BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VILLAT

Sur le problème de Dirichlet relatif au cercle

Bulletin de la S. M. F., tome 39 (1911), p. 443-456

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1911__39__443_1>

SUR LE PROBLÈME DE DIRICHLET RELATIF AU CERCLE;

PAR M. HENRI VILLAT.

Le présent article, sans prétention aucune, a surtout pour but, à propos d'un problème particulier bien classique, d'exposer une méthode fort simple et susceptible d'être étendue à la résolution d'un très grand nombre de problèmes beaucoup plus généraux, dont la plupart ne sont résolus jusqu'ici que *théoriquement* (¹). Il semble que, dans l'exemple ci-dessous, l'on mette ainsi en évidence l'origine bien naturelle de certains résultats qu'on a l'habitude de démontrer tout autrement.

Il s'agit de déterminer une fonction harmonique régulière dans le cercle de rayon 1, ayant pour centre l'origine du plan xOy, et prenant sur la circonférence frontière une suite de valeurs données.

Nous rechercherons à cet effet une fonction analytique $\Omega(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, dont la partie réelle $P(x, y)$ soit la fonction harmonique demandée. (On a posé, bien entendu, $z = x + iy$.)

Nous commencerons par déterminer une certaine fonction élémentaire indispensable pour ce qui va suivre.

Introduction d'une fonction élémentaire. — Supposons que la suite des valeurs données sur la frontière soit ainsi fixée : la fonction $P(x, y)$ doit prendre la valeur constante α en tout point $e^{i\sigma}$ de la circonférence pour lequel on a

$$-\sigma_0 < \sigma < \sigma_0$$

et la valeur zéro sur le reste de la circonférence.

En préjugeant (ce qui sera légitimé *a posteriori*) que la fonction $\Omega_0(z)$ particulière qui correspond à ces données, soit développable en série entière convergente jusque sur la frontière, sauf en des points exceptionnels, nous chercherons à déterminer les coefficients a_n, évidemment réels, de manière que l'on ait

$$\Omega_0(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots.$$

Posons sur la circonférence

$$z = e^{i\sigma},$$

alors la partie réelle de Ω_0 est à la frontière

$$a_0 + a_1 \cos\sigma + a_2 \cos 2\sigma + \ldots + a_n \cos n\sigma + \ldots.$$

Or ce développement sera le développement en série trigono-

(¹) *Cf.* Henri VILLAT, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 mars 1911, 4 septembre 1911.

métrique d'une fonction égale à α ou à zéro sur les arcs déjà indiqués, si l'on pose

$$a_0 = \frac{\alpha\sigma_0}{\pi},$$
$$a_n = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\sin n\sigma_0}{n}.$$

De sorte que l'on aurait pour Ω_0

$$\Omega_0(z) = \frac{\alpha\sigma_0}{\pi} + \frac{2\alpha}{\pi}\left(z\sin\sigma_0 + \frac{z^2}{2}\sin 2\sigma_0 + \ldots + \frac{z^n}{n}\sin n\sigma_0 + \ldots\right).$$

Mais c'est un résultat bien connu, qu'on a (*cf.* E. Picard, *Analyse*, t. II, p. 75)

$$z\,e^{i\sigma_0} + \frac{z^2}{2}e^{2i\sigma_0} + \ldots + \frac{z^n}{n}e^{ni\sigma_0} + \ldots = -\log(1 - z\,e^{i\sigma_0}),$$

dans et sur la circonférence de rayon 1, sauf au point $z = e^{-i\sigma_0}$, et

$$z\,e^{-i\sigma_0} + \frac{z^2}{2}e^{-2i\sigma_0} + \ldots + \frac{z^n}{n}e^{-ni\sigma_0} + \ldots = -\log(1 - z\,e^{-i\sigma_0}),$$

dans le même domaine, sauf au point $z = e^{i\sigma_0}$. (La détermination du logarithme est celle qui s'annule pour $z = 0$.)

De là immédiatement

$$\log\frac{1 - z\,e^{-i\sigma_0}}{1 - z\,e^{i\sigma_0}} = 2i\left(z\sin\sigma_0 + \frac{z^2}{2}\sin 2\sigma_0 + \ldots + \frac{z^n}{n}\sin n\sigma_0 + \ldots\right)$$

et par suite

$$(1)\qquad \Omega_0(z) = \frac{\alpha\sigma_0}{\pi} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{1 - z\,e^{-i\sigma_0}}{1 - z\,e^{i\sigma_0}},$$

les points $e^{\pm i\sigma_0}$ étant exceptés.

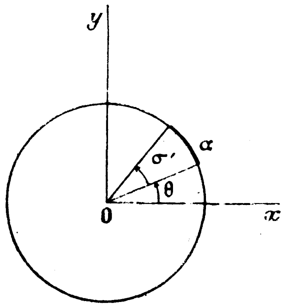
Au surplus il n'aurait pas été malaisé de déduire sans calcul cette formule, des propriétés connues du logarithme.

Ceci posé, il est clair qu'en remplaçant dans Ω_0, z par $ze^{-i(\theta+\sigma_0)}$, et $2\sigma_0$ par σ', la nouvelle fonction obtenue

$$(2)\qquad \frac{\alpha\sigma'}{2\pi} - \frac{\alpha i}{\pi}\log\frac{1 - z\,e^{-i(\theta+\sigma')}}{1 - z\,e^{-i\theta}}$$

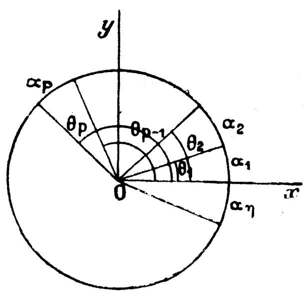
aura une partie réelle qui prendra à la frontière la valeur α pour $\theta < \sigma < \theta + \sigma'$, et la valeur zéro sur le reste de la circonférence.

Fig. 1.



Construction d'une formule générale. — Il va maintenant être extrêmement facile de déterminer une fonction ω de z, dont

Fig. 2.



la partie réelle prenne des valeurs constantes données, sur n petits arcs en lesquels je suppose décomposée la circonférence frontière ; à savoir par exemple

la valeur α_1	pour	$0 < \sigma < \theta_1$,
» α_2	»	$\theta_1 < \sigma < \theta_2$,
....	....	................,
» α_p	»	$\theta_{p-1} < \sigma < \theta_p$,
....	....	....

D'après le paragraphe précédent, il est manifeste qu'on peut écrire

$$(3)\qquad \omega = \left(\frac{\alpha_1\theta_1}{2\pi} - \frac{\alpha_1 i}{\pi}\log\frac{1-ze^{-i\theta_1}}{1-z}\right)$$
$$+\left[\frac{\alpha_2(\theta_2-\theta_1)}{2\pi} - \frac{\alpha_2 i}{\pi}\log\frac{1-ze^{-i\theta_2}}{1-ze^{-i\theta_1}}\right]+\ldots$$
$$+\left[\frac{\alpha_p(\theta_p-\theta_{p-1})}{2\pi} - \frac{\alpha_p i}{\pi}\log\frac{1-ze^{-i\theta_p}}{1-ze^{-i\theta_{p-1}}}\right]+\ldots.$$

Imaginons maintenant que nous fassions croître indéfiniment le nombre n des subdivisions de notre circonférence, de façon que chacune de ces subdivisions tende vers zéro; alors à la limite, la succession $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des valeurs données, donne naissance à une fonction

$$(4)\qquad \alpha = \Phi(\theta)$$

qui représente la succession de ces valeurs.

Supposant pour le moment cette fonction intégrable, nous voyons de suite que la somme des premiers termes de chaque parenthèse écrite dans ω tend évidemment à la limite vers l'expression

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\,d\theta.$$

Observons ensuite que la quantité

$$\log\frac{1-ze^{-i\theta_p}}{1-ze^{-i\theta_{p-1}}}$$

diffère très peu de

$$\frac{ize^{-i\theta_p}}{1-ze^{-i\theta_p}}(\theta_p-\theta_{p-1}),$$

nous en concluons que la somme des termes restants dans ω tend à la limite vers

$$\frac{z}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{e^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta.$$

Le passage à la limite nous a donc fourni la fonction

$$(5)\qquad \Omega(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\Phi(\theta)+\Phi(\theta)\frac{2ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\right]d\theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{1+ze^{-i\theta}}{1-ze^{-i\theta}}\,d\theta$$

dont la partie réelle prend certainement, au moins dans des conditions assez étendues, la suite des valeurs $\Phi(\theta)$ sur la circonférence frontière ([1]).

Avant de nous occuper de préciser dans quelles conditions cette formule est sûrement valable, remarquons qu'elle n'est, telle quelle, certainement pas applicable à la frontière : en effet, pour chacune des parenthèses constituant la fonction ω, les points extrêmes de l'intervalle correspondant sur la circonférence étaient des points singuliers. Tous les points de cette circonférence sont donc à la limite singuliers pour la fonction Ω, au moins en apparence.

Mais il est extrêmement facile d'éviter cet inconvénient, par la transformation suivante, que la construction par passage à la limite rend toute naturelle.

Nous commencerons par rechercher la valeur que prend la fonction Ω à la frontière.

Valeur sur la circonférence limite. — Reprenons notre fonction ω. Faisons-y

$$z = e^{i\varepsilon},$$

ε étant différent des arguments des points de subdivision. La partie réelle de ω est alors égale à l'une des valeurs constantes α_p données; cherchons quelle est la partie imaginaire. Un calcul élémentaire montre qu'elle est égale à

$$iT = -\frac{i}{\pi}\left\{ \alpha_1 \log\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon-\theta_1}{2}}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}\right| + \alpha_2 \log\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon-\theta_2}{2}}{\sin\frac{\varepsilon-\theta_1}{2}}\right| + \ldots + \alpha_p \log\left|\frac{\sin\frac{\varepsilon-\theta_p}{2}}{\sin\frac{\varepsilon-\theta_{p-1}}{2}}\right| + \ldots \right\}.$$

Or ceci peut s'écrire

$$iT = +\frac{i}{\pi}\sum_p (\alpha_{p+1}-\alpha_p)\log\left|\sin\frac{\varepsilon-\theta_p}{2}\right|$$

([1]) Schwartz, Cf. *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ (*Math. Abhandlungen*, t. II, p. 152).

ou encore

$$iT = \frac{i}{\pi} \sum_p \left\{ [\alpha_{p+1} - \Phi(\varepsilon)] - [\alpha_p - \Phi(\varepsilon)] \right\} \log \left| \sin \frac{\varepsilon - \theta_p}{2} \right|$$

ou bien enfin

$$iT = -\frac{i}{\pi} \sum [\alpha_p - \Phi(\varepsilon)] \log \left| \frac{\sin \frac{\varepsilon - \theta_p}{2}}{\sin \frac{\varepsilon - \theta_{p-1}}{2}} \right| .$$

Mais sous cette forme on voit que, si l'on passe à la limite, l'expression iT tend vers l'intégrale suivante, *qui a un sens*,

$$-\frac{i}{\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d}{d\theta} \log \left| \sin \frac{\varepsilon - \theta}{2} \right| d\theta.$$

Cette expression peut évidemment s'écrire

$$(6) \qquad \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d\theta}{\tan \frac{\varepsilon - \theta}{2}}.$$

Transformation de Ω. — Le calcul que nous venons de faire donne à penser que, si dans la formule (5) nous introduisions la différence $\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)$ à la place de $\Phi(\theta)$, la formule obtenue serait valable dans tout le cercle, *y compris le point* $e^{i\varepsilon}$ *de la frontière*. Il est facile de voir que cette vue est exacte.

Supposons en effet tout d'abord le point z *intérieur* au cercle; il est clair que nous avons le droit d'écrire la formule (5) sous la forme

$$\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} d\theta + \frac{\Phi(\varepsilon)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} d\theta.$$

Calculons la dernière intégrale

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} d\theta;$$

z étant toujours à l'intérieur du cercle, on trouve sans difficulté

$$A = 2\pi,$$

de sorte que l'on a, au moins à l'intérieur du domaine,

$$(7)\qquad \Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} d\theta + \Phi(\varepsilon).$$

Mais cette formule, qui conserve un sens lorsqu'on y fait

$$z = e^{i\varepsilon},$$

est encore valable jusqu'en ce point. En effet :

1° Elle est équivalente à (5) *dans* le cercle.

2° Si l'on y fait $z = e^{i\varepsilon}$, l'intégrale qui figure dans (7) devient purement imaginaire, et par suite la partie réelle du second membre est $\Phi(\varepsilon)$, ce qui devait être.

3° Dans les mêmes conditions, la partie imaginaire fournie par cette formule est

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{d\theta}{\operatorname{tang}\frac{\varepsilon - \theta}{2}},$$

expression identique à celle qu'on avait trouvée directement auparavant (ce qui n'a vraiment pas lieu de nous surprendre).

D'ailleurs, il est aisé de vérifier que la partie réelle de la fonction Ω fournie par la formule (5) coïncide avec l'intégrale de Poisson, et par suite on pourrait maintenant se contenter de renvoyer aux innombrables travaux antérieurs pour ce qui concerne les conditions de validité de cette formule.

Sans vouloir ici déterminer les conditions les plus strictes possibles que l'on puisse actuellement donner, nous exposerons la démonstration de la validité des formules dans un cas très étendu, à savoir celui où la fonction $\Phi(\theta)$ satisfait à une condition de Lipschitz. La validité, en conservant notre mode d'exposition, dans des cas bien plus étendus, résulterait, comme cas très particulier, des démonstrations de notre Mémoire *Sur le problème de Dirichlet relatif à une aire annulaire* (1).

On vient de voir qu'il était permis de se servir indifféremment des formules (5) ou (7) à l'intérieur de la circonférence, mais

(1) Cf. *Comptes rendus*, t. 152, p. 680; *Rendiconti del Circolo mat. di Palermo*, 1912, 1er semestre.

qu'il était commode de prendre Ω sous sa forme (7) au voisinage de la frontière.

La partie réelle P de Ω prenant évidemment sur la frontière les valeurs données, comme il a été déjà dit, et cette fonction étant visiblement régulière *dans* le cercle de rayon 1, tout se borne à faire voir que la partie réelle tend vers $\Phi(\varepsilon)$ lorsque le point z tend vers le point $z_1 = e^{i\varepsilon}$, par un chemin intérieur au domaine. C'est ce que nous prouverons en montrant que la différence

$$\Omega(z) - \Omega(z_1)$$

tend vers zéro; et ceci aura l'avantage de prouver en même temps la continuité de P et de Q (je rappelle qu'on a $\Omega = P + iQ$), c'est-à-dire celle de Ω.

Continuité de Ω. — D'après la formule (7) on a

$$\Omega(z) - \Omega(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \left(\frac{1 + z e^{-i\theta}}{1 - z e^{-i\theta}} - \frac{1 + z_1 e^{-i\theta}}{1 - z_1 e^{-i\theta}} \right) d\theta,$$

et par suite il suffit de montrer que la différence

$$L = \int_0^{2\pi} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{2 e^{i\theta}(z - z_1)}{(z - e^{i\theta})(z_1 - e^{i\theta})} d\theta$$

peut être rendue aussi petite qu'on veut pour $|z - z_1|$ assez petit.

Nous séparerons à cet effet la circonférence en deux portions; en isolant un petit arc ab, de longueur $2k$, ayant le point z_1 pour milieu; nous désignerons par L_{ab} et L′ les deux portions correspondantes de l'intégrale L. Enfin nous appellerons (*voir* la figure) M, P, et P_1 les points respectifs z, $e^{i\theta}$, $e^{i\varepsilon}\,(= z_1)$.

La fonction Φ satisfaisant par hypothèse à une condition de Lipschitz, on peut écrire

$$|\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)| < \lambda |\theta - \varepsilon|^{\alpha}$$

avec

$$\lambda > 0, \qquad \alpha > 0.$$

De sorte qu'en désignant par $\mathfrak{M}$ un nombre positif supérieur à λ au voisinage de ε, on a évidemment

$$|L_{ab}| < 2\mathfrak{M} \int_{ab} \frac{|z - z_1| \times |\theta - \varepsilon|^{\alpha}}{MP.PP_1} d\theta.$$

Or considérons le quotient

$$\frac{|\theta - \varepsilon|^\alpha}{\mathrm{PP}_1},$$

l'arc PP_1 étant petit, on est assuré que

$$\left|\frac{\operatorname{arc}\mathrm{PP}_1}{\mathrm{PP}_1}\right| < 2,$$

et par suite

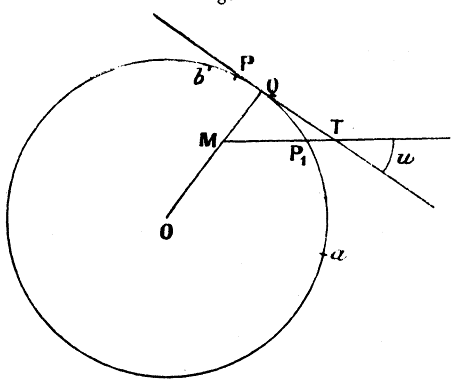
$$\frac{|\theta - \varepsilon|^\alpha}{\mathrm{PP}_1} < 2\frac{(\operatorname{arc}\mathrm{PP}_1)^\alpha}{\operatorname{arc}\mathrm{PP}_1} = \frac{2}{|\theta - \varepsilon|^{1-\alpha}}.$$

On a d'autre part (*voir* la figure)

$$\left|\frac{z - z_1}{\mathrm{MP}}\right| = \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MP}} < \frac{\mathrm{MP}_1}{\mathrm{MQ}} < \frac{\mathrm{MT}}{\mathrm{MQ}} = \frac{1}{\sin u} < \frac{1}{\sin u'},$$

en appelant u' le minimum de l'angle u, minimum assurément non nul si l'on suppose pour un moment que le point M tende

Fig. 3.



vers P_1 par le chemin rectiligne MP_1, et que l'arc ab a été suffisamment restreint pour qu'en aucun de ses points la tangente au cercle ne soit parallèle à MP_1.

Si maintenant on suppose que M tende vers P_1 par un chemin quelconque intérieur à la circonférence, mais non tangent à celle-ci en P_1, il sera évidemment possible de restreindre suffisamment l'arc ab, et de prendre la distance MP_1 assez petite, pour que les cordes $\mathrm{P}_1\mathrm{M}$ joignant P_1 aux points voisins sur ce chemin, ne soient jamais parallèles à une tangente à la circonférence en quelque point de ab. Dans ces conditions, u' restera supérieur à un nombre non nul u'', et l'on pourra écrire

$$\frac{|z - z_1|}{\mathrm{MP}} < \frac{1}{\sin u''}.$$

De là résulte

$$|\mathrm{L}_{ab}| < \frac{4\mathfrak{M}}{\sin u''} \int_{\varepsilon - k}^{\varepsilon + k} \frac{d\theta}{|\theta - \varepsilon|^{1-\alpha}},$$

c'est-à-dire

$$|\mathrm{L}_{ab}| < \frac{8\mathfrak{M}}{\sin u''} k^{\alpha}.$$

Il est donc possible de choisir k fixe, de manière à satisfaire à l'inégalité

$$|\mathrm{L}_{ab}| < \gamma,$$

en désignant par γ un nombre positif arbitrairement petit.

k étant ainsi fixé, il nous reste à nous occuper de L' :

$$\mathrm{L}' = 2\int_{\text{circonf.} - ab} [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \frac{e^{i\theta}(z - z_1)}{(z - e^{i\theta})(z_1 - e^{i\theta})} d\theta.$$

Or, assujettissons $\mathrm{MP}_1 = |z - z_1|$ à être au plus égale à la corde de l'arc $\frac{1}{2}ab$ (soit d cette corde). Dans ces conditions, dans l'intégrale L', $|z - e^{i\theta}|$ sera toujours supérieur à $\frac{1}{2}d$, le point $e^{i\theta}$ étant extérieur à l'arc ab; et il en sera de même de $|z_1 - e^{i\theta}|$. Par suite, en désignant par μ le maximum du module de $\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)$ supposé borné, il viendra

$$|\mathrm{L}'| < 2\mu \frac{|z - z_1|}{\frac{d^2}{4}} 2\pi = \frac{16\pi\mu}{d^2} |z - z_1|,$$

et le second membre sera inférieur à γ si l'on choisit $|z - z_1|$ assez petit.

Il en résultera que $|\mathrm{L}|$ sera dans les mêmes conditions inférieur à 2γ, ce qui démontre la continuité annoncée.

Il a été supposé que le point $\mathrm{M}(z)$ tendait vers $\mathrm{P}_1(z_1)$ par un chemin non tangent. Il est bien clair que, la partie réelle de Ω étant $\Phi(\varepsilon)$, au point $e^{i\varepsilon}$, la continuité de Ω ne saurait subsister sur la circonférence, que si la fonction Φ y est elle-même continue. Il est d'ailleurs facile de montrer qu'en un point $e^{i\varepsilon_1}$ où la fonction Φ est continue, Ω est elle-même continue sur la circonférence.

D'après la formule (6), cela revient à montrer que la différence

$$\mathcal{R} = \int_0^{2\pi} \left\{ [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon)] \cot \frac{\varepsilon - \theta}{2} - [\Phi(\theta) - \Phi(\varepsilon_1)] \cot \frac{\varepsilon_1 - \theta}{2} \right\} d\theta$$

tend vers zéro avec $|\varepsilon - \varepsilon_1|$. Séparons comme précédemment cette intégrale en deux portions : R_{ab} et R', l'arc ab, de longueur $2k$, ayant pour milieu le point $e^{i\varepsilon_1}$, et contenant le point $e^{i\varepsilon}$ puisque celui-ci tend vers $e^{i\varepsilon_1}$.

La fonction Φ satisfaisant à une condition de Lipschitz, on en conclut comme ci-dessus, $\mathfrak{M}$ désignant un nombre positif :

$$|\mathcal{R}_{ab}| < \mathfrak{M} \left(\int_{ab} \frac{|\theta - \varepsilon|^\alpha}{\left| \operatorname{tang} \frac{\varepsilon - \theta}{2} \right|} d\theta + \int_{ab} \frac{|\theta - \varepsilon_1|^\alpha}{\left| \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1 - \theta}{2} \right|} d\theta \right).$$

Or

$$\left| \operatorname{tang} \frac{\varepsilon - \theta}{2} \right| > \left| \frac{\varepsilon - \theta}{2} \right| \quad \text{et} \quad \left| \operatorname{tang} \frac{\varepsilon_1 - \theta}{2} \right| > \left| \frac{\varepsilon_1 - \theta}{2} \right|.$$

Donc

$$|\mathcal{R}_{ab}| < 2\mathfrak{M} \left\{ \int_{ab} \frac{d\theta}{|\theta - \varepsilon|^{1-\alpha}} + \int_{ab} \frac{d\theta}{|\theta - \varepsilon_1|^{1-\alpha}} \right\},$$

c'est-à-dire

$$|\mathcal{R}_{ab}| < 4\mathfrak{M}(1 + 2^\alpha) k^\alpha,$$

puisque $|\varepsilon_1 - \theta|$ reste $< k$, et $|\varepsilon - \theta| < 2k$.

On peut donc choisir k fixe assez petit pour satisfaire à l'inégalité

$$|R_{ab}| < \gamma,$$

γ étant donné d'avance arbitrairement petit.

Comme on s'assure ensuite aisément que, k étant ainsi fixé, on peut rendre $|R'|$ plus petit que γ par un choix convenable de $|\varepsilon - \varepsilon_1|$, il en résulte la continuité annoncée.

On étudie facilement ce qui se passe lorsque la fonction Φ n'est pas bornée.

Cas particulier. — Proposons-nous de voir ce que deviennent les formules générales ci-dessus, lorsqu'on suppose que la fonction Φ donnée prenne des valeurs égales aux points de la circonférence de rayon 1, symétriques par rapport à l'axe réel. Ce cas est particulièrement intéressant, car il se présente dans un grand nombre de problèmes de Physique mathématique ([1]).

Nous admettons donc que l'on ait par hypothèse

$$\Phi(2\pi - \theta) = \Phi(\theta), \tag{8}$$

il en résulte évidemment que la fonction Ω est réelle pour z réel, et c'est ce que montre de suite la formule (5). Cette formule devient d'ailleurs

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\theta)\frac{1+z\,e^{-i\theta}}{1-z\,e^{-i\theta}}\,d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{1+z\,e^{-i\theta}}{1-z\,e^{-i\theta}}\,d\theta.$$

Mais il vient, à cause de (8),

$$\int_{\pi}^{2\pi}\Phi(\theta)\frac{1+z\,e^{-i\theta}}{1-z\,e^{-i\theta}}\,d\theta = \int_0^{\pi}\Phi(\theta)\frac{1+z\,e^{i\theta}}{1-z\,e^{i\theta}}\,d\theta,$$

d'où

$$\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\theta)\left(\frac{1+z\,e^{-i\theta}}{1-z\,e^{-i\theta}} + \frac{1+z\,e^{i\theta}}{1-z\,e^{i\theta}}\right)d\theta,$$

et par un calcul immédiat

$$\Omega = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Phi(\theta)\frac{1-z^2}{1-2z\cos\theta+z^2}\,d\theta. \tag{9}$$

C'est la formule (103) de mon Mémoire *Sur la résistance des fluides*.

De même, l'expression (6) de la partie imaginaire de Ω devient, dans l'hypothèse actuelle,

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\cot\frac{\varepsilon-\theta}{2}\,d\theta + \frac{i}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\cot\frac{\varepsilon-\theta}{2}\,d\theta,$$

c'est-à-dire

$$\frac{i}{2\pi}\int_0^{\pi}[\Phi(\theta)-\Phi(\varepsilon)]\left(\cot\frac{\varepsilon-\theta}{2}+\cot\frac{\varepsilon+\theta}{2}\right)d\theta,$$

ce qui coïncide avec l'expression fournie par l'équation (97) de mon Mémoire susdit.

---

[1] *Cf.* Henri VILLAT, *Sur la résistance des fluides* (*Annales scientifiques de École Normale supérieure*, 1911, p. 203).

Il est difficile de ne pas remarquer l'analogie qui existe entre la formule (9) et la formule de Poisson, analogie d'écriture tout au moins, car les lettres qui y figurent n'ont nullement la même signification. Les considérations suivantes pouvaient faire prévoir cette analogie.

En posant

$$x + iy = z, \qquad x - iy = z_0$$

et en désignant par

$$\Omega(z) = P(x, y) + i\,Q(x, y)$$

et

$$\Omega_0(z_0) = P(x, y) - i\,Q(x, y)$$

une fonction de z, et ce que devient cette fonction quand on y remplace partout i par $-i$, on voit qu'on peut écrire

$$\Omega(z) + \Omega_0(z_0) = 2\,P(x, y) = 2\,P\left(\frac{z + z_0}{2}, \frac{z - z_0}{2i}\right).$$

Or c'est là une identité par rapport à z et à z_0. Alors, en y faisant $z_0 = z$, et en remarquant que, dans le cas actuel, on sait d'avance que $\Omega_0(z)$ est identique à $\Omega(z)$, à cause de l'hypothèse (8), on conclut

$$\Omega(z) = P(z, 0). \tag{10}$$

Or ici, $P(x, y)$ est fourni par la formule de Poisson, qui s'écrit, en posant $z = x + iy = r\,e^{i\sigma}$,

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\sigma - \theta) + r^2}\,d\theta$$

ou encore

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,\frac{1 - x^2 - y^2}{1 - 2(x\cos\theta + y\sin\theta) + x^2 + y^2}\,d\theta.$$

Il suffit alors d'appliquer l'équation (10) pour obtenir la formule

$$\begin{aligned}\Omega(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\theta)\,\frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\,d\theta \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\theta)\,\frac{1 - z^2}{1 - 2z\cos\theta + z^2}\,d\theta,\end{aligned}$$

dont le lien avec la formule de Poisson est ainsi mis en évidence.