BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BAIRE

Nouvelle démonstration d'un théorème sur les fonctions discontinues

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 173-179
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__173_0>

NOUVELLE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME SUR LES FONCTIONS DISCONTINUES;

Par M. René Baire.

J'ai démontré dans ma Thèse (*Sur les fonctions de variables réelles*, Chapitre II; *Annali di Matematica,* 1899) que, pour qu'une fonction d'une variable soit développable en série de fonctions continues, il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. M. Lebesgue a fait voir (*Comptes rendus,* 27 mars 1899) qu'on pouvait ramener le cas de n variables à celui d'une seule, et étendre ainsi à ces fonctions l'énoncé précédent. Je me propose d'exposer ici une nouvelle démonstration du fait que la condition est suffisante; cette démonstration est plus courte et plus synthétique que celle de ma Thèse (Chap. II, Sect. III), où j'employais un procédé de récurrence; elle a de plus l'avantage de s'appliquer directement au cas de n variables.

1. Il s'agit de démontrer le théorème suivant :

Si une fonction $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, il existe une suite de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$, qui a pour limite f.

Je supposerai la fonction f définie dans le domaine E (cube à n dimensions):

$$0 \leqq x_i \leqq 1, \qquad i = 1, 2, \quad \ldots, \quad n.$$

Étant donné un entier quelconque p, j'appellerai *points principaux d'ordre p* les points dont les n coordonnées sont de la forme $\frac{\alpha_i}{2^p}$. On peut considérer E comme formé par la réunion de cubes Δ_p de côté $\frac{1}{2^p}$ et dont les sommets sont des points principaux d'ordre p.

J'appellerai *domaine principal d'ordre p* tout domaine D_p de la forme

$$\frac{\alpha_i - 1}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{\alpha_i + 1}{2^p}, \qquad i = 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad n$$

et je dirai que ce domaine a pour *centre* le point principal de coordonnées $\frac{\alpha_i}{2^p}$. (Le domaine D_p devra être réduit, dans le cas où un des nombres α_i est o ou 2^p, à sa portion contenue dans E.)

Tout point M de E appartient à un certain nombre de domaines D_p; j'appelle *points principaux d'ordre p associés à* M les centres de ces domaines; ces points sont aussi les sommets des cubes Δ_p qui contiennent M. (Dans le cas général, où aucune des coordonnées de M n'est de la forme $\frac{\alpha}{2^p}$, M appartient à *un seul* cube Δ_p; il y a donc 2^n points principaux d'ordre p associés à M.)

Cela posé, je vais démontrer que le problème de la construction des fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$, tendant vers f, peut être complètement ramené au suivant :

I. *Faire correspondre à chaque domaine principal* D *un nombre* $\varphi(D)$ *de manière à réaliser la condition* A *qui suit :*

A. *Étant donné un point quelconque* M, *si petit que soit* ε, *il existe une sphère* Σ *de centre* M *telle que, à chaque domaine principal* D *contenu tout entier dans* Σ *et contenant* M, *correspond un nombre* $\varphi(D)$ *différant de* $f(M)$ *de moins de* ε.

Supposons en effet le problème I résolu. Nous construirons f_p de la manière suivante : En chaque point principal d'ordre p, H, cette fonction aura pour valeur le nombre $\varphi(D)$ correspondant au *domaine principal* D *d'ordre p dont* H *est le centre.* Nous achèverons la définition de f_p en l'assujettissant à être continue, et à avoir, en chaque point M, *une valeur comprise entre la plus grande et la plus petite de ses valeurs aux points principaux d'ordre p associés à* M. Ces deux conditions seront réalisées si, par exemple, on prend pour f_p la fonction qui, dans chaque cube Δ_p, est *linéaire par rapport à chacune des variables.*

Je dis que, dans ces conditions, $f_p(M)$ tend vers $f(M)$ quand p croît indéfiniment. En effet, donnons-nous un nombre positif ε, et déterminons une sphère Σ d'après la condition A. Dès que p dépasse une certaine valeur, les domaines principaux d'ordre p qui contiennent M sont contenus tout entiers dans Σ; par conséquent les valeurs de f_p aux points principaux d'ordre p associés à M diffèrent de $f(M)$ de moins de ε; il en est de même de $f_p(M)$, qui est compris entre la plus grande et la plus petite de ces valeurs; donc $f_p(M)$ a pour limite $f(M)$.

2. Tout revient donc à résoudre le problème I.

Donnons-nous une suite décroissante de nombres positifs tendant vers o, par exemple

$$(1)\qquad \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^\mu},\ \ldots.$$

Soit D un domaine principal; nous allons définir $\varphi(D)$.

Soit σ_1 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe dans D des points où l'*oscillation par rapport à* E, $\varpi(f, E)$, est $\geqq \sigma_1$; soit P_1 l'ensemble des points de D où l'on a $\varpi(f, E) \geqq \sigma_1$.

Si P_1^Ω existe et si la fonction n'est pas continue sur P_1^Ω, soit σ_2 le plus grand nombre de (1) tel qu'il existe des points où l'*oscillation par rapport à* P_1^Ω, $\varpi(f, P_1^\Omega)$, est $\geqq \sigma_2$; soit P_2 l'ensemble de ces points.

On définit ainsi des ensembles fermés, tous contenus dans D :

$$(2)\qquad P_1, P_2,\ \ldots,\ P_n,\ \ldots,\ P_\omega,\ \ldots,\ P_{2\omega},\ \ldots,\ P_\alpha,\ \ldots,$$

et des nombres dont chacun fait partie de la suite (1) ou est nul :

$$(3)\qquad \sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots,\ \sigma_n,\ \ldots,\ \sigma_\omega,\ \ldots,\ \sigma_{2\omega},\ \ldots,\ \sigma_\alpha,\ \ldots;$$

d'après la loi suivante :

Si α est de première espèce, σ_α et P_α s'obtiennent de $P_{\alpha-1}$ comme σ_2 et P_2 de P_1. Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les $P_{\alpha'}$, pour lesquels $\alpha' < \alpha$; de plus, σ_α est la limite inférieure des nombres $\sigma_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$. (Il est évident que la condition $\beta > \alpha$ entraîne $P_\beta \leqq P_\alpha$, et $\sigma_\beta \leqq \sigma_\alpha$.)

J'ai démontré (Thèse, § 47) qu'étant donnée une suite d'ensembles tels que (2), il y a un nombre α tel que $P_\alpha = P_{\alpha+1}$. (La démonstration, faite pour le cas des ensembles linéaires, s'étend sans difficulté au cas d'ensembles à n dimensions.) Je dis qu'on doit avoir $P_\alpha = 0$; si, en effet, P_α existait effectivement, on aurait $P_\alpha = P_\alpha^\Omega = P_{\alpha+1}$; il existerait un nombre *positif* $\sigma_{\alpha+1}$ tel que, sur l'ensemble parfait P_α^Ω, l'oscillation en chaque point par rapport à P_α^Ω serait $\geqq \sigma_{\alpha+1}$; la fonction serait totalement discontinue sur cet ensemble, contrairement à l'hypothèse. Il résulte de là que, pour un certain nombre β, ou bien P_β est dénombrable ($P_\beta^\Omega = P_{\beta+1} = \ldots = o$), ou bien P_β^Ω existe, mais la fonction est continue sur cet ensemble ($P_{\beta+1} = \ldots = o$).

Dans le premier cas, il existe un nombre γ tel que P_β^γ se compose d'un nombre fini de points; on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur quelconque *comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur* P_β^γ.

Dans le second cas, on prendra pour $\varphi(D)$ une valeur *comprise entre les valeurs extrêmes de la fonction sur* P_β^Ω.

Ainsi se trouvent définis les nombres $\varphi(D)$ et, par suite, les fonctions continues $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$. Il reste à montrer que la condition A est réalisée.

3. Soit M un point quelconque de E.

Soit τ_1 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à E, $\varpi(f, E, M)$, est $\geqq \tau_1$; soit Q_1 l'ensemble des points de E où l'on a $\varpi(f, E) \geqq \tau_1$.

Si Q_1^Ω existe et contient M, et si la fonction n'est pas continue en M par rapport à Q_1^Ω, soit τ_2 le plus grand nombre de (1), tel que l'oscillation en M par rapport à Q_1^Ω, $\varpi(f, Q_1^\Omega, M)$, est $\geqq \tau_2$; soit Q_2 l'ensemble des points de Q_1^Ω où l'on a $\varpi(f, Q_1^\Omega) \geqq \tau_2$.

On déduira τ_α et Q_α de $Q_{\alpha-1}$, quand α est de première espèce, comme on a déduit τ_2 et Q_2 de Q_1. Quand α est de deuxième espèce, Q_α sera l'ensemble commun aux ensembles $Q_{\alpha'}$, tels que $\alpha' < \alpha$, et τ_α sera la limite inférieure des nombres $\tau_{\alpha'}$ pour lesquels $\alpha' < \alpha$.

On définit ainsi des ensembles fermés *contenant tous le point* M:

$$(4) \quad Q_1, \; Q_2, \; \ldots, \; Q_n, \; \ldots, \; Q_\omega, \; \ldots, \; Q_{2\omega}, \; \ldots, \; Q_\alpha, \; \ldots$$

et des nombres correspondant à ces ensembles:

$$(5) \quad \tau_1, \; \tau_2, \; \ldots, \; \tau_n, \; \ldots, \; \tau_\omega, \; \ldots, \; \tau_{2\omega}, \; \ldots, \; \tau_\alpha, \; \ldots.$$

De même que précédemment, on reconnaît que les ensembles Q sont nuls à partir d'un certain indice. Il existe donc un nombre η tel que, ou bien Q_η^Ω n'existe pas, ou bien Q_η^Ω existe et ne contient pas M, ou bien Q_η^Ω contient M, la fonction étant continue en M par rapport à Q_η^Ω.

Chacun des nombres de (5) appartient à (1) (sauf peut-être le dernier τ_η); ces nombres peuvent donc se ranger par groupes, les nombres d'un même groupe étant égaux à un même nombre λ de (1). L'indice du premier nombre de chaque groupe est nécessairement de première espèce; car, si α est de deuxième espèce, et si τ_α est positif, comme τ_α est la limite inférieure des nombres α' tels que $\alpha' < \alpha$ et qu'il n'existe qu'un nombre fini de valeurs pour les $\tau_{\alpha'}$, il y a des nombres α' pour lesquels $\tau_{\alpha'} = \tau_\alpha$.

On peut donc écrire:

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l} \tau_1 \qquad = \tau_2 \qquad = \ldots = \tau_{\alpha_1} = \lambda_1, \\ \tau_{\alpha_1+1} = \tau_{\alpha_1+2} = \ldots = \tau_{\alpha_2} = \lambda_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \tau_{\alpha_{h-1}+1} = \ldots \quad = \ldots = \tau_{\alpha_h} = \lambda_h, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Deux cas peuvent se présenter : ou bien le nombre des groupes (6) est fini, soit k; alors on a $\alpha_k = \eta$; ou bien ces groupes sont en nombre infini; alors $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h, \ldots$ (qui vont toujours en décroissant), ont pour limite o.

Soient $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots. \lambda'_h, \ldots$ les nombres de (1) qui précèdent immédiatement dans cette suite les nombres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_h, \ldots$. Soit R_1 l'ensemble des points de E où l'on a $\varpi(f, E) \geqq \lambda'_1$; soit R_2 l'ensemble des points de $Q^\Omega_{\alpha_1}$ où l'on a $\varpi(f, Q^\Omega_{\alpha_1}) \geqq \lambda'_2$) et généralement R_h l'ensemble des points de $Q^\Omega_{\alpha_{h-1}}$ où l'on a $\varpi(f, Q^\Omega_{\alpha_{h-1}}) \geqq \lambda'_h$. (Il peut arriver que certains de ces ensembles n'existent pas; en particulier, si λ_1 est le premier nombre de (1), il n'y a pas de nombre λ'_1, et R_1 n'existe pas.)

D'après la définition des ensembles Q, le point M ne fait partie d'aucun des ensembles fermés $R_1, R_2, \ldots, R_h, \ldots$; donc, quel que soit h, il existe une sphère Σ de centre M qui ne contient aucun point des ensembles $R_1, R_2, \ldots, R_h$. Soit D un domaine principal contenant M et contenu dans Σ; je dis que si, dans ce domaine, on définit, d'après le procédé du § 2, les ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_\alpha, \ldots$, tous ceux de ces ensembles dont l'indice est inférieur ou égal à α_h coïncident, dans D, avec les ensembles $Q_1, Q_2, \ldots, Q_\alpha, \ldots$, ayant respectivement les mêmes indices.

En effet, d'abord il n'y a dans D aucun point où $\varpi(f, E) \geqq \lambda'_1$, tandis qu'il y en a au moins un, le point M, où l'on a

$$\varpi(f, E, M) \geqq \lambda_1 = \tau_1.$$

Donc on a $\sigma_1 = \tau_1$ et, par suite, dans D, P_1 coïncide avec Q_1. Démontrons, par voie de récurrence, qu'on a $P_\alpha = Q_\alpha$ (dans D), si $\alpha \leqq \alpha_h$; il suffit d'établir la proposition quand α est de première espèce, si l'on se reporte à la définition de P_α et Q_α quand α est de deuxième espèce.

Supposons donc α de première espèce et distinguons deux cas :

1° α n'est pas l'indice du premier terme d'un des groupes (6); nous admettons qu'on a $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1}$ et $P_{\alpha-1} = Q_{\alpha-1}$; d'après l'hypothèse faite, on a $\tau_\alpha = \tau_{\alpha-1}$, c'est-à-dire qu'au point M, l'oscillation par rapport à $P_{\alpha-1}^\Omega = Q_{\alpha-1}^\Omega$ est $\geqq \tau_\alpha$; donc σ_α, qui ne peut surpasser $\sigma_{\alpha-1} = \tau_{\alpha-1} = \tau_\alpha$, est identique à τ_α; donc P_α est, dans D, identique à Q_α.

2° α est l'indice du premier terme d'un des groupes (6), soit $\alpha_\delta + 1$ ($\delta < h$); nous admettons qu'on a $P_{\alpha_\delta} = Q_{\alpha_\delta}$; sur l'ensemble $Q_{\alpha_\delta}^\Omega$, l'oscillation au point M est supérieure ou égale à $\lambda_{\delta+1}$; comme D ne contient aucun point de $R_{\delta+1}$, ensemble des points où $\varpi(f, Q_{\alpha_\delta}^\Omega) \geqq \lambda'_{\delta+1}$, on a $\sigma_{\alpha_\delta+1} = \lambda_{\delta+1} = \tau_{\alpha_\delta+1}$, et, par suite, $P_{\alpha_\delta+1} = Q_{\alpha_\delta+1}$.

Cela posé, je vais établir que la condition A est réalisée pour tout point M. Distinguons deux cas :

1° Pour le point M considéré, le nombre des groupes (6) est fini, soit k; on a $\alpha_k = \eta$; l'ensemble Q_η existe, mais on a $Q_{\eta+1} = 0$. D'après ce qu'on a vu plus haut, ce cas peut se subdiviser en deux autres :

a. Q_η^Ω n'existe pas, ou bien existe, mais ne contient pas M; M fait partie d'un certain ensemble Q_η^ν sans faire partie de $Q_\eta^{\nu+1}$: c'est un point *isolé* de Q_η^ν. Déterminons une sphère Σ de centre M ne contenant aucun point de Q_η^ν autre que M, et ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \ldots, R_k$. Si D est un domaine contenant M et contenu dans Σ, on a, pour ce domaine, $P_\eta = Q_\eta$; d'où $P_\eta^\nu = Q_\eta^\nu = M$ et $P_\eta^{\nu+1} = 0$; donc, d'après la définition de $\varphi(D)$, on a $\varphi(D) = f(M)$.

b. M fait partie de Q_η^Ω, et la fonction est continue en M sur Q_η^Ω. Déterminons une sphère Σ ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \ldots, R_k$, et telle que l'oscillation de f sur la portion de Q_η^Ω contenue dans cette sphère soit $< \varepsilon$. Si D est contenu dans Σ et contient M, on a $P_\eta^\Omega = Q_\eta^\Omega$; l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω qui intervient dans la définition de $\varphi(D)$ est certainement contenu dans Q_η^Ω; donc $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε.

2° Les groupes (6) sont en nombre infini; ε étant donné, on peut trouver h tel que λ_h soit $< \varepsilon$. Sur l'ensemble $Q_{\alpha_h}^\Omega$, l'oscillation en M est $< \varepsilon$; on peut donc trouver une sphère Σ ne contenant aucun point de $R_1, R_2, \ldots, R_h$ et telle que l'oscillation de f sur la portion de $Q_{\alpha_h}^\Omega$ qui y est contenue soit $< \varepsilon$. De même que dans le cas b, l'ensemble P_β^γ ou P_β^Ω, qui sert à définir $\varphi(D)$, est contenu dans $Q_{\alpha_h}^\Omega$, et $\varphi(D)$ diffère de $f(M)$ de moins de ε.

Ainsi, dans chacun des trois cas a, b, 2°, la condition A est réalisée; le théorème est donc établi.

4. On conçoit que le procédé de définition des nombres $\varphi(D)$, donné au § 2 pour le cas le plus général, pourrait recevoir des simplifications dans certains cas particuliers; je vais indiquer un cas remarquable où la solution peut être obtenue d'une manière extrêmement simple. J'ai démontré, dans ma Thèse, que les fonctions *semi-continues* satisfont à la condition d'être ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait, et j'en ai déduit la possibilité, pour ces fonctions, d'être développées en séries de fonctions continues; je vais établir cette proposition d'une manière beaucoup plus directe.

Supposons que f soit *semi-continue supérieurement*. Je fais correspondre à chaque domaine D un nombre $\varphi(D)$ égal au *maximum* de la fonction dans ce domaine : je dis que la condition A est ainsi réalisée. En effet, soit M un point; on peut déterminer une sphère Σ de centre M, dans laquelle on a, en tout point M', $f(M') < f(M) + \varepsilon$. Si D est contenu dans Σ et contient M, le maximum de f dans D, c'est-à-dire $\varphi(D)$, est compris entre $f(M)$ et $f(M) + \varepsilon$. Le théorème est ainsi démontré.

Il est remarquable que cette proposition résulte ainsi, d'une manière presque immédiate, de la notion de semi-continuité : la démonstration ne nécessite pas l'emploi des résultats de la théorie des ensembles.