BULLETIN DE LA S. M. F.

D'OCAGNE

Sur la résolution nomographique générale des triangles sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 196-203

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__196_0>

SUR LA RÉSOLUTION NOMOGRAPHIQUE GÉNÉRALE DES TRIANGLES SPHÉRIQUES;

Par M. Maurice d'Ocagne.

Nous avons naguère fait remarquer ([1]) que tous les cas de résolution des triangles sphériques (désignés par ABC) pouvaient se ramener à l'usage de la formule unique

$$\cos t = \cos u \cos v + \sin u \sin v \cos T,$$

où t, u, v sont remplacés soit par les diverses permutations de a, b, c (T prenant l'une des valeurs A, B, C), soit par les diverses permutations de $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$ (T prenant l'une des valeurs $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$). Si donc la formule précédente est traduite par un nomogramme sur lequel on puisse prendre à volonté pour inconnue l'une des quatre variables t, u, v, T, ce nomogramme unique pourra servir à la résolution des triangles sphériques dans tous les cas possibles. Un tel nomogramme nous a été fourni par la méthode des points alignés ([2]). L'équation ci-dessus mise sous la forme

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos t & 1 \\ 1 & -\cos T & 1 \\ \sin u \sin v - 1 & \cos u \cos v & \sin u \sin v + 1 \end{vmatrix} = 0$$

exprime l'alignement des trois points

$$\begin{array}{lll} (t) & x = -1, & y = \cos t, \\ (T) & x = 1, & y = -\cos T, \\ (u, v) & x = \dfrac{\sin u \sin v - 1}{\sin u \sin v + 1}, & y = \dfrac{\cos u \cos v}{\sin u \sin v + 1}, \end{array}$$

ce dernier point étant fourni par la rencontre des deux ellipses

---

([1]) *Bulletin astronomique*, t. XI, 1894, p. 5.

([2]) *Voir* la Note citée du *Bulletin astronomique* et notre *Traité de Nomographie* (p. 329). On trouvera là tous les détails relatifs à la construction du nomogramme, ainsi que l'indication de la règle précise qui permet de discerner parmi les points communs aux ellipses (u) et (v) celui qui doit être pris sur l'alignement.

correspondant aux cotes $w = u$ et $w = v$ dans le système unique

$$(w) \qquad \frac{(1+x)^2}{\sin^2 w} + \frac{4y^2}{\cos^2 w} = (1-x)^2,$$

inscrit dans le quadrilatère formé par les quatre droites

$$y = \pm 1, \qquad y = \pm x.$$

Cette solution est évidemment, au point de vue théorique, la plus satisfaisante. Mais, pratiquement, on lui préférera, lorsque le choix sera possible, celle que nous avions fait connaître précédemment ([1]) en vue d'un problème particulier (celui de la distance sphérique de deux points de la mappemonde, définis par leurs coordonnées géographiques). On obtient cette autre solution en mettant, ainsi que l'a proposé M. Collignon, l'équation ci-dessus sous la forme

$$2\cos t = (1+\cos T)\cos(u-v) + (1-\cos T)\cos(u+v).$$

Si on l'écrit

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos(u+v) & 1 \\ 1 & \cos(u-v) & 1 \\ \cos T & \cos t & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

on voit qu'elle exprime l'alignement des points

$$\begin{array}{lll} (u+v) & x = -1, & y = \cos(u+v), \\ (u-v) & x = 1, & y = \cos(u-v), \\ (t, T) & x = \cos T, & y = \cos t. \end{array}$$

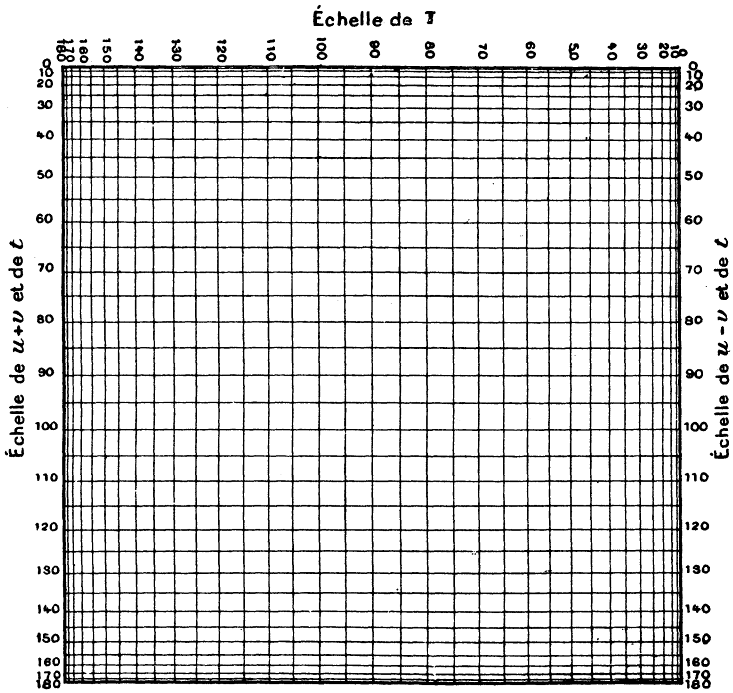
Ces formules définissent l'abaque ici représenté (*fig.* 1) (à une échelle réduite pour se plier aux nécessités du format) dont la construction est des plus simples : il s'obtient en joignant deux à deux par des parallèles à Ox et à Oy les points d'égale division d'un cercle ayant son centre à l'origine. Son emploi résulte de l'énoncé : *la droite joignant le point* $(u+v)$ *au point* $(u-v)$ *passe par*

([1]) *Nomographie*, 1891, p. 84, et *Traité de Nomographie*, p. 327. Une erreur s'est glissée à cet endroit, provenant d'une confusion entre les latitudes λ et λ' de la première formule du n° 123 et les colatitudes correspondantes. Toutes les valeurs de λ et λ' données à la page 329 doivent donc être remplacées par leurs compléments.

le point de rencontre de la parallèle (t) *à* Ox *et de la parallèle* (T) *à* Oy.

Il est inutile d'insister sur la simplicité de construction de cet abaque comparé au précédent. Son infériorité tient à ce que u et v n'y entrant pas directement, mais seulement dans les graduations ($u+v$) et ($u-v$), ni l'une ni l'autre de ces variables n'y peut être prise pour inconnue. L'abaque ne peut fournir que la valeur de t ou de T; par suite, il ne peut servir *directement* à la résolution d'un triangle sphérique que si les données comprennent trois éléments de même espèce (les trois côtés ou les trois angles) ou trois éléments consécutifs (deux côtés et l'angle compris ou deux angles et le côté contigu). Les cas où les données comprennent deux éléments de même espèce et l'élément opposé à l'un d'eux échappent à l'usage de cet abaque.

Fig. 1.



Or, telle est sa simplicité, que nous avons cherché s'il n'y aurait pas moyen, à l'aide de quelque artifice, de le faire encore servir en pareil cas.

Nous avons, en effet, fait connaître dernièrement un tel procédé ([1]) sur lequel nous allons revenir ici avec plus de détail.

Ce procédé repose sur la considération de ce que nous proposerons d'appeler les *triangles annexes* du triangle sphérique envisagé.

Si $A'B'C'$ est le triangle supplémentaire de ABC, nous appelons *éléments homologues* de ces deux triangles ceux qui, à l'accentuation près, sont désignés par les mêmes lettres. Par exemple, le sommet A est l'homologue de A', le côté AB l'homologue de $A'B'$, ... Ceci posé, *tout triangle annexe du triangle* ABC *sera un triangle formé par deux éléments de même espèce de* ABC *et l'homologue de l'un d'eux dans* $A'B'C'$. En associant ainsi deux à deux les sommets de ABC, on obtient six triangles annexes, et de même six autres au moyen des côtés ([2]).

La considération de trois de ces triangles annexes permet, dans chaque cas, d'obtenir trois angles auxiliaires déterminables par l'abaque ci-dessus et qui ramènent la résolution du triangle à un cas où l'on connaît trois éléments consécutifs, par conséquent à un de ceux où l'emploi de l'abaque fournit immédiatement la solution.

Soient donnés, par exemple, pour rendre les idées plus claires, les côtés $BC = a$, $CA = b$ et l'angle A (*fig.* 2). Considérons le triangle annexe formé par les côtés AB et AC de l'angle donné avec l'homologue $A'B'$ de celui de ces côtés dont la grandeur n'est pas connue. Pour cela, prolongeons les grands cercles AC et AB jusqu'en leurs rencontres C_1 et B_1 avec le grand cercle $A'B'$. Dans le triangle AB_1C_1 l'angle A est égal à l'angle A de ABC, le côté AC_1 à $\frac{\pi}{2} - b$, l'angle C_1 à $\frac{\pi}{2}$, puisque C est le pôle de $A'B'$. Donc, en prenant

$$t = \pi - B_1, \qquad u = \pi - A, \qquad v = \frac{\pi}{2}, \qquad T = \frac{\pi}{2} + b,$$

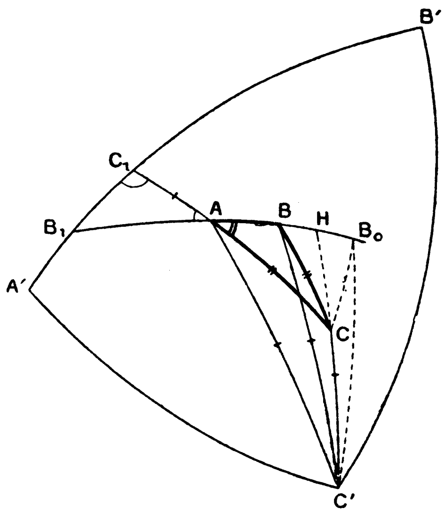
on aura, par l'abaque, la valeur de B_1.

([1]) *Comptes rendus* du 11 janvier 1904, p. 70.

([2]) Il y a douze manières de donner dans un triangle deux éléments de même espèce et l'élément de l'autre espèce opposé à l'un d'eux, d'où, par permutation, l'emploi, dans les conditions indiquées ici sur un exemple particulier, des douze triangles annexes.

Considérons maintenant les deux triangles annexes formés chacun par les deux extrémités d'un des côtés donnés et l'homologue de celle de ces extrémités qui est opposée au côté inconnu, c'est-à-dire les triangles ACC′ et BCC′. Dans chacun d'eux on connaît les trois côtés, attendu que leur côté commun CC′ est égal à l'angle B_1 qui vient d'être obtenu comme joignant les pôles

Fig. 2.



des deux grands cercles AB et A′B′ qui comprennent cet angle, et qu'on a, en outre,

$$CA = b, \qquad CB = a, \qquad C'A = C'B = \frac{\pi}{2},$$

Donc, en prenant successivement

$$t = \frac{\pi}{2}, \qquad u = b, \qquad v = B_1, \qquad T = \widehat{ACC'},$$

et

$$t = \frac{\pi}{2}, \qquad u = a, \qquad v = B_1, \qquad T = \widehat{BCC'},$$

on aura, par l'abaque, les valeurs des angles ACC′ et BCC′ dont la différence est précisément l'angle C du triangle ABC. Dès lors, connaissant dans celui-ci les côtés CA, CB et l'angle C compris, on est ramené à un cas que l'abaque permet de résoudre complètement.

Nous avons supposé l'angle B inconnu obtus. Si H est le point où le grand cercle CC′ rencontre AB, le point B tombe entre A et H, et l'on a bien

$$C = BCC' - ACC'.$$

Mais il y a une seconde solution correspondant à l'hypothèse de B aigu. Dans ce cas, la disposition est celle que définit le point B_0 ; l'angle B_0CC' a bien la même valeur que l'angle BCC′, mais on a alors

$$C = 2\pi - (ACC' + B_0CC').$$

En pratique, on a généralement le moyen de savoir d'avance si l'angle en B est aigu ou obtus, et, par suite, de décider laquelle de ces deux solutions il convient d'adopter.

Remarquons en terminant que la solution générale ci-dessus, qu'il était important de mettre en évidence au point de vue théorique, ne supprime pas l'intérêt que peuvent offrir des abaques visant tel ou tel problème particulier réductible à une résolution de triangle sphérique.

Quand nous disons que l'abaque général résout tous les cas, nous entendons par là qu'il permet, pour n'importe quel cas, d'obtenir, dans un certain ordre, les trois éléments inconnus. Or, dans la plupart des problèmes d'application, on n'a besoin que d'un seul de ces trois éléments et, si ce n'est pas le premier de ceux que donnerait l'abaque général, il y a intérêt à construire un abaque particulier qui le donne directement. Nous avons déjà, pour notre part, fait connaître un certain nombre de tels abaques. Nous tenons à signaler aujourd'hui celui que, toujours par application de la méthode des points alignés, vient de construire M. le lieutenant de vaisseau Perret pour le calcul de l'azimut en mer. Le tableau ainsi obtenu, de quelques décimètres carrés, renferme des solutions beaucoup plus étendues que les volumineuses Tables employées pour cet objet jusqu'à ce jour, et dont la meilleure, celle de Decante, ne comprend pas moins de sept Volumes, tout en ne convenant qu'aux astres compris entre -48° et $+48^\circ$ de déclinaison.

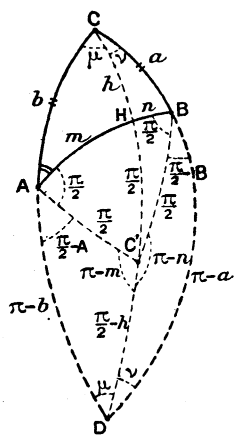
M. Perret est d'ailleurs l'auteur de nombreuses applications de la Nomographie à l'Astronomie pratique, parmi lesquelles celles qui visent la prédiction des occultations et la préparation des observations à l'astrolabe à prisme méritent aussi une mention spéciale.

Addendum.

Depuis la communication de cette Note, M. G. Pesci, Professeur à l'Académie navale de Livourne, après avoir pris connaissance de notre Note des *Comptes rendus,* nous a adressé une autre solution du même problème que nous tenons à joindre à la nôtre.

Soient D le point diamétralement opposé au sommet C sur la sphère et CHD le grand cercle orthogonal à AB. Le pôle C′ de AB

Fig. 3.



se trouve sur CD et les grands cercles C′A et C′B sont orthogonaux sur AB.

Dans l'hypothèse de $B < \frac{\pi}{2}$, appelons m et n les segments déterminés par le grand cercle CHD sur AB, μ et ν les angles qu'il fait avec CA et CB.

Dans le triangle DAC′ on connaît trois éléments consécutifs, savoir l'angle en A, égal à $\frac{\pi}{2} - A$, et les deux côtés qui le comprennent, $AD = \pi - b$, $AC' = \frac{\pi}{2}$. L'abaque permet alors de calculer les trois autres éléments du triangle, savoir : le côté C′D, l'angle en C′ égal à $\pi - m$ (d'où m) et l'angle en D égal à μ.

$C'D$ venant d'être calculé, on connaît les trois côtés du triangle DBC'. L'abaque permet alors d'en calculer les trois angles, savoir $\frac{\pi}{2} - B$ (d'où B), $\pi - n$ (d'où n) et ν.

On a enfin

$$AB = m + n \quad \text{et} \quad C = \mu + \nu.$$

Si B est obtus il faut prendre

$$AB = m - n, \qquad C = \mu - \nu.$$