BULLETIN DE LA S. M. F.

T. LALESCO

# Les classes de noyaux symétrisables

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 45 (1917), p. 144-149
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1917__45__144_1>

## LES CLASSES DE NOYAUX SYMÉTRISABLES;

PAR M. T. LALESCO.

**1.** *Définitions.* — Nous dirons qu'un noyau $N(xy)$ [1] est symétrisable s'il peut être rendu symétrique par la composition avec un noyau symétrique $G(xy)$.

Comme il existe deux catégories de noyaux symétriques définies par la relation

$$A(xy) = \varepsilon A(yx) \qquad (\varepsilon = \pm 1), \tag{1}$$

il faut distinguer quatre catégories de noyaux symétrisables, suivant la nature du facteur composant et celle du noyau composé.

Convenons d'employer la notation suivante :

On peut caractériser chaque catégorie de noyaux symétriques par le $\varepsilon$ qui figure dans l'équation (1) définissant sa symétrie. Nous dirons alors qu'un noyau symétrique $G(xy)$ est du type $(\varepsilon)$.

D'une manière analogue, nous dirons qu'un noyau symétrisable $N(xy)$ est du type $(\varepsilon, \varepsilon')$, si $(\varepsilon)$ est le type du facteur composant et $(\varepsilon')$ celui du noyau composé.

Il résulte ainsi les quatre types de noyaux symétrisables suivants : 1° $(1, 1)$; 2° $(1, -1)$; 3° $(-1, 1)$, et 4° $(-1, -1)$. Nous verrons dans la suite qu'ils se réduisent à trois types distincts.

---

[1] Dans tout cet article, nous avons écrit d'une façon générale $N(xy)$ à la place de $N(x, y)$, pour simplifier l'écriture.

2. *Exemples :*

1° *Tout noyau composé de* DEUX *noyaux symétriques est un noyau symétrisable.*

Prenons deux noyaux $G(xy)$ et $H(xy)$ de types $(\varepsilon)$ et $(\varepsilon')$ respectivement. Le produit

$$\int H(xs)\,G(sy)\,ds$$

est symétrisable et de type $(\varepsilon, \varepsilon')$.

2° *Les noyaux de la forme*

$$A(x)\,G(xy)\,B(y),$$

où $G(xy)$ est un noyau symétrique du type $(\varepsilon)$, *sont des noyaux symétrisables du type* $(\varepsilon, 1)$.

Ces noyaux, qui se présentent fréquemment dans les applications, sont désignés sous le nom de *noyaux polaires.*

3° *Tout noyau itéré d'un noyau symétrisable est aussi symétrisable.*

Soit $N(xy)$ un noyau symétrisable du type $(\varepsilon, \varepsilon')$ dont la symétrie est définie par la relation

$$\int G(xs)\,N(sy)\,ds = K(xy).$$

On a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N_2(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N(ty)\,ds\,dt \\ &= \varepsilon'\int G(ts)\,N(sx)\,N(ty)\,ds\,dt \\ &= \varepsilon\varepsilon'\int G(st)\,N(sx)\,N(ty)\,ds\,dt.\end{aligned}$$

Sous cette forme, on voit que l'échange des $x$ et $y$ entre eux revient à changer $G(st)$ en $G(ts)$.

Le noyau $\int G(xs)\,N_2(sy)\,ds$ est donc symétrique et du même type que $G(xy)$.

D'une façon analogue, on a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(3)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N(tu)\,N(uy)\,ds\,dt\\ &= \int K(xt)\,N(tu)\,N(uy)\,dt\,du\\ &= \varepsilon\varepsilon' \int K(tu)\,N(tx)\,N(uy)\,dt\,du,\end{aligned}$$

ce qui montre que le noyau $\int G(xs)\,N^{(3)}(sy)\,ds$ est symétrique et du type $(\varepsilon')$.

La règle est générale :

*Tout noyau itéré d'ordre pair d'un noyau symétrisable* $(\varepsilon, \varepsilon')$ *est aussi symétrisable et du type* $(\varepsilon, \varepsilon)$ ; *tout noyau itéré d'ordre impair et symétrisable, est du type* $(\varepsilon, \varepsilon')$.

En effet, pour un noyau itéré d'ordre $2p$, on a

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(2p)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N_p(st)\,N_p(ty)\,ds\,dt\\ &= \pm \int G(st)\,N_p(sx)\,N_p(ty)\,ds\,dt,\end{aligned}$$

et, pour un noyau d'ordre $2p+1$,

$$\begin{aligned}\int G(xs)\,N^{(2p+1)}(sy)\,ds &= \int G(xs)\,N(st)\,N_p(tu)\,N_p(uy)(stu)\\ &= \pm \int K(tu)\,N_p(tx)\,N_p(uy)\,du\,dt.\end{aligned}$$

On peut réunir ces deux résultats, dans l'énoncé suivant :

*Tout noyau itéré est symétrisable et du type*

$$[\varepsilon, \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^k],$$

$k$ étant l'ordre du noyau.

3. *Les facteurs composants. — Un noyau symétrisable admet une infinité de facteurs composants.*

En effet, si $G(xy)$ est un facteur composant, nous venons de voir que les noyaux symétriques

$$K_p(xy) = \int G(xs)\,N^{(p)}(sy)\,ds$$

le sont aussi, car on a

$$\int K_p(xs)\,N(sy)\,ds = \int G(xs)\,N^{(p+1)}(sy)\,ds.$$

Il y a dès lors lieu de considérer, dans la famille des facteurs composants, le noyau de puissance minimum, ou l'un d'eux s'il y en a plusieurs; nous dirons que c'est un facteur composant primitif et nous le désignerons par la notation $A(xy)$.

4. *Le genre d'un noyau symétrisable.* — La composition avec le facteur composant peut se faire à droite ou à gauche. Ainsi, par exemple, le produit des noyaux symétriques $G(xy)$ et $H(xy)$ est symétrisable à gauche par le facteur $H(xy)$ et à droite par $G(xy)$.

De même, les noyaux polaires, définis précédemment, sont symétrisables à gauche par $B(x)\,G(xy)\,B(y)$ et à droite par $A(x)\,G(xy)\,A(y)$.

Une question se pose dès lors : Un noyau qui est symétrisable d'un côté, l'est-il aussi de l'autre côté ?

Il en est certainement ainsi pour une catégorie étendue de noyaux symétrisables.

Nous définirons pour cela une notion nouvelle, celle du *genre* d'un noyau symétrisable.

Considérons l'équation intégrale

$$N^{(g)}(xy) = \int B(xs)\,A(sy)\,ds, \tag{2}$$

où $A(xy)$ désigne un facteur composant à gauche et primitif de $N(xy)$ et $N^{(g)}(xy)$ le noyau itéré de puissance $g$. Il peut arriver qu'à partir d'une certaine valeur de $g$ cette équation soit résoluble; la valeur minimum de $g$, à partir de laquelle l'équation (2) est résoluble diminuée d'une unité, sera appelée le *genre* du noyau symétrisable considéré.

Dans la pratique, lorsque le noyau $N(xy)$ et le facteur composant sont donnés, il est facile de déterminer le genre ou en tout cas une limite supérieure, soit par des remarques directes, soit en appliquant le théorème de Picard.

Ainsi, par exemple, les noyaux symétrisables, produits composés de deux noyaux symétriques, sont de genre *zéro*. En effet pour un pareil noyau

$$N(xy) = \int H(xs)\, G(sy)\, ds,$$

dont $G(xy)$ est un facteur composant, on voit que $g = 1$, par la définition même du noyau.

Les noyaux polaires sont de genre au plus égal à 1, car

$$\begin{aligned} N_2(xy) &= \int A(x)\, G(xs)\, B(s)\, A(s)\, G(sy)\, B(y)\, ds \\ &= \int A(x)\, G(xs)\, A(s)\, B(s)\, G(sy)\, B(y)\, ds. \end{aligned}$$

Or nous avons vu que $B(x)\, G(xy)\, B(y)$ est, pour $N(xy)$, un facteur composant à gauche. Donc $g \leqq 2$.

Enfin, il est évident que les noyaux itérés d'un noyau symétrisable, ont un genre plus petit ou au plus égal au genre du noyau considéré.

5. *Facteurs composants associés.* — On a le théorème suivant :

*Tout noyau symétrisable fermé et de genre fini est symétrisable des deux côtés, à gauche et à droite.*

Nous montrerons pour cela que :

1° *Le noyau* $B(xy)$ *est symétrique.* — En effet, on a

$$\int A(xs)\, N^{(g)}(sy)\, ds = \int A(xs)\, B(st)\, A(ty)\, ds.$$

Or le noyau du premier membre est symétrique, et du type

$$\varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g.$$

Il résulte alors que l'on aura

$$\int A(xs)[B(st) - \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g B(ts)]\, A(ty)\, ds\, dt \equiv 0.$$

Donc, puisque $N(xy)$ est un noyau fermé, on aura

$$B(xy) = \varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^g B(yx).$$

2° *Le noyau* $K(xy) = \int N(xs)B(sy)\,ds$ *est symétrique.* — En effet, on a

$$N^{(g+1)}(x) = \int N(xs)\,B(st)\,A(ty)\,ds\,dt.$$

Donc

$$\int A(xs)\,N^{(g+1)}(sy)\,ds = \int A(xs)\,K(st)\,A(sy)\,ds;$$

on en déduit que $K(xy)$ est symétrique et du type $\varepsilon(\varepsilon\varepsilon')^{g+1}$.

Il résulte donc bien que $N(xy)$ est symétrisable à droite par $B(xy)$ et du type

$$[(\varepsilon\varepsilon')^{g}\varepsilon,\ (\varepsilon\varepsilon')^{g}\varepsilon'].$$

Nous dirons que $B(xy)$ *est le facteur composant associé de* $A(xy)$.

6. *Les classes de noyaux symétrisables.* — Les développements précédents ont montré qu'il n'existe en réalité que trois classes distinctes de noyaux symétrisables.

En effet, les classes $(\varepsilon, \varepsilon')$ et $(\varepsilon', \varepsilon)$ sont identiques, car, les facteurs composants $\int A(xs)N^{(i)}(sy)\,ds$ sont alternativement du type $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ et les noyaux composés résultants sont du type $\varepsilon'$ et $\varepsilon$.

On voit en même temps que la symétrisation à droite n'altère pas le caractère de symétrie du noyau considéré.

Il reste maintenant à établir que les trois classes restantes $(1, 1)$, $(1, -1)$ et $(-1, -1)$ sont réellement distinctes. Ceci résultera ultérieurement de leurs propriétés spéciales.

Remarquons enfin que le résultat précédent peut encore s'énoncer de la façon suivante : On peut intervertir l'ordre des $\varepsilon$, dans la fiche d'un noyau symétrisable.

Ces résultats suggèrent une classification systématique des noyaux, en considérant successivement les classes formées par noyaux composés de plusieurs noyaux symétriques, ou plus généralement les noyaux symétrisables de classe $k$, dont les facteurs composants soient des noyaux symétrisables de classes $k-1$. Les noyaux symétriques des deux premières classes seraient : 1° les noyaux symétriques proprement dits (première classe), et 2° les noyaux symétrisables que nous venons de considérer (seconde classe).