BULLETIN DE LA S. M. F.

L LECORNU

Sur l'équilibre d'un système de plans soumis à l'action du vent

Bulletin de la S. M. F., tome 37 (1909), p. 11-31
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1909__37__11_1>

SUR L'ÉQUILIBRE D'UN SYSTÈME DE PLANS SOUMIS A L'ACTION DU VENT;

PAR M. L. LECORNU.

Je me propose d'étudier au point de vue mathématique l'action du vent sur un système quelconque d'aires planes formant un ensemble rigide. J'appellerai ces aires planes les *éléments* du système. J'admettrai la loi du sinus d'après laquelle un vent de vitesse V, rencontrant sous l'angle i une aire plane de surface S, exerce sur celle-ci une pression qui lui est normale et a pour valeur

$$KSV^2 \sin i,$$

K désignant un facteur constant. Je supposerai le système disposé de telle sorte que chaque élément soit sollicité par le vent de la même manière que s'il était isolé.

L'expérience montre qu'il y a une assez grande incertitude sur la position du centre de pression : ce point se déplace dans certaines limites relativement à l'aire considérée, quand on fait varier la direction du vent. Je regarderai les éléments du système comme assez petits pour qu'on puisse négliger les déplacements de ce genre.

I. — Composition des actions élémentaires.

Prenons trois axes rectangulaires liés au système donné et appelons l, m, n les cosinus directeurs de la vitesse du vent. Soient a, b, c ceux de la normale à l'élément de surface S; les projections de la résultante de translation de toutes les pressions sont données par les formules

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} X &= KV^2 \sum S a(al+bm+cn),\\ Y &= KV^2 \sum S b(al+bm+cn),\\ Z &= KV^2 \sum S c(al+bm+cn),\end{aligned}\right.$$

les sommations $\sum$ étant étendues à tous les éléments du système.

Si x, y, z désignent, pour l'élément de surface S, les coordonnées du centre de pression, le moment résultant des pressions a pour projections sur les axes

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} L &= KV^2 \sum S(cy-bz)(al+bm+cn),\\ M &= KV^2 \sum S(az-cx)(al+bm+cn),\\ N &= KV^2 \sum S(bx-ay)(al+bm+cn).\end{aligned}\right.$$

Posons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} A &= \sum a^2 S, & B &= \sum b^2 S, & C &= \sum c^2 S,\\ D &= \sum bc S, & E &= \sum ca S, & F &= \sum ab S\end{aligned}\right.$$

et

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} \lambda_1 &= \sum a(cy-bz)S, & \lambda_2 &= \sum b(cy-bz)S, & \lambda_3 &= \sum c(cy-bz)S,\\ \mu_1 &= \sum a(az-cx)S, & \mu_2 &= \sum b(az-cx)S, & \mu_3 &= \sum c(az-cx)S,\\ \nu_1 &= \sum a(bx-ay)S, & \nu_2 &= \sum b(bx-ay)S, & \nu_3 &= \sum c(bx-ay)S,\end{aligned}\right.$$

d'où

$$(5)\quad \lambda_1+\mu_2+\nu_3 = 0.$$

Les formules (1) et (2) deviennent

$$(6)\qquad \begin{cases} X = KV^2(A l + F m + E n), \\ Y = KV^2(F l + B m + D n), \\ Z = KV^2(E l + D m + C n), \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} L = KV^2(\lambda_1 l + \lambda_2 m + \lambda_3 n), \\ M = KV^2(\mu_1 l + \mu_2 m + \mu_3 n), \\ N = KV^2(\nu_1 l + \nu_2 m + \nu_3 n). \end{cases}$$

Indicatrice des pressions. — La projection sur la direction du vent de la résultante des pressions est la quantité P définie par l'égalité

$$P = X l + Y n + Z n = KV^2(A l^2 + B m^2 + C n^2 + 2 D mn + 2 E nl + 2 F lm).$$

Si l'on porte sur la direction du vent, à partir de l'origine, le vecteur $V\sqrt{\frac{K}{P}}$, le lieu de l'extrémité de ce vecteur est la quadrique

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy = 1,$$

qu'on peut appeler l'*indicatrice des pressions.* Orientons les axes de coordonnées suivant les directions principales de cette surface. Nous annulons ainsi D, E, F, et il reste simplement

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

A, B, C étant d'après leur définition positifs, l'indicatrice des pressions est un ellipsoïde.

Indicatrice des moments. — Le moment résultant a pour projection sur la direction du vent la quantité Q définie par l'égalité

$$\begin{aligned} Q &= L l + M m + N n \\ &= KV^2[\lambda_1 l^2 + \mu_2 m^2 + \nu_3 n^2 + (\lambda_2 + \mu_1) lm + (\mu_3 + \nu_2) mn + (\nu_1 + \lambda_3) nl]. \end{aligned}$$

Si l'on porte sur la direction du vent le vecteur $V\sqrt{\frac{K}{Q}}$, le lieu de son extrémité est la quadrique

$$\lambda_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \nu_3 z^2 + (\lambda_2 + \mu_1) xy + (\mu_3 + \nu_2) yz + (\nu_1 + \lambda_3) zx = 1.$$

En orientant les axes suivant les directions principales de cette *indicatrice des moments,* on réduit son équation à

$$\lambda_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \nu_3 z^2 = 1.$$

L'identité (5) montre que la surface est du genre hyperboloïde. En réalité, l'indicatrice des moments doit être regardée comme formée des deux hyperboloïdes conjugués

$$\lambda_1 x^2 + \mu_2 y^2 + \nu_3 z^2 = \pm 1,$$

dont l'un correspond aux directions pour lesquelles Q est positif et l'autre aux directions qui rendent cette quantité négative. Quand le vent souffle parallèlement à une génératrice, le plan du couple résultant est parallèle à cette génératrice.

Points et surfaces remarquables. — Prenons comme directions d'axes celles des axes de l'indicatrice des pressions, de façon à annuler D, E, F, puis transportons l'origine au point dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Les coefficients λ, μ, ν éprouvent les variations suivantes :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta\lambda_1 = 0, & \Delta\lambda_2 = -B\zeta, & \Delta\lambda_3 = C\eta, \\ \Delta\mu_1 = A\zeta, & \Delta\mu_2 = 0, & \Delta\mu_3 = -C\xi, \\ \Delta\nu_1 = -A\eta, & \Delta\nu_2 = B\xi, & \Delta\nu_3 = 0. \end{array} \right.$$

On peut choisir la nouvelle origine de façon à annuler les différences

$$\lambda_2 - \mu_1, \quad \mu_3 - \nu_2, \quad \nu_1 - \lambda_3.$$

Il suffit de prendre

$$\xi = \frac{\mu_3 - \nu_2}{B + C}, \qquad \eta = \frac{\nu_1 - \lambda_3}{C + A}, \qquad \zeta = \frac{\lambda_2 - \mu_1}{A + B}.$$

Si l'on pose ensuite

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} \lambda_1 = S_1, & \mu_2 = S_2, & \nu_3 = S_3, \\ \lambda_2 = \mu_1 = T_3, & \mu_3 = \nu_2 = T_1, & \nu_1 = \lambda_3 = T_2, \end{array} \right.$$

les projections du moment résultant prennent les formes symétriques

$$(9\,bis) \qquad \left\{ \begin{array}{l} L = KV^2(S_1 l + T_3 m + T_2 n) \\ M = KV^2(T_3 l + S_2 m + T_1 n) \\ N = KV^2(T_2 l + T_1 m + S_3 n) \end{array} \right. \qquad (S_1 + S_2 + S_3 = 0).$$

On obtient un autre point remarquable en choisissant ξ, η, ζ, de façon à annuler les sommes

$$\lambda_2 + \mu_1, \quad \mu_3 + \nu_2, \quad \nu_1 + \lambda_3.$$

Si nous partons de l'origine précédente, les conditions à remplir sont, en vertu des équations (8) et (9),

$$2T_1 + (B - C)\xi = 0, \qquad 2T_2 + (C - A)\eta = 0, \qquad 2T_3 + (A - B)\zeta = 0.$$

Pour le point ainsi défini, l'indicatrice des moments a mêmes directions d'axes que l'indicatrice des pressions.

Cherchons maintenant les points pour lesquels le moment résultant est nul. En conserbant les équations (9) et en écrivant que L, M, N sont nuls simultanément, on est conduit aux trois conditions suivantes (nous remplaçons ξ, η, ζ par x, y, z) :

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{l} S_1 l + (T_3 - Bz)m + (T_2 + Cy)n = 0, \\ (T_3 + Az)l + S_2 m + (T_1 - Cx)n = 0, \\ (T_2 - Ay)l + (T_1 + Bx)m + S_3 n = 0, \end{array} \right.$$

d'où, en éliminant l, m, n,

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} S_1 & T_3 - Bz & T_2 + Cy \\ T_3 + Az & S_2 & T_1 - Cx \\ T_2 - Ay & T_1 + Bx & S_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Le développement de ce déterminant donne l'équation

$$\begin{aligned} S_1 BC x^2 + S_2 CA y^2 + S_3 AB z^2 + T_3 C(A + B)xy \\ + T_1 A(B + C)yz + T_2 B(C + A)zx + (S_1 T_1 - T_2 T_3)(C - B)x \\ + (S_2 T_2 - T_3 T_1)(A - C)y + (S_3 T_3 - T_1 T_2)(B - A)z + \Delta = 0, \end{aligned}$$

dans laquelle

$$\Delta = \begin{vmatrix} S_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & S_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & S_3 \end{vmatrix}.$$

Cette quadrique a nécessairement ses génératrices réelles, car, pour un point quelconque de la surface, il existe une direction de vent telle que les pressions admettent une résultante passant par ce point, et la propriété subsiste manifestement pour tous les points de la ligne d'action de cette résultante, ligne qui fait ainsi partie du lieu. En se plaçant dans le cas particulier où A, B, C sont égaux, on reconnaît sans peine que ladite surface est un hyperboloïde; nous l'appellerons, pour abréger, l'hyperboloïde H. Il est à noter qu'en chaque point une seule génératrice répond à la question : car les équations

$$L = M = N = 0$$

ne donnent, pour des valeurs déterminées de x, y, z, qu'un seul système de valeurs de l, m, n.

Les directions de vent pour lesquelles il y a une résultante des pressions s'obtiennent immédiatement en écrivant que l'expression

$$LAl + MBm + NCn$$

est nulle, ce qui conduit au cône

$$\begin{aligned} &AS_1 l^2 + BS_2 m^2 + CS_3 n^2 \\ &\qquad + (B + C)T_1 mn + (C + A)T_2 nl + (A + B)T_3 lm = 0. \end{aligned}$$

Ce cône est réel en vertu de l'identité

$$S_1 + S_2 + S_3 = 0.$$

On arriverait au même cône en éliminant x, y, z entre les équations (10) et (11).

Axes centraux. — A un point quelconque de l'espace correspondent certaines directions de vent telles que l'axe central des pressions passe par ce point. On les obtient en écrivant

$$\frac{L}{Al} = \frac{M}{Bm} = \frac{N}{Cn}. \tag{12}$$

Soit ρ la valeur commune de ces trois rapports. En remplaçant L, M, N par leurs valeurs qui ne diffèrent pas des premiers membres des équations (10), puis éliminant l, m, n, on est conduit à la condition

$$\begin{vmatrix} S_1 - A\rho & T_3 - Bz & T_2 + Cy \\ T_3 + Az & S_2 - B\rho & T_1 - Cx \\ T_2 - Ay & T_1 + Bx & S_3 - C\rho \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Cette équation représente le lieu des points par lesquels passe un axe central fournissant un rapport donné ρ entre le moment résultant et la résultante de translation ; elle ne diffère de (11) que par le changement de S_1, S_2, S_3 en

$$S_1 - A\rho, \quad S_2 - B\rho, \quad S_3 - C\rho,$$

et l'on en conclut qu'elle peut se mettre sous la forme

$$H - ABC\rho\Sigma + \Delta_\rho = 0,$$

en désignant par H le premier membre de (11), par Σ le premier membre de l'équation d'une sphère et par Δ_ρ le déterminant

$$\Delta_\rho = \begin{vmatrix} S_1 - A\rho & T_3 & T_2 \\ T_3 & S_2 - B\rho & T_1 \\ T_2 & T_1 & S_3 - C\rho \end{vmatrix}.$$

La surface (13) admet évidemment les mêmes directions principales que l'hyperboloïde H. Elle peut, suivant les valeurs de ρ, être réelle ou imaginaire. Si, par exemple, on considère le cas où T_1, T_2, T_3 sont nuls, l'équation (13) devient

$$\left(\frac{S_1}{A} - \rho\right)x^2 + \left(\frac{S_2}{B} - \rho\right)y^2 + \left(\frac{S_3}{C} - \rho\right)z^2 + \left(\frac{S_1}{A} - \rho\right)\left(\frac{S_2}{B} - \rho\right)\left(\frac{S_3}{C} - \rho\right) = 0,$$

et cette surface est imaginaire chaque fois que ρ est supérieur à la plus grande ou inférieur à la plus petite des quantités

$$\frac{S_1}{A}, \quad \frac{S_2}{B}, \quad \frac{S_3}{C}.$$

La surface (13) ne peut être réelle sans avoir ses génératrices réelles. Car si ρ est connu et si x, y, z sont réels, les équations (12) donnent pour l, m, n des valeurs également réelles, qui sont les cosinus directeurs de l'une des génératrices passant au point considéré.

Par chaque point de l'espace passent trois axes centraux (dont deux peuvent être imaginaires); leurs directions sont données par les équations (12); à ces trois axes correspondent trois valeurs de ρ généralement distinctes. Les trois axes centraux passant à l'origine choisie dans ce qui précède forment un trièdre rectangulaire.

II. — Systèmes équivalents.

D'après les équations (6) et (7), deux systèmes sont équivalents au point de vue de l'action du vent, quelles que soient l'intensité et la direction de celui-ci, si les coefficients caractéristiques définis par les équations (3) et (4) sont les mêmes. Ces coefficients sont au nombre de quinze; mais, en vertu de l'identité (5), quatorze seulement d'entre eux peuvent être arbitrairement choisis.

Si l'on considère un élément isolé, l'action du vent dépend des six quantités

$$aS, \quad bS, \quad cS, \quad cy - bz, \quad az - cx, \quad bx - ay,$$

dont cinq seulement sont indépendantes. Trois éléments arbitrairement choisis représentent donc un système caractérisé par quinze coefficients. D'après cela, le problème : *Trouver trois éléments plans équivalents à un système donné* comporte un nombre simplement infini de solutions. Voyons comment on peut les obtenir.

Soient a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a_3, b_3, c_3 les cosinus directeurs des normales aux trois éléments.

Introduisons neuf inconnues auxiliaires α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 définies par les relations

$$(14) \quad \begin{cases} a_1\sqrt{S_1} = \alpha_1\sqrt{A}, & a_2\sqrt{S_2} = \alpha_2\sqrt{A}, & a_3\sqrt{S_3} = \alpha_3\sqrt{A}, \\ b_1\sqrt{S_1} = \beta_1\sqrt{B}, & b_2\sqrt{S_2} = \beta_2\sqrt{B}, & b_3\sqrt{S_3} = \beta_3\sqrt{B}, \\ c_1\sqrt{S_1} = \gamma_1\sqrt{C}, & c_2\sqrt{S_2} = \gamma_2\sqrt{C}, & c_3\sqrt{S_3} = \gamma_3\sqrt{C}. \end{cases}$$

Les équations (3), dans lesquelles nous continuons à faire

$$D = E = F = 0,$$

prennent la forme

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$
$$\beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0, \qquad \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0, \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3 = 0.$$

On voit ainsi que les inconnues auxiliaires sont les cosinus directeurs de trois droites rectangulaires.

Il faut maintenant vérifier les équations (4). En désignant par x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2; x_3, y_3, z_3 les coordonnées des centres des trois éléments, on est conduit à neuf équations parmi lesquelles figurent les trois suivantes :

$$
\begin{aligned}
a_1 S_1(c_1 y_1 - b_1 z_1) + a_2 S_2(c_2 y_2 - b_2 z_2) + a_3 S_3(c_3 y_3 - b_3 z_3) &= \lambda_1,\\
b_1 S_1(c_1 y_1 - b_1 z_1) + b_2 S_2(c_2 y_2 - b_2 z_2) + b_3 S_3(c_3 y_3 - b_3 z_3) &= \lambda_2,\\
c_1 S_1(c_1 y_1 - b_1 z_1) + c_2 S_2(c_2 y_2 - b_2 z_2) + c_3 S_3(c_3 y_3 - b_3 z_3) &= \lambda_3,
\end{aligned}
$$

qui, au moyen des substitutions (14), donnent

$$\alpha_1\left(\gamma_1 \frac{y_1}{\sqrt{B}} - \beta_1 \frac{z_1}{\sqrt{C}}\right) + \alpha_2\left(\gamma_2 \frac{y_2}{\sqrt{B}} - \beta_2 \frac{z_2}{\sqrt{C}}\right) + \alpha_3\left(\gamma_3 \frac{y_3}{\sqrt{B}} - \beta_3 \frac{z_3}{\sqrt{C}}\right) = \frac{\lambda_1}{\sqrt{ABC}}$$

et deux équations analogues.

On tire de là

$$\gamma_1 \frac{y_1}{\sqrt{B}} - \beta_1 \frac{z_1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{ABC}}(\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \beta_1 + \lambda_3 \gamma_1),$$

. . . .

Par permutation, on trouve ensuite

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{z_1}{\sqrt{C}} - \gamma_1 \frac{x_1}{\sqrt{A}} &= \frac{1}{\sqrt{ABC}}(\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 + \mu_3 \gamma_1),\\
\beta_1 \frac{x_1}{\sqrt{A}} - \alpha_1 \frac{y_1}{\sqrt{B}} &= \frac{1}{\sqrt{ABC}}(\nu_1 \alpha_1 + \nu_2 \beta_1 + \nu_3 \gamma_1).
\end{aligned}
$$

Éliminant enfin x_1, y_1, z_1, on aboutit à la condition suivante (dans laquelle nous supprimons les indices de α, β, γ):

$$(15)\quad \lambda_1 \alpha^2 + \mu_2 \beta^2 + \nu_3 \gamma^2 + (\nu_2 + \mu_3)\beta\gamma + (\lambda_3 + \nu_1)\gamma\alpha + (\mu_1 + \lambda_2)\alpha\beta = 0.$$

Cette équation exprime que la direction de α_1, β_1, γ_1 appartient au cône asymptote de l'indicatrice des moments, c'est-à-dire qu'un vent soufflant suivant cette direction produit un couple dont le plan est parallèle au vent.

Les deux autres directions α_2, β_2, γ_2 et α_3, β_3, γ_3 appartiennent à ce même cône. A chaque trièdre trirectangle ainsi orienté correspond, au moyen des équations (14), un trièdre généralement obliquangle, dont les faces ont des directions répondant à la question. Il reste à trouver les centres des trois éléments.

Cherchons x_1, y_1, z_1. Ces coordonnées ne sont pas entièrement déterminées. Nous savons seulement que le centre de l'élément se trouve sur la droite (normale à l'élément) :

$$\gamma_1 \frac{y_1}{\sqrt{B}} - \beta_1 \frac{z_1}{\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{ABC}}(\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\beta_1 + \lambda_3\gamma_1),$$

$$\alpha_1 \frac{z_1}{\sqrt{C}} - \gamma_1 \frac{x_1}{\sqrt{A}} = \frac{1}{\sqrt{ABC}}(\mu_1\alpha_1 + \mu_2\beta_1 + \mu_3\gamma_1),$$

ou bien

$$c_1 y_1 - b_1 z_1 = \frac{1}{\sqrt{A}}\left(\lambda_1 \frac{a_1}{\sqrt{A}} + \lambda_2 \frac{b_1}{\sqrt{B}} + \lambda_3 \frac{c_1}{\sqrt{C}}\right),$$

$$c_1 z_1 - c_1 x_1 = \frac{1}{\sqrt{B}}\left(\mu_1 \frac{a_1}{\sqrt{A}} + \mu_2 \frac{b_1}{\sqrt{B}} + \mu_3 \frac{c_1}{\sqrt{C}}\right).$$

On peut donc s'imposer une condition supplémentaire, par exemple

$$a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 = 0,$$

c'est-à-dire admettre que l'élément plan passe par l'origine. Il vient alors

$$x_1 = \frac{b_1}{\sqrt{C}}\left(\nu_1 \frac{a_1}{\sqrt{A}} + \nu_2 \frac{b_1}{\sqrt{B}} + \nu_3 \frac{c_1}{\sqrt{C}}\right) - \frac{c_1}{\sqrt{B}}\left(\mu_1 \frac{a_1}{\sqrt{A}} + \mu_2 \frac{b_1}{\sqrt{B}} + \mu_3 \frac{c_1}{\sqrt{C}}\right)$$

et deux expressions analogues. Un calcul tout semblable fait connaître les centres des deux autres éléments.

En résumé :

On peut toujours trouver un système de trois éléments plans équivalent à un système donné et faire en sorte que les plans de ces trois éléments passent par l'origine (arbitrairement choisie). Il y a un nombre simplement infini de semblables trièdres. Les normales à tous les éléments forment un cône du second degré.

Cherchons si la réduction peut être opérée de telle façon que les trois éléments forment un système orthogonal.

Si l'on suppose que l'expression

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

est nulle, les équations (14) conduisent à la relation

$$A\alpha_1\alpha_2 + B\beta_1\beta_2 + C\gamma_1\gamma_2 = 0.$$

D'ailleurs

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0.$$

d'où, en supposant A, B, C différents entre eux,

$$\frac{\alpha_1\alpha_2}{B-C}=\frac{\beta_1\beta_2}{C-A}=\frac{\gamma_1\gamma_2}{A-B};$$

de même

$$\frac{\alpha_2\alpha_3}{B-C}=\frac{\beta_2\beta_3}{C-A}=\frac{\gamma_2\gamma_3}{A-B},\qquad \frac{\alpha_3\alpha_1}{B-C}=\frac{\beta_3\beta_1}{C-A}=\frac{\gamma_3\gamma_1}{A-B}.$$

Si toutes les quantités α, β, γ sont non nulles, on tire de là

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_3}=\frac{\beta_1}{\beta_3}=\frac{\gamma_1}{\gamma_3},$$

résultat inadmissible, puisque les directions $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ sont orthogonales. Il faut donc que l'une au moins des quantités α, β, γ soit nulle. Supposons, par exemple, $\gamma_2 = 0$.

Les produits $\alpha_1\,\alpha_2$, $\beta_1\,\beta_2$, $\alpha_2\,\alpha_3$, $\beta_2\,\beta_3$ sont alors nuls. γ_2 étant nul, l'une au moins des quantités α_2, β_2 diffère de zéro.

Admettons que ce soit β_2. On en conclut

$$\beta_1=\beta_3=0$$

et, par suite,

$$\alpha_3\alpha_1=\gamma_3\gamma_1=0.$$

β_1 étant nul, l'une au moins des quantités α_1, γ_1 diffère de zéro. Soit, par exemple, $\alpha_1 \gtrless 0$. La quantite α_3 est nulle. β_3 l'étant déjà, γ_3 est égal à l'unité et, par suite, $\gamma_1 = 0$, d'où $\alpha_1 = 1$.

Nous avons en somme

$$\alpha_1=\gamma_3=1 \qquad \text{et} \qquad \beta_1=\gamma_1=\gamma_2=\beta_3=0.$$

Comme

$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,$$

il faut que β_2 soit égal à l'unité et que, par suite, α_2 soit nul en même temps que γ_2.

On voit que le trièdre des directions α, β, γ est parallèle aux axes de coordonnées. Il est aisé de vérifier que, si cette condition est remplie, le trièdre des directions a, b, c est également orthogonal.

Reportons-nous maintenant à l'équation (15), et nous voyons immédiatement que les conditions nécessaires et suffisantes pour que le trièdre (α, β, γ) puisse avoir ses arêtes parallèles aux axes sont

$$\lambda_1=\mu_2=\nu_3=0.$$

C'est donc seulement dans ce cas que le système donné est réductible à trois éléments orthogonaux.

Quand le système est réduit à trois éléments, on peut interpréter assez simplement les conditions moyennant lesquelles le moment résultant des pressions est nul par rapport à l'origine.

Posons, pour abréger,

$$cy - bz = p, \qquad az - cx = q, \qquad cx - ay = r,$$

et écrivons que les quantités L, M, N sont égales à zéro.

Il vient ainsi

$$(16)\quad \begin{cases} (a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_2) l + (b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3) m + (c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3) n = 0, \\ (a_1 q_1 + a_2 q_2 + a_3 q_3) l + (b_1 q_1 + b_2 q_2 + b_3 q_2) m + (c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3) n = 0, \\ (a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3) l + (b_1 r_1 + b_2 r_2 + b_3 r_3) m + (c_1 r_1 + c_2 r_2 + c_3 r_3) n = 0. \end{cases}$$

Le déterminant de ces trois équations linéaires en l, m, n doit être nul. Or, il est égal au produit des deux déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

De là, deux solutions possibles.

La solution $\Delta_1 = 0$ exprime que les plans des trois éléments passent par une même droite. En prenant celle-ci pour axe des z, on annule à la fois c_1, c_2, c_3. Les équations sont alors vérifiées pour

$$l = m = 0,$$

c'est-à-dire pour un vent parallèle à la fois aux trois éléments, ce qui était évident *a priori*. Pour que d'autres directions de vent puissent convenir, il faut, en posant $m = l\rho$, que l'on ait à la fois

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1\rho)p_1 + (a_2 + b_2\rho)p_2 + (a_3 + b_3\rho)p_3 &= 0, \\ (a_1 + b_1\rho)q_1 + (a_2 + b_2\rho)q_2 + (a_3 + b_3\rho)q_3 &= 0, \\ (a_1 + b_1\rho)r_1 + (a_2 + b_2\rho)r_2 + (a_3 + b_3\rho)r_3 &= 0, \end{aligned}$$

d'où, en continuant à supposer que Δ_2 n'est pas nul,

$$a_1 + b_1\rho = 0, \qquad a_2 + b_2\rho = 0, \qquad \alpha_3 + b_3\rho = 0,$$

c'est-à-dire que les trois éléments doivent être parallèles.

Il est clair qu'en pareil cas tout vent parallèle à la fois aux trois éléments fournit une solution du problème.

Laissant de côté ces cas particuliers, il nous reste à envisager la solution $\Delta_2 = 0$.

Considérons le plan P_1 mené par l'origine et par le centre de S_1 normalement à cet élément. Ce plan contient à la fois les deux droites menées de l'origine avec les paramètres directeurs a_1, b_1, c_1 et x_1, y_1, z_1. Son équation est donc

$$p_1 x + q_1 y + r_1 z = 0.$$

On trouve de même les plans P_2 et P_3 correspondant aux deux autres éléments, et l'on reconnaît ainsi que, si Δ_2 est nul, ces trois plans passent par une même droite D. Quand cette droite existe, elle rencontre à la fois les normales aux trois éléments, et alors, quelle que soit la direction du vent, son moment est nul par rapport à D. Si l'on prend celle-ci pour axe des z_1, on a

$$r_1 = r_2 = r_3 = 0;$$

la troisième équation (16) disparaît et les deux autres déterminent les valeurs de l, m, n pour lesquelles L, M, N sont nuls simultanément. D'après cela :

Pour que l'action du vent sur un système de trois éléments puisse avoir un moment nul par rapport au point de concours des plans de ces éléments, il faut ou bien que ces plans passent par une même droite, ou bien que les normales aux trois éléments rencontrent une même droite passant par le point de concours.

Nous terminerons ce paragraphe en examinant ce qui arrive quand le système proposé (formé d'un nombre quelconque d'éléments) possède un plan de symétrie.

Supposons que ce plan soit pris pour plan zOx. A chaque élément, défini par les quantités a, b, c, x, y, z, S, correspond un autre élément défini par les quantités

$$a, \quad -b, \quad c, \quad x, \quad -y, \quad z, \quad S,$$

et il en résulte qu'on a, dans ce cas,

$$\lambda_1 = 0, \qquad \mu_2 = 0, \qquad \nu_3 = 0, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \nu_1 = 0.$$

Le cône (15) se décompose alors en deux plans

$$\beta = 0, \qquad (\nu_2 + \mu_3)\gamma + (\mu_1 + \lambda_2)\alpha = 0,$$

dont le premier coïncide avec le plan de symétrie.

Le trièdre trirectangle formé par les directions α_1, β_1, γ_1 ; α_2, β_2, γ_2; α_3 β_3, γ_3 doit donc avoir ses arêtes dans deux plans rectangulaires, ce qui exige que deux des arêtes soient dans l'un de ces plans, et que la troisième soit dirigée dans l'autre plan perpendiculairement à l'arête du dièdre. Les trièdres, en nombre infini, répondant à la question, se divisent donc en deux groupes, et les trièdres d'un même groupe ont une arête commune. Les deux groupes ont un trièdre commun formé par les deux arêtes de ce genre et par l'arête du dièdre.

Les trièdres équivalents au système proposé (directions a, b, c) se divisent de la même façon.

III. — Équilibre d'un système libre.

Comme application des théories qui précèdent, cherchons d'abord les conditions d'équilibre d'un aéroplane dont le moteur ne fonctionne pas. En pratique, un pareil système est sensiblement symétrique par rapport à un plan. Mais la symétrie n'est jamais parfaite; elle disparaît même tout à fait quand on manœuvre le gouvernail de direction. Il n'est donc pas sans intérêt de traiter la question en restant dans le cas général d'un système dépourvu de plans de symétrie.

Pour que l'équilibre ait lieu, il faut que les pressions admettent une résultante, et que celle-ci soit égale et opposée au poids appliqué au centre de gravité.

Nous avons vu que, si les pressions admettent une résultante passant par un point donné, celui-ci se trouve nécessairement sur l'hyperboloïde H défini par l'équation (11). Si donc l'appareil n'est pas disposé de façon que son centre de gravité appartienne à cette surface, l'équilibre est impossible ; il y a alors rotation indéfinie autour du centre de gravité.

Il faut ensuite que l'une des génératrices passant au centre de gravité soit dirigée verticalement : la génératrice qui doit être ainsi orientée est celle qui représente la ligne d'action du vent. Les choses étant en cet état, le vent est nécessairement incliné sur l'horizontale; il n'en serait autrement que si l'on avait

$$A l^2 + B m^2 + C n^2 = 0,$$

condition irréalisable, puisque A, B, C sont positifs.

Cette quantité étant positive, la direction du vent doit faire un angle aigu avec la verticale ascendante. D'après cela :

Un aéroplane rigide, sans moteur, ne peut, quelle que soit sa forme, demeurer immobile si le vent est horizontal. L'équilibre n'est possible que dans un vent ascendant.

Voyons maintenant ce qu'on peut dire au sujet de la stabilité.

L'action du vent n'admet pas de potentiel. On le reconnaît immédiatement en remarquant que, pour un élément isolé, le travail du vent, quand on passe d'une position à une autre, dépend non seulement de la trajectoire suivie par le centre, mais encore des orientations prises successivement par cet élément. On peut, notamment, annuler ce travail en faisant d'abord tourner l'élément autour de son centre jusqu'à ce qu'il devienne parallèle au vent, puis en le maintenant parallèle au vent pendant que le centre se déplace, et en lui imprimant enfin, autour de son centre, une rotation qui l'amène à sa direction finale.

On ne peut donc, pour reconnaître si l'équilibre est stable, avoir recours à la méthode basée sur la considération du potentiel. La seule ressource est d'étudier les mouvements autour de la position d'équilibre, et de rechercher si ces mouvements demeurent très petits quand le temps augmente indéfiniment. Pour faire cette étude d'une manière rigoureuse, il faudrait, dans l'expression $KSV^2 \sin i$, considérer V comme étant la vitesse relative du vent par rapport à chaque élément, et i comme étant l'angle d'incidence de cette vitesse relative. Le problème deviendrait alors très compliqué et le système cesserait d'être entièrement caractérisé par les quinze coefficients (3) et (4). Aussi, pour ne pas sortir du cadre de cette étude, me bornerai-je à l'examen du cas dans lequel la masse et les moments d'inertie du système sont assez grands pour que les oscillations autour de la position d'équilibre s'effectuent avec une grande lenteur. J'admettrai que, vu cette lenteur, on peut négliger l'influence de la vitesse propre de chaque élément.

Dans l'état d'équilibre, la somme des moments des pressions est nulle par rapport au centre de gravité, et la résultante des pressions est égale et opposée au poids. Si le système prend un petit mouvement de translation, sans que la vitesse du vent soit altérée, ce mouvement, une fois commencé, ne peut être arrêté que par l'effet d'une variation dans la résultante des pressions. Comme nous négligeons l'influence de la vitesse de translation sur cette résultante, nous devons admettre que le mouvement continue indéfiniment, mais il est bien entendu qu'en pratique le système ne tarderait pas à stationner de nouveau dans une position peu différente de la première, sans avoir, d'ailleurs, la moindre tendance à retourner vers celle-ci.

Voyons maintenant ce qui arrive si le système change d'orientation. Observons tout d'abord qu'une rotation autour de la direction du vent ne modifie pas la situation de l'appareil relativement à cette direction; après comme avant la rotation, la somme des moments des forces demeure nulle par rapport au centre de gravité, en sorte que la rotation n'a aucune raison de cesser. En réalité, elle ne cesse que par l'effet des variations de pression dues à la vitesse de rotation. Ces variations ont pour résultat d'arrêter le système dans une orientation différente de la première. Ainsi placé, le système est sollicité par deux forces appliquées à son centre de gravité et égales entre elles; mais ces forces ne sont plus directement opposées, en sorte que le centre de gravité va maintenant se mouvoir suivant la direction de leur bissectrice et l'équilibre ne peut plus être rétabli que par l'intervention d'une force auxiliaire capable de reproduire l'orientation primitive.

Ces considérations montrent qu'un aéroplane indéformable privé de moteur n'est jamais en équilibre stable; les lents mouvements de rotation qu'il est susceptible de prendre autour d'un axe passant par son centre de gravité et parallèle au vent ne sont limités que par les résistances provenant de la rotation elle-même, en sorte que la rotation inverse n'a aucune raison de se produire et ils entraînent un déplacement indéfini du centre de gravité.

Sans insister davantage sur ces considérations générales, je vais chercher à préciser la nature des mouvements, très lents par hypothèse, que le système est susceptible de prendre autour de son centre de gravité.

Partons d'une position pour laquelle il y a équilibre, et pour laquelle, par conséquent, les moments L, M, N sont nuls. Si nous faisons tourner le système de trois petits angles φ_1, φ_2, φ_3 autour de ses axes centraux d'inertie, la direction relative du vent se modifie. Soient Δl, Δm, Δn les variations éprouvées par les cosinus l, m, n. On a

$$\Delta l = \varphi_2 n - \varphi_3 m,$$
$$\Delta m = \varphi_3 l - \varphi_1 n,$$
$$\Delta n = \varphi_1 m - \varphi_2 l,$$

et les moments acquièrent les valeurs suivantes :

$$L = KV^2(\lambda_1 \Delta l + \lambda_2 \Delta m + \lambda_3 \Delta n),$$
$$M = KV^2(\mu_1 \Delta l + \mu_2 \Delta m + \mu_3 \Delta n),$$
$$N = KV^2(\nu_1 \Delta l + \nu_2 \Delta m + \nu_3 \Delta n);$$

les coefficients λ, μ, ν étant, cela va sans dire, calculés pour les axes centraux d'inertie.

Remplaçons Δl, Δm, Δn par leur valeur et posons

$$(17)\quad \left\{ \begin{array}{lll} L_1 = KV^2(\lambda_3 m - \lambda_2 n), & L_2 = KV^2(\lambda_1 n - \lambda_3 l), & L_3 = KV^2(\lambda_2 l - \lambda_1 m), \\ M_1 = KV^2(\mu_3 m - \mu_2 n), & M_2 = KV^2(\mu_1 n - \mu_3 l), & M_3 = KV^2(\mu_2 l - \mu_1 m), \\ N_1 = KV^2(\nu_3 m - \nu_2 n), & N_2 = KV^2(\nu_1 n - \nu_3 l), & N_3 = KV^2(\nu_2 l - \nu_1 m). \end{array} \right.$$

Il vient

$$L = L_1\varphi_1 + L_2\varphi_2 + L_3\varphi_3,$$
$$M = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + M_3\varphi_3,$$
$$N = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + N_3\varphi_3.$$

Soient A_1, A_2, A_3 les moments d'inertie principaux. L'une des équations du mouvement de rotation est

$$A_1 \frac{dp}{dt} + (A_3 - A_2) qr = L.$$

Je suppose la rotation assez lente pour qu'on puisse négliger le produit qr et je remplace $\frac{dp}{dt}$ par sa valeur $\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$. J'adjoins enfin à l'équation ainsi trouvée les deux équations analogues obtenues par permutation. Il vient

$$A_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = L_1\varphi_1 + L_2\varphi_2 + L_3\varphi_3,$$

$$A_2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = M_1\varphi_1 + M_2\varphi_2 + M_3\varphi_3,$$

$$A_3\frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + N_3\varphi_3.$$

Cherchons une solution de la forme

$$(18) \qquad \varphi_1 = C_1 e^{\omega t}, \qquad \varphi_2 = C_2 e^{\omega t}, \qquad \varphi_3 = C_3 e^{\omega t},$$

dans laquelle C_1, C_2, C_3, ω désignent des constantes. En substituant et éliminant C_1, C_2, C_3, on est conduit à l'équation en ω

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} L_1 - A_1\omega^2 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 - A_2\omega^2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 - A_3\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Eu égard aux équations (17), on vérifie sans peine que le déterminant

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{vmatrix}$$

est identiquement nul.

L'équation (19) admet, d'après cela, la racine double $\omega^2 = 0$.

Développons et divisons par $A_1 A_2 A_3 \omega^2$, puis posons

$$(20) \qquad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{L_1}{A_1} + \frac{M_2}{A_2} + \frac{N_3}{A_3}, \\ Q &= \frac{M_2 N_3 - N_2 M_3}{A_2 A_3} + \frac{N_3 L_1 - L_3 N_1}{A_3 A_1} + \frac{L_1 M_2 - M_1 L_2}{A_1 A_2}; \end{aligned} \right.$$

l'équation prend ainsi la forme

$$\omega^4 - P\omega^2 + Q = 0.$$

Pour que tous les mouvements représentés par les équations (18) puissent conserver une amplitude très petite, il est nécessaire que toutes les valeurs de ω soient purement imaginaires, car ces racines, étant deux à deux égales et de signes contraires, ne peuvent avoir de parties réelles sans que, pour certaines d'entre elles, l'exponentielle $e^{\omega t}$ soit indéfiniment croissante. Il faut, en d'autres termes, que toutes les valeurs de ω^2 soient réelles et négatives, ce qui conduit aux conditions suivantes :

$$P^2 > 4Q, \qquad P < 0, \qquad Q > 0.$$

Quand ces conditions sont remplies, le système possède le maximum de stabilité dont il est susceptible, c'est-à-dire qu'en dehors de la rotation continue autour de la parallèle à la direction du vent (rotation à laquelle correspond la racine double $\omega^2 = 0$), les mouvements présentent le caractère oscillatoire.

IV. — Équilibre d'un système possédant un point fixe ou un axe fixe.

Prenant d'abord le cas d'un point fixe O, plaçons l'origine des coordonnées en ce point, et soient p le poids du système, x, y, z les coordonnées du centre de gravité G, l', m', n' les cosinus directeurs de OG, i l'inclinaison du vent sur la verticale.

On a les conditions

$$(21) \quad \begin{cases} ll' + mm' + nn' = \cos i, \\ L + p(n'y - m'z) = 0, \quad M + p(l'z - n'x) = 0, \quad N + p(m'x - l'y) = 0, \\ l'^2 + m'^2 + n'^2 = 1, \end{cases}$$

d'où, en éliminant l', m', n',

$$(22) \quad \begin{cases} (px\cos i - mN - nM)^2 \\ +(py\cos i - nL - lN)^2 \\ +(pz\cos i - lM - mL)^2 = p^2(lx + my + nz)^2. \end{cases}$$

En remplaçant ensuite L, M, N par leurs valeurs (7), on parvient à une équation du quatrième degré en l, m, n, à laquelle il faut joindre les relations

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

et

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Celle-ci est linéaire en l, m, n. Ces trois équations déterminent l, m, n et font connaître, par suite, l'orientation du système par rapport au vent. Il faut ensuite faire tourner le système autour de la parallèle au vent menée par l'origine jusqu'à ce que la direction OG devienne verticale, ce qui est possible en vertu de la première équation (21).

L'équation (22), si l'on y remplace, dans le premier membre, p par $(l^2 + m^2 + n^2)\,p$ et si l'on y multiplie le second membre par $(l^2 + m^2 + n^2)$, devient homogène en l, m, n. La direction l, m, n est ainsi donnée par l'intersection d'un cône du quatrième degré avec le plan

$$Lx + My + Nz = 0.$$

Si les génératrices d'intersection sont toutes imaginaires, le système n'admet aucune position d'équilibre et est, par conséquent, animé d'un mouvement perpétuel.

Quand le centre de gravité se trouve au point fixe, x, y, z sont nuls, et, en vertu des équations (21), il en est de même de L, M, N. L'équation (22) est alors identiquement vérifiée.

Soit maintenant le cas d'un axe fixe. La seule condition d'équilibre est que la somme des moments des forces soit nulle par rapport à cet axe. En nous bornant au cas où le centre de gravité est sur l'axe et en faisant coïncider celui-ci avec Ox, nous avons à écrire

$$L = 0$$

ou bien

$$\lambda_1 l + \lambda_2 m + \lambda_3 n = 0. \tag{23}$$

Soit i l'angle que forme avec Ox la direction du vent; l, m, n doivent vérifier les deux relations

$$l = \cos i, \qquad m^2 + n^2 = \sin^2 i.$$

Posons

$$m = \sin i \cos\theta, \qquad n = \sin i \sin\theta,$$
$$\lambda_2 = h\cos\alpha, \qquad \lambda_3 = h\sin\alpha.$$

L'équation (23) prend la forme

$$\lambda_1 \cos i + h \sin i \cos(\theta - \alpha) = 0,$$

et cette équation donne deux valeurs de θ répondant à la question. Pour qu'elles soient réelles, il faut et il suffit que la valeur absolue de tang i soit supérieure à $\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2^2 + \lambda_3^2}}$. Si donc le vent fait avec l'axe un angle inférieur à une certaine limite, l'équilibre est impossible; on a un moulin animé d'une rotation perpétuelle. Lorsque le vent souffle perpendiculairement à l'axe, les deux positions d'équilibre existent toujours et elles sont alors diamétralement opposées; la même chose a lieu quand le coefficient λ_1 est nul.

Supposons que le système tourne d'un petit angle ε par rapport à une position d'équilibre. En désignant par A le moment d'inertie, on a l'équation du mouvement

$$A \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = h \sin i \sin(\alpha - \theta)\varepsilon.$$

L'équilibre est stable ou instable suivant que $\sin i \sin(\alpha - \theta)$ est négatif ou positif. Comme les deux positions d'équilibre correspondent évidemment à des valeurs de $\sin(\alpha - \theta)$, qui sont égales et de signes contraires, l'une de ces positions est stable et l'autre instable.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système formé d'éléments plans et mobile autour d'un axe fixe passant par son centre de gravité possède une position d'équilibre stable est donc que le vent fasse un angle suffisamment grand avec la direction de l'axe. Il en est tout autrement avec les systèmes comportant des surfaces courbes; c'est ce que démontre, par exemple, la rotation d'un anémomètre à godets soumis à l'action d'un vent perpendiculaire à son axe.