G. MITTAG-LEFFLER

# Sur le théorème de M. Jensen

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 1-4
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

---

## SUR LE THÉORÈME DE M. JENSEN;

Par M. G. Mittag-Leffler.

M. Goursat vient de publier (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1902) une nouvelle démonstration du théorème de M. Jensen (*Acta math.*, t. XXII), qui rattache ce théorème au théorème fondamental de Cauchy. J'ai employé dans mon enseignement une démonstration analogue qui paraît plus directe.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe à l'intérieur d'un contour fermé S, comprenant dans son intérieur le point $x$ sur lequel nous faisons, pour simplifier, la supposition qu'il ne sera ni un zéro ni un pôle. Supposons encore, pour simplifier, que $f(z)$ soit holomorphe et différent de zéro sur le contour même. Soient $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ les zéros de $f(z)$ intérieurs au contour, chacun d'eux étant compté avec son degré de multiplicité, et $b_1$, $b_2$, ..., $b_m$ les pôles de $f(z)$ intérieurs à S, chacun d'eux étant encore compté avec son degré de multiplicité.

Je me propose d'évaluer l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{S} \frac{\log f(z)}{z-x}\,dz \tag{1}$$

prise le long du contour S dans le sens direct. Je suppose que la variable part d'un point A sur le contour, $\log f(z)$ ayant une valeur initiale déterminée. Je considère le contour fermé $\overline{S}$ formé de la courbe S, des circonférences $c_\nu$, $k_\nu$, de rayon $\varepsilon$, ayant pour centres les différents points $a_\nu$, $b_\nu$, et des lignes infiniment voisines tracées de part et d'autre d'un nombre de lignes situées entièrement à l'intérieur de S et reliant chacune un des points $a_\nu$ et $b_\nu$ avec le point A, en laissant les autres points $a_\nu$, $b_\nu$, ainsi que les points $x$, en dehors.

La fonction $\log f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour $\overline{\mathrm{S}}$. En lui appliquant le théorème de Cauchy, on obtient

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{n}\left[\int_{\mathrm{A}}^{\alpha'_\nu}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz+\int^{c_\nu}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz+\int_{\alpha'_\nu}^{\mathrm{A}}\frac{\log f(z)+2\pi i}{z-x}\,dz\right]$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\nu=1}^{m}\left[\int_{\mathrm{A}}^{\beta'_\nu}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz+\int^{k_\nu}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz+\int_{\beta'_\nu}^{\mathrm{A}}\frac{\log f(z)+2\pi i}{z-x}\,dz\right]$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz=\log f(x),$$

$\alpha'_\nu$ et $\beta'_\nu$ étant des points sur les circonférences $c_\nu$ et $k_\nu$. En allant à la limite zéro avec $\varepsilon$ et en observant que les intégrales $\int^{c_\nu}$, $\int^{k_\nu}$ deviennent alors zéro, on obtient

$$\sum_{\nu=1}^{n}\int_{\alpha_\nu}^{\mathrm{A}}\frac{dz}{z-x}+\sum_{\nu=1}^{m}\int_{\beta_\nu}^{\mathrm{A}}\frac{dz}{z-x}+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz=\log f(x).$$

On en tire

$$(2)\qquad \log f(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\log\frac{a_\nu-x}{\mathrm{A}-x}-\sum_{\mu=1}^{m}\log\frac{\beta_\mu-x}{\mathrm{A}-x}+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz.$$

Il s'ensuit

$$(3)\qquad f(x)=\frac{(a_1-x)(a_2-x)\ldots(a_n-x)}{(b_1-x)(b_2-x)\ldots(b_m-x)}(\mathrm{A}-x)^{m-n}e^{\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}dz}$$

et encore, en faisant $z-x=re^{i\theta}$ et en supposant que S soit un cercle de rayon $r$, ayant pour centre le point $x$,

$$(4)\qquad |f(x)|=\frac{|a_1-x|\,|a_2-x|\ldots|a_n-x|}{|b_1-x|\,|b_2-x|\ldots|b_m-x|}\,r^{m-n}e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\theta}.$$

Cette dernière formule devient celle de M. Jensen si l'on y fait $x=0$.

On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)dz.$$

En faisant dans la formule (3) $x=0$ et en supposant que ce point ne soit ni un zéro ni un pôle, on obtient

$$f(\mathrm{o})=\frac{a_1 a_2\ldots a_n}{b_1 b_2\ldots b_m}\mathrm{A}^{m-n}e^{\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z}dz}. \tag{5}$$

En divisant (3) par (5), on obtient donc

$$\left\{\begin{aligned} f(x)&=f(\mathrm{o})\,\frac{\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_1}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_2}\right)\ldots\left(\mathrm{I}-\frac{x}{a_n}\right)}{\left(\mathrm{I}-\frac{x}{b_1}\right)\left(\mathrm{I}-\frac{x}{b_2}\right)\ldots\left(\mathrm{I}-\frac{x}{b_m}\right)}\\ &\times\left(\mathrm{I}-\frac{x}{\mathrm{A}}\right)^{m-n}e^{\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)dz}.\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Cette formule peut facilement être généralisée en écrivant

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}dz&=\frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z}dz+\frac{x}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z^2}dz+\ldots\\ &+\frac{x^p}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z^{p+1}}dz+\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz\end{aligned}$$

et, en appliquant aux différentes intégrales

$$\frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z^2}dz,\quad \frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z^2}dz,\quad\ldots,\quad \frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z^{p+1}}$$

le même procédé que nous avons employé auparavant pour les intégrales

$$\frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}dz,\quad \frac{\mathrm{I}}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z}dz,$$

on obtient alors la formule

$$\left\{\begin{aligned} f(x)&=e^{\log f(0)+\frac{\mathrm{D}\log f(0)}{\lfloor 1}x+\ldots+\frac{\mathrm{D}^p\log f(0)}{\lfloor p}x^p}\\ &\times\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu},p\right)}{\prod_{\nu=1}^{m}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu},p\right)}\mathrm{E}\left(\frac{x}{\mathrm{A}},p\right)e^{\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{\log f(z)}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^{p+1}dz}\end{aligned}\right. \tag{7}$$

en ayant posé

$$\left\{\begin{aligned}\mathrm{E}(z,p)&=(\mathrm{I}-z)\,e^{z+\frac{1}{2}z^2+\ldots+\frac{1}{p}z^p}\\ \mathrm{E}(z,\mathrm{o})&=\mathrm{I}-z.\end{aligned}\right. \tag{8}$$

La formule (7) doit être mise à côté d'une autre qu'on obtient en partant de l'égalité ([1])

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{f'(0)}{f(0)} + \mathrm{D}\frac{f'(0)}{f(0)}\frac{x}{\underline{|1}} + \ldots \\ &\quad + \mathrm{D}^{(p-1)}\frac{f'(0)}{f(0)}\frac{x^{p-1}}{\underline{|p-1}} + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{x-a_\nu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^p \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^{m}\frac{1}{x-b_\nu}\left(\frac{x}{b_\nu}\right)^p + \frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{f'(z)}{f(z)}\frac{1}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^p dz. \end{aligned}\right.$$

En faisant l'intégration par rapport à $x$, et en observant que

$$\int^{\mathrm{S}}\frac{f'(z)}{f(z)}\left[\int_0^x\frac{1}{z-x}\left(\frac{x}{z}\right)^p dx\right]dz$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{f'(z)}{f(z)}\left[\log\left(1-\frac{x}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{z}\right)^p\right]dz,$$

on obtient

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) &= e^{\log f(0) + \frac{\mathrm{D}\log f(0)}{\underline{|1}}x + \ldots + \frac{\mathrm{D}^p\log f(0)}{\underline{|p}}x^p} \\ &\quad \times \frac{\prod_{\nu=1}^{n}\mathrm{E}\left(\frac{x}{a_\nu}, p\right)}{\prod_{\nu=1}^{m}\mathrm{E}\left(\frac{x}{b_\nu}, p\right)} e^{-\frac{1}{2\pi i}\int^{\mathrm{S}}\frac{f'(z)}{f(z)}\left[\log\left(1-\frac{z}{x}\right)+\frac{x}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{z}\right)^p\right]dz}. \end{aligned}\right.$$

On revient immédiatement de la formule (10) à la formule (7) en intégrant

$$\int^{\mathrm{S}}\frac{f'(z)}{f(z)}\left[\log\left(1-\frac{x}{z}\right)+\frac{x}{z}+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{z}\right)^2+\ldots+\frac{1}{p}\left(\frac{x}{z}\right)^p\right]dz$$

par parties.

---

[1] Voir ma Note aux *Comptes rendus*, 20 février 1882.