''(\tau) + \bar{F}_{y'} \bar{y}''(\tau) - F_{x'} \bar{x}''(\tau) - F_{y'} \bar{y}''(\tau) - \bar{x}'(\tau) \left[ \frac{\partial F_{x'}}{\partial x} \bar{x}'(\tau) + \frac{\partial F_{x'}}{\partial y} \bar{y}'(\tau) \right] - \bar{y}'(\tau) \left[ \frac{\partial F_{y'}}{\partial x} \bar{x}'(\tau) + \frac{\partial F_{y'}}{\partial y} \bar{y}'(\tau) \right].$$

En tenant compte des expressions des dérivées partielles de  $F_{x'}$  et  $F_{y'}$ , nous pouvons écrire l'équation précédente de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = & \bar{L} \bar{x}'^2 + 2 \bar{M} \bar{x}' \bar{y}' + \bar{N} \bar{y}'^2 - L \bar{x}'^2 - 2 M \bar{x}' \bar{y}' - N \bar{y}'^2 \\ & - (\bar{y}' x' - \bar{x}' y')^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta} + (\bar{F}_{x'} - F_{x'}) \bar{x}'' + (\bar{F}_{y'} - F_{y'}) \bar{y}'' \end{aligned}$$

Notons maintenant

$$\bar{L} - L = \mathfrak{L}, \quad \bar{M} - M = \mathfrak{M}, \quad \bar{N} - N = \mathfrak{N}.$$

Alors on aura

$$(8) \quad \frac{d\mathcal{C}}{d\tau} = \mathcal{L}\bar{x}'^2 + 2\mathcal{M}\bar{x}'\bar{y}' + \mathcal{N}\bar{y}'^2 - (\bar{y}'x' - \bar{x}'y')^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta} \\ + (\bar{F}_{x'} - F_{x'})\bar{x}' + (F_{y'} - \bar{F}_{y'})\bar{y}',$$

c'est ce que nous voulions chercher.

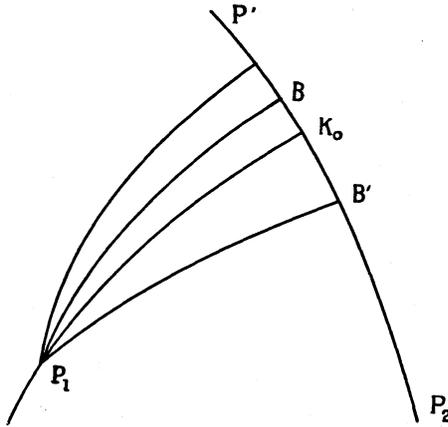
La formule générale (8) établit que la dérivée  $\frac{d\mathcal{C}}{d\tau}$  dépend du foyer du faisceau d'extrémales et cette propriété de E fonction va jouer le rôle important dans quelques questions du calcul des variations.

Nous allons maintenant faire usage de la formule (8) pour la résolution de la question fondamentale du présent travail.

#### DÉVELOPPEMENT DE E FONCTION.

6. Soit pour le problème donné  $P_1 K_0 P_2$  l'extrémale angulaire

Fig. 1.



qui joint les deux points donnés  $P_1(x_1, y_1)$  et  $P_2(x_2, y_2)$  (fig. 1).

Soient

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_0$$

l'équation de la branche  $P_1 K_0$  et

$$x = \bar{x}(\tau), \quad y = \bar{y}(\tau), \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_2$$

l'équation de l'autre branche.

Du point  $P_1$  menons un faisceau d'extrémales qui contient la ligne donnée  $P_1 K_0$ .

Comme le point  $K_0$  n'est pas le foyer conjugué du point  $P_1$ , chaque ligne de ce faisceau coupe l'extrémale  $K_0 P_2$  et son prolongement à gauche  $P' K_0$  en un seul point.

Soient

$$(\alpha) \quad x = \varphi(t, \alpha), \quad y = \psi(t, \alpha)$$

les équations de ce faisceau et  $\alpha = \alpha_0$  la valeur du paramètre  $\alpha$  pour l'extrémale  $P_1 K_0$ .

Prenons maintenant sur la ligne  $P' P_2$  deux points  $B$  et  $B'$  voisins de  $K_0$  et situés à gauche et à droite du point  $K_0$  respectivement.

Désignons la valeur du paramètre  $\tau$  pour  $B$  par  $\tau_0 - \varepsilon$  et celle de  $B'$  par  $\tau_0 + \varepsilon'$ ;  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$  sont positives.

Considérons deux lignes anguleuses  $P_1 B P_2$  et  $P_1 B' P_2$  composées respectivement des lignes  $P_1 B$  et  $P_1 B'$  de notre faisceau et des arcs  $B P_2$  et  $B' P_2$  de  $P' P_2$ .

Il est évident que l'ensemble  $(\alpha)$  forme le champ et par conséquent, d'après le théorème de Weierstrass, on a

$$\Delta I_{(B)} = I_{P_1 B P_2} - I_{P_1 K_0 P_2} = \int_{\tau_0 - \varepsilon}^{\tau_0} \mathcal{C}(\tau) d\tau,$$

où par  $\mathcal{C}(\tau)$  nous désignons la valeur suivante de E fonction

$$\mathcal{C}(\tau) = E(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau); x', y'; \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)),$$

$x'$  et  $y'$  étant les fonctions de  $x$  et  $y$  définies par le faisceau  $(\alpha)$  comme au n° 3.

Quant à la différence

$$\Delta I_{(B')} = I_{P_1 B' P_2} - I_{P_1 K_0 P_2},$$

on peut l'écrire

$$\Delta I_{(B')} = -(I_{P_1 K_0} + I_{K_0 B'} - I_{P_1 B'})$$

et alors, d'après le même théorème de Weierstrass, on a

$$\Delta I_{(B')} = - \int_{\tau_0}^{\tau_0 + \varepsilon'} \mathcal{C}(\tau) d\tau.$$

Mais pour le minimum il est nécessaire que

$$\Delta I_{(B)} > 0, \quad \Delta I_{(B')} > 0,$$

et par conséquent  $\int_{\tau_0-\varepsilon}^{\tau_0} \mathcal{L}(\tau) d\tau$  doit être positive et  $\int_{\tau_0}^{\tau_0+\varepsilon'} \mathcal{L}(\tau) d\tau$  négative aussi petits que soient  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ .

Ainsi nous trouvons comme condition nécessaire la condition suivante :

*L'extrémale angulaire  $P_1 K_0 P_2$ , pour laquelle les conditions de Legendre et de Jacobi sont vérifiées, peut fournir un minimum pour l'intégrale si, en faisant passer  $\tau$  par la valeur  $\tau_0$  en croissant, la fonction  $\mathcal{L}(\tau)$  passc du positif au négatif.*

On conclut de là, en outre, que  $\mathcal{L}(\tau)$  s'annule pour  $\tau = \tau_0$ , c'est ce que l'on voit immédiatement d'après les conditions (1).

7. Développons maintenant la fonction  $\mathcal{L}(\tau)$  dans le domaine de  $\tau = \tau_0$  pour savoir dans quel cas la condition de minimum mentionnée tout à l'heure peut être vérifiée. Pour cela reportons-nous à la formule (8) du n° 5.

Pour notre faisceau d'après cette formule nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = & \mathcal{L} \bar{x}'^2 + 2 \mathcal{N} \bar{x}' \bar{y}' + \mathcal{N} \bar{y}'^2 - (\bar{y}' \varphi_t - \bar{x}' \psi_t)^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta} \\ & + (\bar{F}_{x'} - F_{x'}) \bar{x}'' + (\bar{F}_{y'} - F_{y'}) \bar{y}'' . \end{aligned}$$

Soit  $\Theta(t, t)$  l'intégrale de l'équation de Jacobi qui s'annule pour  $t = t$ . Dès lors

$$\Theta(t, t_1) = C \Delta(t, \alpha), \quad \Theta_t(t, t_1) = C \Delta'(t, \alpha).$$

D'après cela la formule précédente peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{d\tau} = & \mathcal{L} \bar{x}'^2 + 2 \mathcal{N} \bar{x}' \bar{y}' + \mathcal{N} \bar{y}'^2 - (\bar{y}' \varphi_t - \bar{x}' \psi_t)^2 F_1 \frac{\Theta_t(t, t_1)}{\Theta(t, t_1)} \\ & + (\bar{F}_{x'} - F_{x'}) \bar{x}'' + (\bar{F}_{y'} - F_{y'}) \bar{y}'' . \end{aligned}$$

Supposons maintenant dans cette équation  $t = t_0$ . En posant  $\mathcal{L}_0, \mathcal{N}_0, \mathcal{N}_0$  les valeurs de  $\mathcal{L}, \mathcal{N}, \mathcal{N}$  en ce point et en tenant compte de la condition de Weierstrass-Erdmann on aura le déve-

loppement suivant :

$$\mathcal{C}(\tau) = (\tau - \tau_0) \left[ \mathcal{L}_0 \bar{x}'_0{}^2 + 2 \mathcal{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathcal{N}_0 \bar{y}'_0{}^2 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, t_1)}{\Theta(t_0, t_1)} \right] + \frac{(\tau - \tau_0)^2}{2} K,$$

$K$  étant une fonction dont il est inutile d'écrire l'expression développée, mais qui conserve une valeur finie dans le voisinage du point  $\tau = \tau_0$ .

Tel est le développement de  $E$  fonction qui va nous donner la résolution complète de la question du problème. En effet, faisons passer  $\tau$  par la valeur  $\tau_0$  en croissant, alors d'après ce développement on déduit que la fonction  $\mathcal{C}(\tau)$  passe du positif au négatif si

$$(9) \quad \mathcal{L}_0 \bar{x}'_0{}^2 + 2 \mathcal{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathcal{N}_0 \bar{y}'_0{}^2 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, t_1)}{\Theta(t_0, t_1)} < 0.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Psi(t) = \mathcal{L}_0 \bar{x}'_0{}^2 + 2 \mathcal{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathcal{N}_0 \bar{y}'_0{}^2 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, t)}{\Theta(t_0, t)}.$$

Comme le rapport

$$\frac{\Theta_t(t_0, t)}{\Theta(t_0, t)}$$

croît avec  $t$ , la fonction  $\Psi(t)$  décroît en même temps que  $t$  croît.

Soit  $t = h_0$  la valeur de  $t$  pour laquelle

$$(10) \quad \mathcal{L}_0 \bar{x}'_0{}^2 + 2 \mathcal{M}_0 \bar{x}'_0 \bar{y}'_0 + \mathcal{N}_0 \bar{y}'_0{}^2 - (\bar{y}'_0 x'_0 - \bar{x}'_0 y'_0)^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, h_0)}{\Theta(t_0, h_0)} = 0.$$

Alors l'inégalité (9) nous permet d'énoncer la proposition suivante :

*La condition nécessaire pour le minimum est que la valeur du paramètre  $t$  correspondant au point initial vérifie l'inégalité suivante :*

$$(11) \quad t_1 \geq h_0.$$

Donc nous avons trouvé la cause grâce à laquelle les deux conditions fondamentales ont limité le libre choix du point initial qui a lieu pour l'extremum ordinaire.

Passons maintenant à la construction géométrique du point  $H_0$ .

8. Tout d'abord nous allons montrer qu'il existe un faisceau entourant  $P_1 K_0$  et composé d'extrémales pour lesquelles E fonction de Weierstrass prise le long de  $P'P_2$  soit identiquement nulle.

En effet. Soient  $\mathfrak{S}$  l'angle qui fait avec l'axe des  $x$  la tangente à l'extrémale de notre faisceau au point  $[\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau)]$  de la ligne  $P'P_2$ , et  $\mathfrak{S}_0$  la valeur de  $\mathfrak{S}$  correspondant à l'extrémale  $P_1 K_0$ . Si donc E fonction prise le long de  $P'P_2$  doit être identiquement nulle on aura

$$(12) \quad F(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)) - \bar{x}'(\tau) F_{x'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos \mathfrak{S}, \sin \mathfrak{S}) \\ - \bar{y}'(\tau) F_{y'}(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau), \cos \mathfrak{S}, \sin \mathfrak{S}) = 0.$$

Alors le faisceau en question existe toujours s'il est possible de résoudre la dernière équation par rapport à  $\mathfrak{S}$ .

Mais cette équation est vérifiée pour  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$ ,  $\tau = \tau_0$ . La dérivée du premier membre par rapport à  $\mathfrak{S}$  est

$$-\bar{x}'(\tau)(-F_{x'x'} \sin \mathfrak{S} + F_{x'y'} \cos \mathfrak{S}) - \bar{y}'(\tau)(-F_{y'x'} \sin \mathfrak{S} + F_{y'y'} \cos \mathfrak{S}),$$

ce qui conduit, d'après les formules (2), à la relation

$$(\bar{x}'(\tau) \sin \mathfrak{S} - \bar{y}'(\tau) \cos \mathfrak{S}) F_1.$$

Mais la dernière expression est différente de zéro pour  $\tau = \tau_0$ ,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$  et par conséquent on peut résoudre l'équation (12) par rapport à  $\mathfrak{S}$  dans le domaine du point  $\tau = \tau_0$ ,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0$ . Soit

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\tau)$$

cette solution.

L'ensemble des extrémales, menées par chaque point de ligne  $P'P_2$  dans la direction correspondante qui fait l'angle  $\mathfrak{S}(\tau)$  avec l'axe des  $x$ , forme un faisceau à un seul paramètre. Ce faisceau contient la ligne  $P_1 K_0$ .

Soient

$$(13) \quad x = \xi(t, \lambda), \quad y = \eta(t, \lambda)$$

les équations de ce faisceau et  $\lambda = \lambda_0$  la valeur du paramètre  $\lambda$  pour l'extrémale  $P_1 K_0$ . Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant :

**THÉORÈME.** — *Le point  $H_0(h_0)$  est le foyer du faisceau  $(\lambda)$  sur l'extrémale  $P_1 K_0$ .*

En effet, comme E fonction de Weierstrass prise le long de P'P<sub>2</sub> est identiquement nulle dans le faisceau, c'est-à-dire

$$E(\bar{x}(\tau), \bar{y}(\tau); x', y'; \bar{x}'(\tau), \bar{y}'(\tau)) = 0,$$

alors la dérivée de E fonction par rapport à  $\tau$  s'annulera aussi identiquement.

En tenant compte de la formule fondamentale (8) on aura donc

$$(13) \quad \begin{aligned} \mathcal{L}\bar{x}'^2 + 2\mathcal{M}\bar{x}'\bar{y}' + \mathcal{N}\bar{y}'^2 - (\bar{y}'\xi_t - \bar{x}'\eta_t)^2 F_1 \frac{\Delta'}{\Delta} \\ + (\bar{F}_{x'} - F_{x'})\bar{x}'' + (\bar{F}_{y'} - F_{y'})\bar{y}'' = 0. \end{aligned}$$

Posons maintenant  $\tau = \tau_0$ . L'identité (13) nous donne alors

$$\mathcal{L}_0\bar{x}_0'^2 + 2\mathcal{M}_0\bar{x}_0'\bar{y}_0' + \mathcal{N}_0\bar{y}_0'^2 - (\bar{y}_0'\alpha'_0 - \bar{x}_0'\beta'_0)^2 F_1 \frac{\Delta'(t_0, \lambda_0)}{\Delta(t_0, \lambda_0)} = 0,$$

où  $\mathcal{L}_0, \mathcal{M}_0, \mathcal{N}_0$  ont les mêmes valeurs qu'au n° 7. De la comparaison de cette équation avec (13) nous obtenons

$$\frac{\Delta'(t_0, \lambda_0)}{\Delta(t_0, \lambda_0)} = \frac{\Theta_t(t_0, h_0)}{\Theta(t_0, h_0)}.$$

Mais le rapport

$$\frac{\Theta_t(t_0, t)}{\Theta(t_0, t)}$$

va constamment en croissant lorsque  $t$  varie de  $t'_0$  jusqu'à  $t_0$ . Par conséquent l'équation

$$\frac{\Delta'(t_0, \lambda_0)}{\Delta(t_0, \lambda_0)} - \frac{\Theta_t(t_0, t)}{\Theta(t_0, t)} = 0$$

admet un seul zéro  $t = h_0$  dans l'intervalle  $t'_0 \leq t \leq t_0$ , c'est ce qui démontre que  $H_0(h_0)$  est le foyer du faisceau  $(\lambda)$  sur l'extrémale  $P_1K_0$ .

9. Cette interprétation géométrique permet de démontrer d'une manière purement géométrique la nécessité de la condition (11).

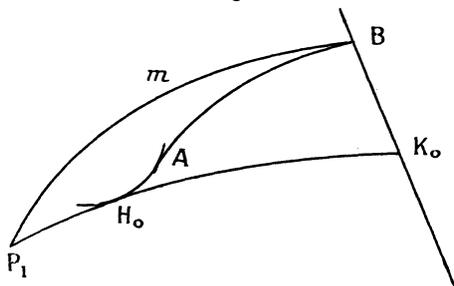
Admettons que le point initial  $P_1$  de l'extrémale  $P_1K_0$  se trouve à gauche du point  $H_0$ . Menons par le point  $P_1$  dans le voisinage de  $P_1K_0$  une extrémale quelconque et soit B le point où cette extrémale coupe la ligne P'P<sub>2</sub> (fig. 2).

Nous allons montrer que

$$I_{P_1 m B P_2} < I_{P_1 K_0 P_2}.$$

Pour cela, soit AB l'extrémale spéciale du faisceau ( $\lambda$ ) qui passe par le même point B et A soit son point de contact avec l'enveloppe

Fig. 2.



de la famille ( $\lambda$ ). Comme il est certain, d'après la signification géométrique du foyer,  $H_0 (h_0)$  est le point de contact de l'extrémale  $P_1 K_0$  avec la même enveloppe.

D'après la nature du faisceau, on a

$$I_{P_1 H_0} + I_{H_0 A} + I_{AB} + I_{BK_0} - I_{P_1 H_0 K_0} = 0.$$

Mais

$$I_{P_1 m B} < I_{P_1 H_0} + I_{H_0 A} + I_{AB}$$

et par conséquent

$$I_{P_1 m B} + I_{BK_0} < I_{P_1 H_0 K_0}$$

d'où vient

$$I_{P_1 m B P_2} < I_{P_1 K_0 P_2}$$

c'est ce que démontre notre proposition.

10. Il ne nous reste plus maintenant qu'à comparer le foyer  $H_0$  avec celui de Carathéodory.

Entourons l'extrémale angulaire  $P_1 K_0 P_2$  du faisceau d'extrémales angulaires <sup>(1)</sup> dépendant d'un paramètre unique, que nous obtiendrons en faisant décrire au point anguleux  $K_0$  l'arc  $P'P_2$ . Le foyer de ce faisceau sur l'extrémale  $P_1 K_0$  est  $E_0$ .

Mais le long de chaque courbe des sommets (Knickpunktskurve)

<sup>(1)</sup> CARATHÉODORY (Thèse citée plus haut), § 9, p. 28 à 31. On sait (*loc. cit.*) qu'à tout point K, voisin de  $K_0$ , correspond une extrémale bien déterminée ayant K pour point anguleux et voisine de  $P_0 K_0 P_2$ .

E fonction de Weierstrass est identiquement nulle, c'est-à-dire

$$(14) \quad E(x, y; x', y'; \bar{x}', \bar{y}') = 0$$

où  $x', y'$  sont les dérivées à gauche et  $\bar{x}', \bar{y}'$  celles à droite pour l'extrémale angulaire en un point quelconque  $M(x, y)$  de la courbe des sommets.

En appelant T le coefficient angulaire de la tangente à la courbe des sommets en  $M(x, y)$ , on déduira de l'équation (14)

$$(15) \quad x' \frac{\partial(\bar{F} - F_{x'})}{\partial x} + y' \frac{\partial(\bar{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial x} + \left[ x' \frac{\partial(\bar{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial y} + y' \frac{\partial(\bar{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial y} \right] T = 0.$$

Dans le cas où la courbe des sommets est  $P'P_2$ , on a

$$T = \frac{\bar{y}'(\tau)}{\bar{x}'(\tau)}$$

et par conséquent l'équation (15) nous donne alors

$$\bar{x}'^2 \frac{\partial(\bar{F}_{x'} - F_{x'})}{\partial x} + 2\bar{x}'\bar{y}' \frac{\partial(\bar{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial y} + \bar{y}'^2 \frac{\partial(\bar{F}_{y'} - F_{y'})}{\partial y} = 0.$$

Posons maintenant  $\tau = \tau_0$ . Alors de la dernière identité d'après les formules (7), on déduit

$$\left( \mathcal{L}_0 - y_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, e_0)}{\Theta(t_0, e_0)} \right) \bar{x}_0'^2 + 2 \left( \mathcal{N}_0 + x_0' y_0' F_1 \frac{\Theta_t(t_0, e_0)}{\Theta(t_0, e_0)} \right) \bar{x}_0' \bar{y}_0' + \left( \mathcal{T}_0 - x_0'^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, e_0)}{\Theta(t_0, e_0)} \right) \bar{y}_0'^2 = 0.$$

ce que nous pouvons écrire de la manière suivante :

$$\mathcal{L}_0 \bar{x}_0'^2 + 2 \mathcal{N}_0 \bar{x}_0' \bar{y}_0' + \mathcal{T}_0 \bar{y}_0'^2 - (y_0' x_0' - \bar{x}_0' y_0')^2 F_1 \frac{\Theta_t(t_0, e_0)}{\Theta(t_0, e_0)} = 0.$$

La comparaison de cette équation avec (13) nous conduit à l'égalité suivante :

$$\frac{\Theta_t(t_0, h_0)}{\Theta(t_0, h_0)} = \frac{\Theta_t(t_0, e_0)}{\Theta(t_0, e_0)}.$$

On a donc comme auparavant

$$h_0 = e_0.$$

Nous concluons dès lors que le foyer  $H_0$  et le point  $E_0$  de Carathéodory sont identiques.

*Note de la Rédaction.* — Cette dernière conclusion de l'auteur surprendra au premier abord. En effet, le foyer  $E_0$  de M. Carathéodory est obtenu à l'aide d'une famille d'extrémales données par leurs points anguleux, ceux-ci étant supposés décrire une courbe donnée en l'espèce  $P'P_2$ . Les directions des tangentes à ces courbes en chaque point B de  $P'P_2$  sont absolument déterminées, à savoir données par les conditions de Weierstrass-Erdmann, et la direction considérée par l'auteur en B est différente des précédentes.

Si l'on appelle  $\Gamma'$  la figurative au point B, les directions de M. Carathéodory correspondent aux points de contact d'une tangente double à cette courbe, tandis que la direction de M. Razmadzé est (c'est l'interprétation que l'on peut donner au paragraphe 8 de son Mémoire) déduite du point de contact d'une tangente menée à  $\Gamma'$  par le point qui, sur cette courbe, correspond à la direction de la tangente à  $P'P_2$ .

L'identité du foyer  $H_0$  avec  $E_0$  est cependant bien exacte : elle tient à ce que les deux directions ainsi introduites par M. Carathéodory d'une part, par M. Razmadzé de l'autre, ne diffèrent, au voisinage du point anguleux donné  $K_0$ , que d'un infiniment petit du second ordre.

En effet, sur  $\Gamma'$ , le point  $M'$  représentant la tangente à  $P'P_2$  diffère d'un point de contact  $M_1$  de la tangente à double  $\Gamma'$ , d'un infiniment petit du premier ordre ; sa distance à la tangente double  $M_1N_1$  est donc du second ordre, et si l'on mène  $M'N'$  tangente en  $N'$  à  $\Gamma'$ , l'arc  $N'N_1$  est du second ordre.

---