

# BULLETIN DE LA S. M. F.

E. MAILLET

## Sur certains types de fractions continues arithmétiques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 46 (1918), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1918\\_\\_46\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1918__46__1_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1918, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# BULLETIN

DE LA

## SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

**SUR CERTAINS TYPES DE FRACTIONS CONTINUES ARITHMÉTIQUES;**

PAR M. EDMOND MAILLET.

I. Soit une suite de nombres positifs absolument quelconques donnée *a priori*

$$(1) \quad x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

Je me propose d'étudier ici la représentation d'un nombre  $N$  positif quelconque sous la forme d'une fraction continue convergente

$$N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \dots + 1 : d_n x_n + \dots, \\ (d_1 \geq 0, d_2 > 0, \dots, d_n > 0, \dots, \text{les } d_i \text{ étant entiers}).$$

Pour que tout nombre  $N$  positif  $> 0$  admette une représentation de cette forme, il est nécessaire et suffisant que

$$x_n x_{n+1} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

J'indiquerai en outre quelques propriétés de ces représentations, et je dirai un mot du cas où

$$x_n x_{n+1} > 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Une partie des idées essentielles contenues dans la présente Note se trouve déjà dans mon *Introduction à la théorie des nombres transcendants* (Paris, Gauthier-Villars, 1906, Chap. IV: notamment p. 59-60 et p. 82-89). Elles sont toutefois présentées ici, à certains égards, d'une manière plus générale et plus simple.

II. Pour faciliter les écritures, je définirai  $x_0$  par la condition  $x_0 x_1 = 1$ , et je supposerai  $N \geq x_1$ , ce qu'on peut toujours réaliser

en ajoutant  $x_1$  à  $N$ , écrivant  $N_1 = N + x_1$ , et raisonnant sur  $N_1$  dont on efface l'indice.

Soit

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} N = \varepsilon_0 = d_1 x_1 + \varepsilon_1^{-1}, \\ \varepsilon_1 = d_2 x_2 + \varepsilon_2^{-1}, \\ \dots\dots\dots, \\ \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1}, \\ \dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

où les  $d_i$  et  $\varepsilon_i$  sont positifs, avec  $d_i$  entier  $\geq 1$  (1). Pour que tout nombre  $N$  puisse donner lieu à une suite d'opérations de ce genre, nous allons montrer qu'il est nécessaire et suffisant qu'on ait

$$(3) \quad x_n x_{n+1} \leq 1 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

En effet, je dis que cette condition est nécessaire. Soit, pour  $n \geq 1$ ,

$$\varepsilon_n^{-1} = \lambda_n x_n - \eta_n, \quad \lambda_n \text{ entier} > 0, \quad 0 < \eta_n \leq x_n;$$

on a

$$\varepsilon_n = \frac{1}{\lambda_n x_n - \eta_n} \geq d_{n+1} x_{n+1};$$

on peut toujours choisir  $N$  de façon que  $\eta_n$  soit arbitrairement petit, en sorte que

$$\lambda_n d_{n+1} x_n x_{n+1} \leq 1, \quad \text{d'où} \quad x_n x_{n+1} \leq 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cette dernière condition (3) étant supposée remplie, je dis qu'elle est suffisante. En effet, on prendra systématiquement pour  $d_{n+1} = E(\varepsilon_n x_{n+1}^{-1})$  le plus grand entier contenu dans

$$\varepsilon_n x_{n+1}^{-1} \quad (n \geq 0),$$

$d_{n+1} x_{n+1}$  étant alors, par définition, le plus grand multiple de  $x_{n+1}$  qui ne surpasse pas  $\varepsilon_n$ . Cela est possible puisque

$$\varepsilon_n^{-1} < x_n, \quad \varepsilon_n^{-1} x_{n+1} < x_n x_{n+1} \leq 1, \quad \varepsilon_n > \frac{1}{x_n}.$$

Dès lors, on aura ainsi sans ambiguïté, pour chaque nombre

(1) On peut avoir éventuellement  $\varepsilon_n^{-1} = 0$ ; dans ce cas on n'a pas à considérer les égalités (2) qui suivent la  $n^{\text{ième}}$ , ni les quantités  $d_{n+1}, d_{n+2}, \dots, \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots$

$N \geq x_1$ , sous les conditions

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_n x_{n+1} \leq 1, \quad 0 \leq \varepsilon_n^{-1} < x_n \leq \frac{1}{x_{n+1}} \\ d_n x_n > \frac{\varepsilon_{n-1}}{2} > \frac{1}{2x_{n-1}} \geq \frac{x_n}{2} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

le développement, qu'on peut appeler *canonique* [en ce qui concerne la suite (1)],

$$N = d_1 x_1 + \frac{1}{d_2 x_2 + \dots},$$

ou, avec nos notations habituelles,

$$(5) \quad N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \dots + 1 : d_n x_n + \dots;$$

c'est le résultat annoncé au n° I, si l'on vérifie maintenant que cette fraction est convergente; on le fait en se rappelant la condition nécessaire et suffisante de convergence de la fraction continue

$$a_1 + 1 : a_2 + \dots + 1 : a_n + \dots$$

à quotients  $a_i$  positifs; cette condition est que la série de terme général  $a_i$  soit divergente (1); il en est bien ainsi, puisque, d'après (4),  $d_n x_n > \frac{1}{2x_{n-1}}$ ; sur deux quotients consécutifs  $d_i x_i$ ,  $d_{i+1} x_{i+1}$ , l'un est  $> \frac{1}{2}$ , car  $x_i x_{i+1} \leq 1$  montre que  $x_i$  ou  $x_{i+1}$  est  $\leq 1$ .

III. Considérons maintenant un développement de la forme (5), mais où les  $d_n$  sont des entiers donnés *a priori*  $> 0$ , sans qu'on se préoccupe des conditions (2) et (4), de façon toutefois que ce développement soit convergent, les inégalités (3) subsistant aussi. On peut montrer que ce développement n'est pas forcément canonique si l'on n'a pas

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \dots + 1 : d_n + \dots,$$

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \quad x_{2i+1} = x_1 \quad (i = 1, 2, \dots).$$

---

(1) STERN (*J. für Math.*, t. XXXVII); STIELTJES (*Ann. Fac. Toul.*, t. VIII, 1894, J., p. 31).

En effet, posons

$$\epsilon_{n-1} = d_n x_n + \epsilon_n^{-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \dots,$$

$\epsilon_{n-1}$  et  $\epsilon_n$  étant définis par ces égalités; si l'on veut que (4) ait lieu, il faut

$$d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}} \geq \epsilon_{n-1} > \frac{1}{x_{n-1}},$$

$$d_n > \frac{1}{x_n x_{n-1}} - \frac{1}{d_{n+1} x_n x_{n+1}};$$

quand on n'a pas  $x_n x_{n-1} = 1$ ,  $d_n$  doit être  $> 1$  dès que  $d_{n+1}$  dépasse une certaine limite : dans une fraction canonique,  $d_n$  et  $d_{n+1}$  ne sont pas entièrement indépendants, ni, par suite, arbitraires, lorsque  $x_n x_{n-1} < 1$ ; il y a alors pour  $d_n = 1$  ou assez petit, une infinité de valeurs de  $d_{n+1}$  donnant lieu à un développement non canonique, d'ailleurs convergent si la suite  $d_{n+2}$ ,  $d_{n+3}$ , ... satisfait à des conditions convenables, par exemple si

$$d_{n+2} x_{n+2} + 1 : d_{n+3} x_{n+3} + \dots$$

est un développement canonique pour la suite  $x_{n+2}$ ,  $x_{n+3}$ , ...

Il n'y a d'exception à ces conclusions que si l'on a constamment  $x_n x_{n-1} = 1$ , c'est-à-dire quand on a

$$x_{2i} = \frac{1}{x_1}, \quad x_{2i+1} = x_1 \quad (i = 1, 2, \dots);$$

alors

$$\frac{N}{x_1} = d_1 + 1 : d_2 + \dots + 1 : d_n + \dots$$

est une fraction continue ordinaire; les seules fractions non canoniques sont celles ayant un nombre limité de quotients et dont le dernier  $d_{n+1}$  est égal à 1; le développement canonique correspondant s'en déduit en remplaçant  $d_n + \frac{1}{d_{n+1}}$  par  $d'_n = d_n + 1$ .

Il y a là éventuellement une cause de supériorité dans l'emploi des fractions continues ordinaires classiques.

IV. Ceci conduit à se poser diverses questions intéressantes, au sujet de la suite (1) satisfaisant aux conditions (3).

1° Un nombre  $N$  donné possède-t-il un nombre fini ou infini de

représentations

$$(5 \text{ bis}) \quad N = d_1 x_1 + 1 : d_2 x_2 + \dots + 1 : d_n x_n + \dots$$

(les  $d_i$  entiers  $> 0$ ) ?

2° Y a-t-il des nombres  $N$  qui ne possèdent d'autre représentation (5 bis) que la représentation canonique ?

Envisageons d'abord la représentation canonique d'un nombre  $N > 0$ , avec

$$\varepsilon_{n-1} = d_n x_n + \varepsilon_n^{-1}, \quad \varepsilon_n^{-1} < x_n.$$

Si  $N$  a une représentation non canonique, il existera une valeur de  $n \geq 1$  pour laquelle on pourra écrire

$$\varepsilon_{n-1} = \delta_n x_n + \eta_n^{-1}, \quad 0 < \delta_n < d_n, \quad \eta_n \geq x_{n+1},$$

$\delta_n$  étant entier; cette condition nécessaire est aussi suffisante, car la représentation canonique de  $\eta_n$  donnera une représentation correspondante non canonique de  $N$ .

Il faudra et il suffira dès lors qu'on ait

$$(6) \quad \eta_n = \frac{1}{(d_n - \delta_n)x_n + \varepsilon_n^{-1}} \geq x_{n+1}, \quad d_n > \delta_n > 0,$$

ou

$$(7) \quad \varepsilon_n [1 - x_n x_{n+1} (d_n - \delta_n)] \geq x_{n+1}, \quad d_n > \delta_n > 0.$$

On remarquera d'abord que  $\delta_n$  satisfait à l'inégalité

$$1 - x_n x_{n+1} (d_n - \delta_n) \geq 0,$$

qui est possible ici, puisque, d'après (3),  $x_n x_{n+1} \leq 1$ . Si  $x_n x_{n+1} = 1$ , on a

$$d_n - \delta_n = 1, \quad \varepsilon_n^{-1} = 0, \quad \eta_n = \frac{1}{x_n} = x_{n+1};$$

mais la représentation obtenue, non canonique, se ramène à vue à la représentation canonique. Quand  $x_n x_{n+1} < 1$ , il faudra et il suffira, pour qu'il y ait une représentation non canonique (correspondant à  $d_n - \delta_n = 1$ , et alors évidemment convergente),

$$(8) \quad \varepsilon_n \geq \frac{x_{n+1}}{1 - x_n x_{n+1}}, \quad d_n \geq 2, \quad n \geq 1.$$

Dans les applications, il y aura de plus à tenir compte des con-

ditions nécessaires et suffisantes pour que le développement (5 bis) soit canonique,

$$(9) \quad d_n x_n \leq \varepsilon_{n-1} = d_n x_n + 1 : d_{n+1} x_{n+1} + \dots < (d_n + 1) x_n, \\ \varepsilon_n^1 < x_n \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Cette dernière condition entraîne la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} < (d_n + 1) x_n,$$

et la condition suffisante  $d_n x_n > \frac{1}{x_{n-1}}$ , qu'on peut grouper ainsi

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{condition nécessaire } d_{n+1} > \frac{1}{x_n x_{n-1}} \\ \text{condition suffisante } d_n > \frac{1}{x_n x_{n-1}} \end{array} \right\} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

On déduit aussi bien de (9) une série de conditions nécessaires ou suffisantes, qui pourront être plus avantageuses, mais seront plus compliquées, par exemple la condition nécessaire

$$\frac{1}{x_{n-1}} < \varepsilon_{n-1} \leq d_n x_n + \frac{1}{d_{n+1} x_{n+1}}$$

déjà utilisée au n° III.

On voit aussitôt qu'il y a une infinité de nombres N satisfaisant à toutes les conditions (8) et (9) pour chaque suite (1) et chaque valeur de n, lorsque  $x_n x_{n+1} < 1$ .

Les conditions (8) peuvent d'ailleurs subir une transformation analogue à celle que nous avons opérée sur les formules (9). La représentation (5 bis) étant supposée canonique, d'après (8) et (9) on a les conditions

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{nécessaires } d_n \geq 2, \quad d_{n+1} + 1 > \frac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \\ \text{ou} \\ \text{suffisantes } d_n \geq 2, \quad d_{n+1} \geq \frac{1}{1 - x_n x_{n+1}} \end{array} \right\} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

pour l'existence de la représentation non canonique précitée.

Voici quelques conséquences :

V. 1° Soit une fraction continue (5 bis) satisfaisant à la condition suffisante (10) quel que soit  $n \geq 2$ ; elle donnera naissance, pour chaque valeur de  $n \geq 1$  satisfaisant aux conditions suffisantes (11), à au moins une autre fraction (5 bis) non canonique ayant la même valeur N. Ces diverses fractions différeront soit par la valeur du quotient  $d_n x_n$  ou  $\delta_n x_n$  correspondant au même indice  $n$ , soit par l'indice  $n$  auquel s'applique le procédé précité du n° IV.

Exemples. — 1° Soit, pour une valeur de  $n \geq 2$ , à la fois

$$(12) \quad 2x_{n-1}x_n \leq 1, \quad 2x_nx_{n+1} \leq 1;$$

une représentation canonique (5 bis) du nombre N satisfait à la condition nécessaire (10), c'est-à-dire à

$$d_{n+1} > \frac{1}{x_n x_{n-1}} \geq 2, \quad \text{d'où} \quad d_n \geq 2;$$

de plus,

$$\frac{1}{1-x_n x_{n+1}} \leq 2,$$

en sorte que la condition suffisante (11) a lieu. Dès lors, à cette représentation canonique (5 bis) correspond, pour cette valeur de  $n$ , par le procédé précité, une représentation non canonique de N. En particulier, quand les inégalités (12) ont lieu pour une infinité de valeurs de  $n$ , N a une infinité de représentations non canoniques.

Notons encore que, même si (12) n'a pas lieu, la deuxième condition (9),  $\varepsilon_n > \frac{1}{x_n}$ , entraîne la première condition (8) lorsque

$$\frac{1}{x_n} \geq \frac{x_{n+1}}{1-x_n x_{n+1}} \quad \text{ou} \quad 2x_n x_{n+1} \leq 1;$$

alors N a une représentation non canonique correspondante si l'on a  $d_n \geq 2$ .

2° Je suppose

$$(13) \quad 1 > \lambda_1^2 \geq x_n x_{n+1} \geq \lambda^2, \quad \lambda, \lambda_1 \text{ donnés} < 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

D'après (10), les conditions

$$(14) \quad \frac{1}{x_n x_{n-1}} \leq \frac{1}{\lambda^2} \leq d_n, \quad \frac{1}{x_n x_{n-1}} < d_n, \quad d_n \geq 2 \quad (n = 2, 3, \dots)$$

sont suffisantes pour que (5 bis) soit canonique : nous les supposerons remplies. D'après (11), on a, puisque  $1 > x_n x_{n+1}$ , pour l'existence d'une représentation non canonique correspondant à l'indice  $n$ , les conditions

$$(15) \quad \begin{cases} d_{n+1} > \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \text{ nécessaire,} \\ d_{n+1} \geq \frac{1}{1-\lambda_1^2} \text{ suffisante.} \end{cases}$$

Lorsque,  $p$  et  $p_1$  étant entiers ou non,

$$\frac{\lambda^2}{1-\lambda^2} \geq p > 1, \quad \lambda^2 \geq \frac{p}{p+1}, \quad \frac{1}{\lambda^2} \leq 1 + \frac{1}{p} < 2, \quad \frac{1}{1-\lambda_1^2} = p_1 + 1, p \leq p_1,$$

les conditions (14) se réduisent à

$$d_n \geq 2 \quad (n = 2, 3, \dots);$$

les conditions nécessaire ou suffisante (15) exigent respectivement  $d_{n+1} > p$  ou  $d_{n+1} \geq p_1 + 1$ ; il en résulte que, si l'on a  $p \geq 2$ , il n'y a pas de représentation non canonique de (5 bis) correspondant à l'indice  $n$ , sauf dans l'un des cas suivants :

- a.  $p < d_{n+1} < p_1 + 1$  (peut-être);
- b.  $d_{n+1} \geq p_1 + 1$  (sûrement).

D'après cela, par exemple, si  $p$  et  $p_1$  sont entiers  $\geq 2$ , les fractions continues illimitées (5 bis) où les nombres  $d_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) n'ont qu'une des valeurs  $2, 3, \dots, p$ , possèdent une représentation unique de la forme (5 bis), laquelle est forcément canonique; celles où les nombres  $d_n$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) sont tous  $\geq 2$ , certains d'entre eux étant  $\geq p_1 + 1$ , ont au moins autant de représentations non canoniques distinctes qu'il y a de nombres  $d_{n+1}$  dépassant  $p_1$ .

VI. On pourrait étudier aussi, au même point de vue, les suites (1) qui ne satisfont pas aux conditions (3). Une représentation canonique est encore convergente, comme on le voit de suite. Nous indiquerons seulement un résultat, en supposant

$$(16) \quad x_n x_{n+1} > 1 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

On sait qu'alors il y a des nombres  $N > 0$  qui n'ont pas de représentation (5 bis); mais, toute représentation (5 bis) donnée est forcément canonique, d'après (6) et (7).

*Premier exemple.* — Si  $x_n = 2$  quel que soit  $n$ , le nombre

$$N = 2d_1 + 1 : 2d_2 + \dots + 1 : 2d_n + \dots$$

est développé en une fraction continue ordinaire dont tous les quotients incomplets sont pairs. On peut les caractériser aussi comme étant les nombres positifs dont les réduites  $\frac{P_n}{Q_n}$  ont la propriété suivante :  $P_n$  et  $Q_n$  étant de parités forcément différentes, les nombres

$$P_0 = a_0 \text{ (si } N = a_0 + 1 : a_1 + \dots + 1 : a_n + \dots \text{)}, P_1, P_2, \dots$$

sont alternativement pairs ou impairs, le premier étant pair, et, par suite, les nombres  $Q_0 = 1, Q_1, Q_2, \dots$  sont aussi alternativement pairs ou impairs, le premier étant impair.

*Deuxième exemple.* — Si la suite (1) est formée de nombres entiers et satisfait, pour une infinité de valeurs  $n_1$  de  $n$  à la condition

$$x_{n_1} > \varphi(n_1),$$

où  $\varphi(n)$  est une fonction de  $n$  croissant assez vite avec  $n$ , les nombres

$$N = d_1x_1 + 1 : d_2x_2 + \dots + 1 : d_nx_n + \dots$$

à développement illimité sont des nombres transcendants de Liouville.

D'après cela, on voit que la considération de suites (1) satisfaisant à (16) permet, quand on n'envisage que les nombres  $N$  représentables sous la forme (5 bis), d'isoler dans l'ensemble des nombres positifs un ensemble de nombres qui peut éventuellement jouir de propriétés arithmétiques intéressantes. Ce serait peut-être là une question à étudier d'une manière plus complète.

---